

解析汎函数の理論におけるワトソン変換

上智大 理工 吉野 邦生

最近, de Roever, Sargos-森本, Zharinov 等により, 非有界な台を持つ解析汎函数の理論, 並ぶに応用が, 研究され, 数々の成果を上げつつある。この小文では, 波の散乱理論, Regge 極理論などで用いられている Watson-Sommerfeld 変換を指数型正則函数に対して, 定義し, 非有界な台を持つ解析汎函数に対して定義される Fourier-Borel 変換, 並ぶに Arakissian-Gay 変換 との関係調べる。又, これらの間に成り立つ関係を利用することにより, いくつかの応用を見い出すことができる。例えば, 昔からよく知られている種々の特殊函数の積分公式に対し, 我々の理論がどの意味付けを行なうことができる。又, Fourier-Borel 変換の解析性と Arakissian-Gay 変換の漸近展開の間にある関係を調べることもできる。さて, 先ず最初にフーリエ・ウルトラ超函数, 及び, 非有界な台を持つ解析汎函数の定義を与える。

§ 1. フーリエ・ウルトラ超関数の空間 Q_0 とその部分空間 $Q'(L; K')$

数々の研究者により，様々な表記法が，使用されているがここでは，Sargos-森本[7]の表記法を採用することにする。今， Ω を $\mathbb{C}^n$ の開集合とし， σ を $\mathbb{C}^n$ 上の実数値連続関数とする。この時， $H_b(\Omega; \sigma) = \{f(z) \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : \sup_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)| \cdot e^{\sigma(z)} < +\infty\}$

とおく。但し， $\mathcal{O}(\Omega)$ ， $C(\bar{\Omega})$ は，それぞれ， Ω 上， $\bar{\Omega}$ 上の正則関数，連続関数の空間を表わす。次に， $K, K' \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトな凸集合とし，又， $h_{K'}(x)$ を K' の台関数として，試験関数の空間 Q_0 を次の様に定義する。

$$Q_0 = \lim_{K, K' \subset \mathbb{R}^n} \text{proj } H_b(\mathbb{R}^n + iK; -h_{K'}(x))$$

Q_0 の双対空間を Q'_0 で表わし， Q'_0 の元をフーリエ・ウルトラ超関数と呼ぶ。さて， L を $\mathbb{C}^n$ の凸閉集合で，座軸方向に有界なものとする時，新しい試験関数の空間 $Q(L; K')$ を次の様に定義する。

$$Q(L; K') = \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \varepsilon' \downarrow 0} \text{ind } H_b(\bar{L}_\varepsilon; -h_{K'_\varepsilon}(x) - \varepsilon'(x))$$

Q_0 と $Q(L; K')$ との関係については，最近，Sargos-森本[7]により，次の事実が，証明された。

定理 1. Q_0 は, $Q(L; K')$ の中で点列的に稠密である $Q(L; K')$ の双対空間を $Q'(L; K')$ で表わす時, この定理 1 により, 我々は, $Q'(L; K')$ を Q_0 の部分空間と考えることが出来る。さて, フーリエ・ウルトウ超函数 $T \in Q_0$ に対し, $T \in Q'(L; K')$ なる L, K' が存在するならば, 我々は, T は L により支えられ, タイプが $h_{K'}$ であると言う。ここで, L の例を幾つか掲げておく。

