

2 レベルの信用取引と非瞬時の品質低下における在庫管理問題

大阪府立大学大学院 理学系研究科 情報数理科学専攻 大坪祐介 (Yusuke Ohtsubo)
北條仁志 (Hitoshi Hohjo)

Department of Mathematics and Information Sciences, Graduate School of Science
OSAKA PREFECTURE UNIVERSITY

1. はじめに

近年, 品質低下を伴った商品の在庫管理問題が広く研究されている. 一般的に品質低下とは, 腐敗, 乾燥, 蒸発などが商品の有用性を下げるとを言い, このような商品の最適発注政策の記述は Ghare and Schrader[3] により初めて行われた. 彼らは EOQ モデルに指数的な品質低下を適応し, 在庫の商品の品質低下は商品が到着した瞬間に開始されると仮定した. しかし, 多くの商品では一定の期間は状態を保ち, その期間の間は品質低下は起こらない. この現象は”非瞬時の品質低下”として知られる. Wu ら [1] では非瞬時の品質低下を伴う商品に対し, 品切れの一部が待ち時間の関数として表わされる割合によりバックログされる在庫モデルについて言及された. 2010 年には Geetha[2] が支払いの遅れが許されるモデルへと拡張した. そのモデルではサプライヤーへの支払いに対しては信用取引の期間は設定されていたものの, 客からの支払いに対しては設定されていなかった.

本稿では, 非瞬時の品質低下を伴う商品に対して, 品切れの一部が待ち時間の関数としてあらわされる割合によりバックログされるモデルを提案する. また, 客からの支払いとサプライヤーへの支払いの両方に対して支払いの遅れが許されるものとする. 以上の条件の下で, 単位時間当たりの在庫管理の費用を最小化する政策が唯一存在することを示し, その際のサイクルの長さと発注してから品切れが起こるまでの時間を求めるアルゴリズムを示す.

2. 仮定と表記

本稿では, 次のような仮定をもつ EOQ モデルを扱う.

1. 在庫システムでは 1 製品を扱い, 計画期間は無限である.
2. 補充率は無限で, システムの初期在庫レベルとリードタイムは 0 である.
3. 需要は一定の割合 D で生じる.
4. 商品は時刻 t_d から品質低下が起こり, 品質低下率は一定の θ である.
5. 品質低下が起こった商品に関しては商品の修理や交換は行われない.
6. 品切れの状態を許し, バックログ率は次の補充までの持ち時間の関数である.
7. 商品の料金の支払いには信用取引期間が存在する. サプライヤーから商品を購入する際は商品を受け取った時刻から M 後に料金を支払い, 客が商品を購入する際は N 後に料金を受け取る.
8. 支払いまでの信用取引期間内に得た販売収益は利率 I_e での利子を稼ぐために利用される. しかしながら, 信用取引期間を過ぎると, 在庫としてある製品は利率 I_p の利子が費用として課せられる.
9. モデルの簡略化のために, $N \leq M, t_d + N \leq t_1$ を仮定する.

最適補充計画の数理的モデルを展開するために, 次のような記号を適用する.

- h : 単位商品単位時間当たりの在庫保管費用
 A : 1 回あたりの発注費用
 p : 単位商品当たりの購入費用
 p_1 : 単位商品当たりの販売価格, $p_1 > p$
 s : 単位商品単位時間当たりのバックログコスト

- π : 単位商品当たりの機会損失費用
 I_p : サプライヤーへ支払う単位時間当たりの利子率
 I_e : 支払いまでに得られる単位時間当たりの利子率
 T : 補充サイクルの長さ
 t_1 : 商品の在庫量が0になる時間
 δ : 商品のバックログのパラメータ, $0 \leq \delta < 1$
 θ : 品質低下率, $0 < \theta < 1$

3. 数学的定式化

上述のモデルにおける目的関数を確立するために, 1 サイクルを3つの時間区間 $[0, t_d], (t_d, t_1], (t_1, T]$ に分離して考える. $[0, t_d]$ では商品は需要により減少する. $(t_d, t_1]$ では商品は需要と劣化により消費される. $(t_1, T]$ では商品は品切れの状態待ち時間 t の関数 $\frac{1}{1+\delta t}$ で次の発注時にバックログされる. その量は負の在庫レベルとして表される. システムの在庫レベルの関数は以下になる.