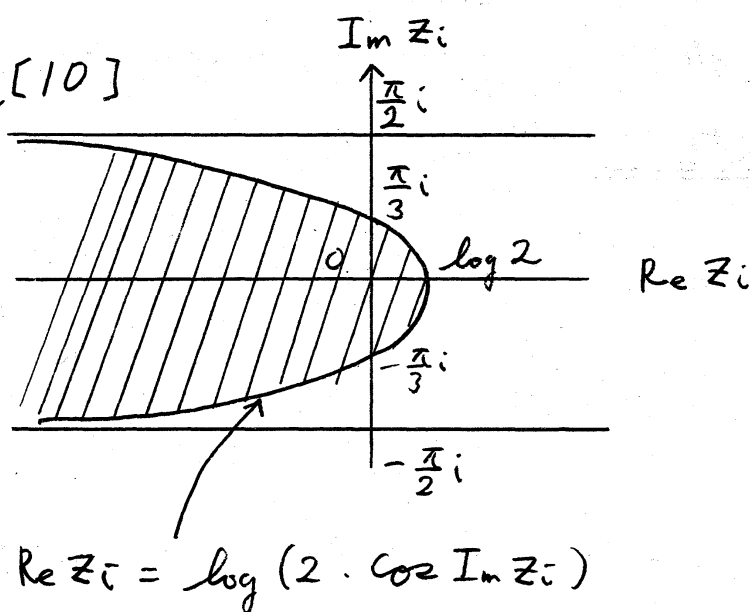
例 1. $L = \mathbb{R}^n + iK$ ($K: \mathbb{R}^n$ 内のコンパクト凸集合)
この型の L に対し $Zharinov$ により, $Q(L; K')$ は詳しく調べられている。(但し, 彼の記号では, $\Phi(K; K')$ と書く) $Zharinov$ [12] を参照のこと。

例 2. $L = \prod_{i=1}^n L_i, L_i = \{z_i \in \mathbb{C} : |\exp z_i - 1| < 1\}$

この L は, de Roever, [10]

Kioustelidias [3]

により, 指数型正則
函数の多項式展開を
導く際に利用されて
いる。



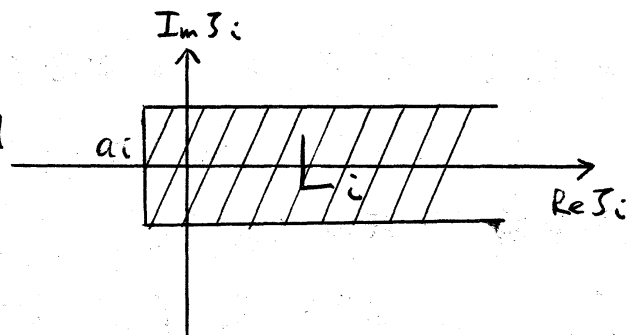
以下、本文では、 L として次の型のものに限定して考える。

$$L = \bigcup_{i=1}^n L_i \quad L_i = [a_i, \infty) + k_i$$

但し、 a_i は、実数であり、 k_i は、 $\mathbb{R}$ のコンパクト区間である。

$T \in Q'(L; K')$ の Fourier-Borel 変換を次の様に定義する。

$$\widehat{T}(z) = \langle T, e^{z\zeta} \rangle$$



ここで、特に、 K' として1点 $\{-t'_1, t'_2, \dots, t'_n\}$ のみからなるものを考える。そして、 $-t'_1 + \pi^+ = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_i < -t'_i\}$ と置く。Fourier-Borel 変換は、 $Q'(L; -t')$ と、 $-t'_1 + \pi^+$ 上の指数型正則関数の空間 $\operatorname{Exp}(-t'_1 + \pi^+; L)$ との間の位相同型(線型)を与える。この事実を定理として述べよう。

定理 2. (Sargos - 森本 [7]) 次は、位相同型である。

$$Q'(L; -t'_1) \xrightarrow[\text{Borel}]{\text{Fourier}} \operatorname{Exp}(-t'_1 + \pi^+; L)$$

$$\text{但し、} \operatorname{Exp}(-t'_1 + \pi^+; L) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \varepsilon' \downarrow 0} \operatorname{proj} H_b(-\varepsilon - t'_1 + \pi^+; h_{L_\varepsilon}(z))$$

次に、 $Q'(L; -t'_1)$ の Aronissian-Gay 変換の定義と性質について述べる。

§ 2. $Q'(L; -\mathbf{t}')$ の Arakissian-Gay 変換

$L_j = [a_j, \infty) + i k_j$ の虚軸方向の成分 k_j の幅は, 2π 未満とし, $\mathbf{t}' = (t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ の各成分 t'_j は, 1 未満と仮定する。 $\exp(-L) = \prod_{i=1}^n \exp(-L_i)$, $\mathbb{C}^n \# \exp(-L) = \prod_{i=1}^n (\mathbb{C} \# \exp(-L_i))$ とおく。 $w \in \mathbb{C}^n \# \exp(-L)$ であるとき, 関数 $\prod_{i=1}^n (1 - w_i e^{z_i})^{-1}$ は $Q(L; -\mathbf{t}')$ に属する。この関数を用いて, 我々は, $T \in Q'(L; -\mathbf{t}')$ の Arakissian-Gay 変換を次の様にして定義する。

$$G_T(w) = \langle T, \prod_{i=1}^n (1 - w_i e^{z_i})^{-1} \rangle.$$

$G_T(w)$ については, 次の事が判っている。(Arakissian-Gay [1] 又は, Sargos-森本 [7] を参照せよ。)

$$(i) \quad G_T(w) \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n \# \exp(-L))$$

$$(ii) \quad |G_T(w)| \leq C_{\varepsilon, \varepsilon'} |w_1|^{-(t'_1 + \varepsilon')} \cdots |w_n|^{-(t'_n + \varepsilon')} \quad (t'_i + \varepsilon \leq \arg w_i \leq \pi)$$

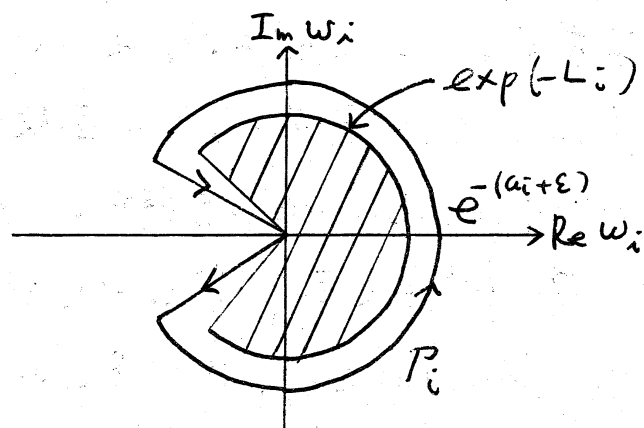
$$(iii) \quad G_T(w) = (-1)^n \sum_{v \in \mathbb{N}^n} \tilde{T}(-L) \bar{w}^v \quad (|w_i| > e^{-a_i})$$

特に, 1次元の場合には, 上記(iii)は, 特殊函数論において重要な意味(例えば, 直交多項式の母函数展開に対応している)を持つことが, 筆者の計算により判っている。(Yoshino [11])

(i), (ii) の性質を持つ関数の空間を $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n \# \exp(-L); -\mathbf{t}')$ と表わす事にし, $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n \# \exp(-L); -\mathbf{t}')$ の元に対して, Mellin 変換を次の様にして定義する。

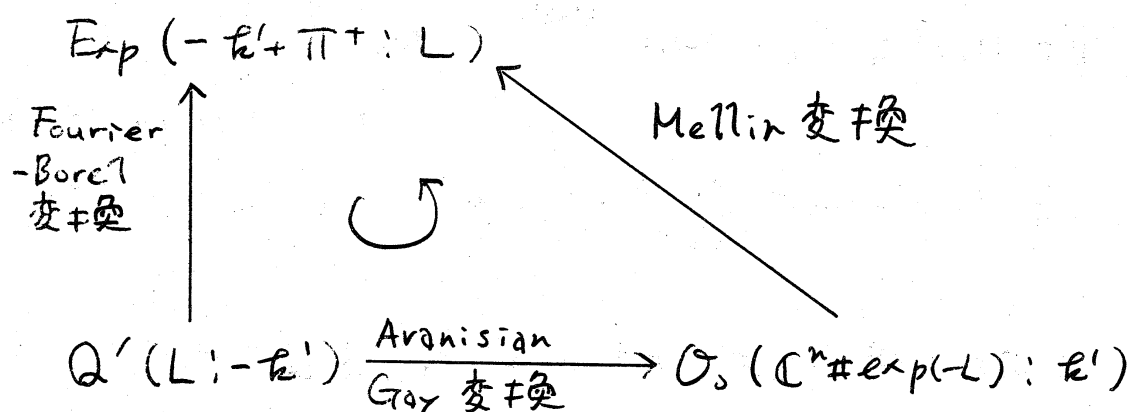
$$(2\pi i)^{-1} \int_{P_1 \times \dots \times P_n} g(w_1, w_2, \dots, w_n) w_1^{-z_1-1} \dots w_n^{-z_n-1} dw_1 \dots dw_n$$