$$I(t) = \begin{cases} I_1(t), & 0 \leq t \leq t_d \\ I_2(t), & t_d < t \leq t_1 \\ I_3(t), & t_1 < t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

$$I_1(t) = \frac{D}{\theta} [e^{\theta(t_1-t_d)} - \theta(t-t_d) - 1] \quad (2)$$

$$I_2(t) = \frac{D}{\theta} [e^{\theta(t_1-t)} - 1] \quad (3)$$

$$I_3(t) = -\frac{D}{\delta} [\log[1 + \delta(T-t_1)] - \log[1 + \delta(T-t)]] \quad (4)$$

サイクルの総費用は以下で構成される.

(a) 発注費用 A

(b) 在庫保管費用

$$HC = h \left[\int_0^{t_d} I_1(t) dt + \int_{t_d}^{t_1} I_2(t) dt \right] \quad (5)$$

$$= D \left[\frac{ht_d}{\theta} [e^{\theta(t_1-t_d)} - 1] + \frac{ht_d^2}{2} + \frac{h}{\theta^2} [e^{\theta(t_1-t_d)} - 1 - \theta(t_1-t_d)] \right] \quad (6)$$

(c) 品質低下によるコスト

$$DC = p\theta \int_{t_d}^{t_1} I_2(t) dt = \frac{D\theta p}{\theta^2} [e^{\theta(t_1-t_d)} - \theta(t_1-t_d) - 1] \quad (7)$$

(d) バックログのコスト

$$SC = s \int_{t_1}^T -I_3(t) dt = \frac{sD}{\delta} \left[(T-t_1) - \frac{\log[1 + \delta(T-t_1)]}{\delta} \right] \quad (8)$$

(e) 販売損失のコスト

$$OC = \pi \int_{t_1}^T D \left[1 - \frac{1}{1 + \delta(T-t)} \right] dt = \pi D \left[(T-t_1) - \frac{\log[1 + \delta(T-t_1)]}{\delta} \right] \quad (9)$$

(f) 利子の支払い

利子の支払いは (I) $0 \leq M < t_d$, (II) $t_d \leq M < t_1$, (III) $t_1 \leq M < t_1 + N$, (IV) $t_1 + N \leq M$ の範囲で分けて考えられる.

(I) $0 \leq M < t_d$

$$\begin{aligned} IP_1 &= pI_p \left[\int_M^{t_1+N} D(t-M)dt + \int_M^{t_d} \{I_1(0) - Dt_1\}dt + \int_{t_d}^{t_1} \{I_2(t) - D(t_1-t)\}dt \right] \\ &= DpI_p \left[\frac{1}{\theta} e^{\theta(t_1-t_d)} \left(t_d - M + \frac{1}{\theta} \right) + t_1 \left(N - \frac{1}{\theta} \right) + \frac{t_d^2}{2} - t_d M \right. \\ &\quad \left. + \frac{M^2}{2} + \frac{N^2}{2} - MN + \frac{M}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

(II) $t_d \leq M < t_1$

$$\begin{aligned} IP_2 &= pI_p \left[\int_M^{t_1+N} D(t-M)dt + \int_M^{t_1} \{I_2(t) - D(t_1-t)\}dt \right] \\ &= DpI_p \left[\frac{1}{\theta^2} e^{\theta(t_1-M)} + t_1 \left(N - \frac{1}{\theta} \right) + \frac{N^2}{2} - MN + \frac{M}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

(III) $t_1 \leq M < t_1 + N$

$$IP_3 = pI_p \int_M^{t_1+N} D(t-M)dt = \frac{DpI_p(t_1 + N - M)^2}{2} \quad (12)$$

(IV) $t_1 + N \leq M$

$$IP_4 = 0 \quad (13)$$

(g) 利子の収入

利子の収入は (I) $0 \leq M < t_d$, (II) $t_d \leq M < t_1$, (III) $t_1 \leq M < t_1 + N$, (IV) $t_1 + N \leq M$ の範囲で分けて考えられる.