但し, $g \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n \# \exp(-L); -k')$ であり, γ, P_i は, 次の積分路とする。



以上の定義の下に, 我々は,
次の可換図式を得る。

定理 3. (Aravissian-Gay [1], Sargos-森本 [7])



勿論, 上の3つの変換は, どれも線型位相同型である。又,
この可換図式は, 特殊関数の積分表示式(例えば, P -函数の Hankel 積分表示式, Legendre 関数の Schläfli 積分表示式など), と密接な関係にあることが, 判っている。これにつ

いては、例えば、森本-吉野[9]、吉野[11]を参照せよ。

§ 4. $\text{Exp}(-k' + \pi^+; L)$ の Watson-Sommerfeld 変換

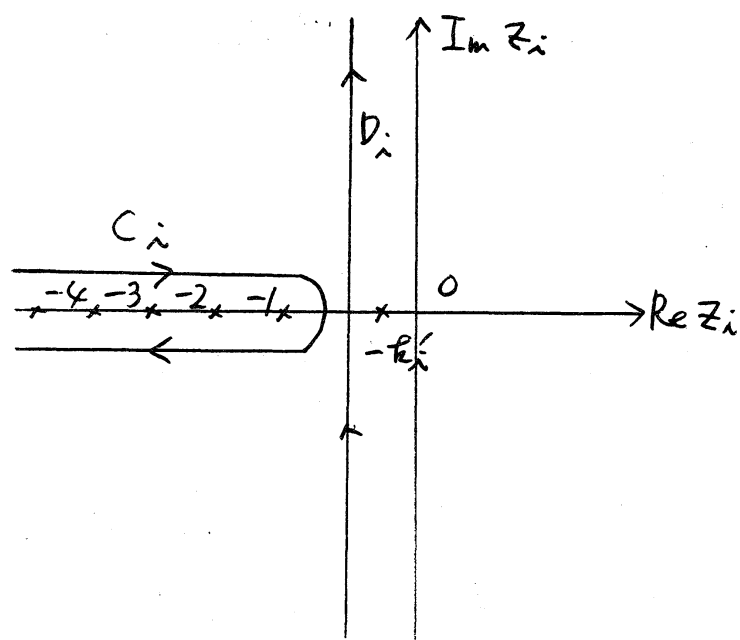
$-k' + \pi^+$ 上の指数型正則函数 $f(z) \in \text{Exp}(-k' + \pi^+; L)$ について、次の積分変換により、Watson-Sommerfeld 変換を定義する。

$$(2\pi i)^{-n} \int_{\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n} f(z_1, \dots, z_n) \prod_{i=1}^n \frac{(-w_i)^{z_i}}{\sin \pi z_i} dz_1 \dots dz_n$$

但し、積分路 γ_i の取り方は、次の様になる。

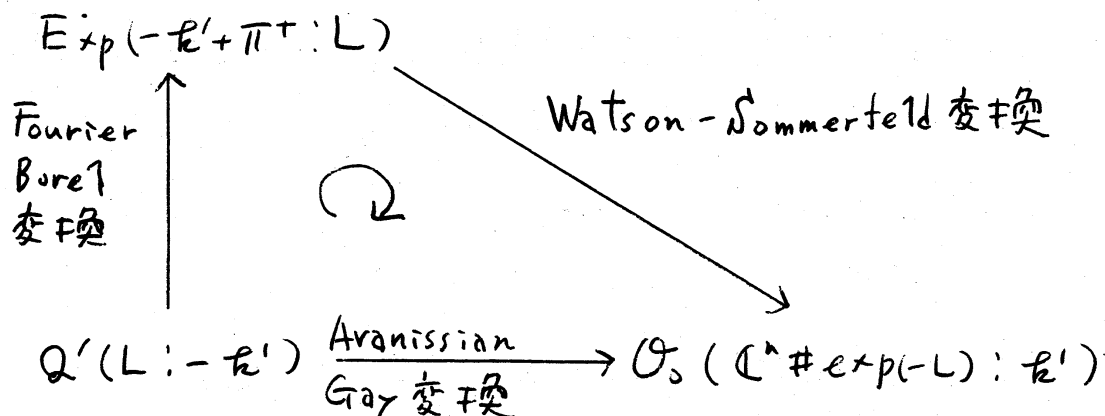
$$\gamma_i = \begin{cases} C_i & |w_i| > e^{-a_i} \text{ の時,} \\ D_i & k_i \leq |\arg w_i| \leq \pi \text{ の時,} \end{cases}$$