(I) $0 \leq M < t_d$, (II) $t_d \leq M < t_1$, (III) $t_1 \leq M < t_1 + N$

$$\begin{aligned} IE_1 &= IE_2 = IE_3 = p_1 I_e \left[\int_N^M \frac{D}{\delta} \log[1 + \delta(T - t_1)] dt + \int_N^M D(t - N)dt \right] \\ &= Dp_1 I_e \left[\frac{M - N}{\delta} \log[1 + \delta(T - t_1)] + \frac{(M - N)^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

(IV) $t_1 + N \leq M$

$$\begin{aligned} IE_4 &= p_1 I_e \left[\int_N^M \frac{D}{\delta} \log[1 + \delta(T - t_1)] dt + \int_N^{t_1+N} D(t - N)dt + \int_{t_1+N}^M Dt_1 dt \right] \\ &= Dp_1 I_e \left[\frac{M - N}{\delta} \log[1 + \delta(T - t_1)] - \frac{t_1^2}{2} + t_1(M - N) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

以上から単位時間当たりの総コストは以下になる.

$$TC(t_1, T) = \begin{cases} TC_1(t_1, T) = \frac{1}{T} [A + HC + DC + SC + OC + IP_1 - IE_1], & 0 \leq M \leq t_d \\ TC_2(t_1, T) = \frac{1}{T} [A + HC + DC + SC + OC + IP_2 - IE_2], & t_d \leq M \leq t_1 \\ TC_3(t_1, T) = \frac{1}{T} [A + HC + DC + SC + OC + IP_3 - IE_3], & t_1 \leq M \leq t_1 + N \\ TC_4(t_1, T) = \frac{1}{T} [A + HC + DC + SC + OC + IP_4 - IE_4], & t_1 + N \leq M \end{cases} \quad (16)$$

我々の目的は在庫管理にかかるこれらの単位時間当たりの総コスト $TC(t_1, T)$ を最小化する t_1 と T を求めることである。

4. モデルの解析

モデルの解析は (I) $0 \leq M < t_d$, (II) $t_d \leq M < t_1$, (III) $t_1 \leq M < t_1 + N$, (IV) $t_1 + N \leq M$ の範囲で分けて考察する。もし探索領域の内部に最適解が存在するのであれば、その解は最適性の必要条件を満たさなければならない。まず、それぞれの範囲において最適性の必要条件である連立方程式の解を求めることから始める。

(I) $0 \leq M < t_d$

$0 \leq M \leq t_d$ における (16) 式の t_1, T での一次の偏導関数を求める。

$$Z_1(t_1, T) = \frac{D}{T} \left[e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(ht_d + \frac{h + p\theta}{\theta} \right) - \frac{h + p\theta}{\theta} - \frac{(s + \delta\pi)(T - t_1)}{1 + \delta(T - t_1)} \right] \quad (17)$$

$$Z_2(t_1, T) = \frac{D}{T^2} \left[\frac{1}{\theta} e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(-ht_d - \frac{h + p\theta}{\theta} \right) + \left(\frac{(T - t_1)(\delta t_1 - 1)}{1 + \delta(T - t_1)} + \frac{1}{\delta} \log [1 + \delta(T - t_1)] \right) \right. \\ \left. \left(\frac{s + \delta\pi}{\delta} \right) - \frac{A}{D} + \frac{ht_d}{\theta} - \frac{ht_d^2}{2} - \frac{h + p\theta}{\theta^2} (-\theta(t_1 - t_d) - 1) \right] \quad (18)$$

とおくと

$$\frac{\partial TC_1}{\partial t_1} = Z_1 + \frac{D}{T} \left[\frac{p_1 I_e (M - N)}{1 + \delta(T - t_1)} + p I_p \left[e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(t_d - M + \frac{1}{\theta} \right) + N - \frac{1}{\theta} \right] \right] \quad (19)$$

$$\frac{\partial TC_1}{\partial T} = Z_2 + \frac{D}{T} \left[\frac{p_1 I_e}{\delta T} (M - N) \log [1 + \delta(T - t_1)] - \frac{p_1 I_e}{1 + \delta(T - t_1)} (M - N) \right. \\ \left. + \frac{p_1 I_e}{2T} (M - N)^2 - \frac{p I_p}{T} \left[\frac{1}{\theta} e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(t_d - M + \frac{1}{\theta} \right) + t_1 \left(N - \frac{1}{\theta} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{t_d^2}{2} - t_d M + \frac{M^2}{2} + N^2 - MN + \frac{M}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right] \right] \quad (20)$$