C_i, D_i は、次の図の様に決めておく。



留数計算を実行する事により, 次の可換図式を得る。

定理 4.



以下で, 定理4の応用を述べることにする。先ず古典的な定積分計算へ応用してみる。

例1. $T \in Q'(L; -L')$ として, $a \in L$ に台を持つテータ関数を与える。この時, $\hat{T}(z) = e^{az}$, $G_T(w) = (1 - we^a)^{-1}$

となる。上の可換図式により, 次の有名人, として P-関数の重要な関数等式を導く際に利用される定積分公式

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (0 < \operatorname{Re} a < 1)$$

を得る。(~~~~~ は, $P(z)P(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ の事を指す。)

次に, 2番目の例として, Appell 関数 (又は, Jonquièrre 関数とも呼ばれる) の積分表示式を導いてみよう。

例2. $L = [0, \infty)$, $0 \leq \alpha' < 1$ とする。 $T \in Q'(L; \alpha')$ を次の様に定義する。 $h \in Q(L; \alpha')$ とする。

$$\langle T, h \rangle = (2i \sin(\alpha' \pi))^{-1} \int_{-\infty}^{(0+)} (-s)^{\alpha'-1} h(s) ds$$

Γ -関数の Hankel 積分表示式により, $\tilde{T}(z) = P(s)(-z)^{-s}$,

$$G_T(w) = - \sum_{n=1}^{\infty} w^n n^{-s} p(s) = F(s, w^{-1})$$

ここで, $F(s, w)$ は, 通常 Appell 関数と呼ばれているものである。定理4の可換図式により, 次の積分表示式を得る。

$$\frac{-1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\sin \pi z} \cdot \frac{T(s)}{(-z)^s} (-w)^z dz = F(s, w^{-1})$$

特に, $w=1$ として,

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(-z)^{-s}}{1 - e^{-2\pi iz}} dz = J(s)$$

を得る。

適当な汎関数を設定することにより, Fock-Mehler 変換を計算する事が, できる。次は, 次の例である。

例3. $t \geq 1$ とする。 K を次の1種完全楕円積分とする。

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \tanh \pi x \cdot p_{-\frac{1}{2}+it}(t) dx = 2[t + \sqrt{t^2-1}]^{-\frac{1}{2}} K\{[t + \sqrt{t^2-1}]^{-1}\}$$

次に、解析接続に関する定理への応用を示してみよう。

定理5 (Sargos-森本) 級数 $\sum_{v \in \mathbb{N}^n} a_v w^v$ は、0でない収束半径を持つとする。この時、次は、同値である。

(i) $f(v) = a_v$ とする $\text{Exp}(-\ell' + \pi i; L)$ の元 $f(z)$ が、存在する。

(ii) $\sum_{v \in \mathbb{N}^n} a_v w^v$ は、 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n \# \exp(-L); \ell')$ の元に解析接続できる。

さらに、更に、次の事をより厳密に事ができる。 $n=1$ とする。

定理6 $T \in Q'(L; -\ell')$ とする。この時、次は同値である

(i) $\hat{T}(z)$ は、全平面で有理型で、点 z で、位数 β の極を持つ。(左半平面では、指数型正則函数である。)

(ii) $G_T(w)$ は、扇形領域 $\ell \leq |\arg w| \leq \pi$ で、 ℓ' の型の漸近展開を持つ。

$$G_T(w) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\ell=1}^{\beta_i} c_{\ell}^i (\log w)^{\ell} \right\} w^{\ell_i}$$

例えば、 $T \in Q'(L, \ell')$ と $L = [0, \infty)$, $0 \leq \ell' < 1$ とし、

$$\langle T, \ell \rangle = \int_0^{\infty} \xi^{\ell} h(\xi) d\xi$$

とかくと、 $\hat{T}(z) = \left(-\frac{1}{z}\right)^{\ell} P(\ell+1)$, $G_T(w) = -P(\ell+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{-n}}{n^{\ell}}$
 従って、 $G_T(w)$ は、 $G_T(w) \sim P(\ell+1) \int_2^{\frac{2}{w}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-2^{2n-1}) \frac{B_{2n}}{\pi^{2n} (\log(-w))^n} + (-1)^{\ell+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n^{\ell+1}} \Big\}$ と ℓ' の漸近展開を持つ。

という漸近展開を持つ。最後に、正則函数の一意性に関する Carlson の定理の一般化が、得られることを一言附け加えておく。(Mellin 変換と Watson-Sommerfeld 変換は、互いに逆である。)

定理 7 (Carlson の定理の一般化) $f(z) \in E_{\alpha}(-\frac{1}{2} + \pi i; L)$

とする。 $f(-v) = 0$ ($v \in \mathbb{N}^n$) であると、 $f(z) \equiv 0$ 。

この定理 7 は、特に、量子統計力学において重要である。例えば、温度グリーン関数(松原グリーン関数)に関する

Abrikosov-Gor'kov-Dzyaloshinskii-Fradkin の定理(温度グリーン関数から 2 時間グリーン関数が決定されるという内容)の証明において使われる。(詳しいことについては、岩波講座現代物理学の基礎 5 統計物理学 を参照のこと) 又、 $n=1$ の場合、つまり Carlson の定理が、散乱振幅を複素角運動量平面に解析接続する際に、その一意性を示すために用いられていることは、非常に有名である。(例えば今村 [2] を見よ。) 更に、Watson-Sommerfeld 変換の物理的応用については、Nussenzweig [5] を見たい。又、少し違う視点から Watson-Sommerfeld 変換を考えているものに Sargos [6] がある。最後に、話が少し前後するが、定理 5 の類似物が、Lebeau [4] で Schwartz 超函数を用いて得られており、球面上の超函数の特異性スペクトルの評価に用いられているこ

とを附け加えておく。

参考文献

- [1] V. Avannissian and R. Gay : Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entieres de plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 341-384.
- [2] T. Imamura : 物理と関数論, 岩波書店 1981
- [3] J. Kioustelidis : Eine einheitliche methode zur herleitung von reihenentwicklungen fur ganze funktionen von exponentialtyp Compositio Matn. 26 Fasc. 3, (1973) 203-232.
- [4] G. Lebeau : Fonctions harmoniques et spectre singulier, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. t 13 (1980) 269-291.
- [5] H. M. Nussenzveig : Causality and Dispersion Relations, Academic Press. New York London 1972.
- [6] P. Sargos : Prolongement meromorphe des series de Dirichlet associes des fractions rationnelles de plusieurs variables (preprint)
- [7] P. Sargos and M. Morimoto : Transformations des fonctionnelles analytiques à porteurs non compacts, Tokyo J. Math. 4 (1981). 457-492.
- [8] M. Morimoto and K. Yoshino : A uniqueness theorem for holomorphic functions of exponential type, Hokkaido Math. J., 7 (1978) 259-270.

- [9] M. Morimoto and K. Yoshino : Some examples of analytic functionals with carrier at the infinity, Proc. Japan Acad., 56(1980) 357-361
- [10] J. W. de Rooij : Complex Fourier Transformation and Analytic Functionals with Unbounded Carrier, Mathematisch Centrum, Amsterdam
- [11] K. Yoshino : Some examples of analytic functionals and their transformations, to appear in Tokyo J. Math.
- [12] V. V. Zharinov : Laplace transformation of Fourier Hyperfunctions and related classes of analytic functionals, Theoret. and Math. Phys., 33(1978) 1027-1039