である。 $\frac{\partial TC_1}{\partial t_1} = 0$ を変形すると

$$\left[e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(ht_d + \frac{h + p\theta}{\theta} \right) - \frac{h + p\theta}{\theta} + p I_p \left[e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(t_d - M + \frac{1}{\theta} \right) + N - \frac{1}{\theta} \right] - \frac{s + \delta\pi}{\delta} \right] \\ \{1 + \delta(T - t_1)\} + p_1 I_e (M - N) + \frac{s + \delta\pi}{\delta} = 0 \quad (21)$$

が得られる。そのことから以下の補題が導かれる。

補題 1 $R_1 = e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(ht_d + \frac{h + p\theta}{\theta} \right) - \frac{h + p\theta}{\theta} + p I_p \left[e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(t_d - M + \frac{1}{\theta} \right) + N - \frac{1}{\theta} \right] - \frac{s + \delta\pi}{\delta}$,
 $k_1 = t_d + \frac{1}{\theta} \log \left[\frac{\frac{h + p\theta}{\theta} - p I_p \left(N - \frac{1}{\theta} \right) + \frac{s + \delta\pi}{\delta}}{ht_d + \frac{h + p\theta}{\theta} + p I_p \left(t_d - M + \frac{1}{\theta} \right)} \right]$ とおく。 $t_d \leq t_1 < k_1$ である任意の t_1 に対して $t_1 \leq T$ を満たす最適な T が唯一存在し、

$$T = T_1(t_1) = t_1 - \frac{1}{\delta} - \frac{p_1 I_e (M - N) + \frac{s + \delta\pi}{\delta}}{\delta R_1} \quad (22)$$

である。

最適性の必要条件の連立方程式を計算すると、

$$-\frac{A\theta}{D} + ht_d - \frac{ht_d^2}{2} + (h + p\theta) \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\delta} - t_d \right) + p_1 I_e \theta (M - N) \left(\frac{M - N}{2} - \frac{1}{\delta} \right)$$

$$\begin{aligned}
& +pI_p \left[(N\theta - 1) \left(M - N - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\delta} \right) - \frac{\theta}{2} (t_d - M)^2 \right] \\
& - \left[ht_d + \frac{h+p\theta}{\theta} + pI_p \left(t_d - M + \frac{1}{\theta} \right) \right] e^{\theta(t_1-t_d)} \left(1 + \frac{\theta}{\delta} - \theta t_1 \right) \\
& + \frac{\theta}{\delta^2} \{ p_1 I_e \delta (M - N) + s + \delta \pi \} \log [1 + \delta(T - t_1)] = 0 \quad (23)
\end{aligned}$$

を得る. (23) 式の左辺を $\Delta_1(t_1, T)$ とおく. Appendix A に与えられた二次の十分条件の計算が次の定理を保証する.

定理 1 $\Delta_1(t_d, T_1(t_1)) < 0$ かつ $0 < \Delta_1(k_1, T_1(t_1))$ ならば, 最適解は $\Delta_1(t_1^0, T_1(t_1^0)) = 0$ を満たす $(t_1^*, T_1(t_1^*)) = (t_1^0, T_1(t_1^0))$ であり, 対応するコストは $TC_1(t_1^0, T_1(t_1^0))$ である.

(II) $t_d \leq M < t_1$

(I) と同様の議論から, 次のような補題が得られる.

補題 2 $R_2 = e^{\theta(t_1-t_d)} \left(ht_d + \frac{h+p\theta}{\theta} \right) - \frac{h+p\theta}{\theta} + pI_p \left[\frac{1}{\theta} e^{\theta(t_1-M)} + N - \frac{1}{\theta} \right]$ とおき, $R_2 = 0$ を満たす t_1 を k_2 とおく. $t_d \leq t_1 < k_2$ である任意の t_1 に対して $t_1 \leq T$ を満たす最適な T が唯一存在し,

$$T = T_2(t_1) = t_1 - \frac{1}{\delta} - \frac{p_1 I_e (M - N) + \frac{s+\delta\pi}{\delta}}{\delta R_2} \quad (24)$$

である.

(III) $t_1 \leq M < t_1 + N$

(I) と同様に計算していくと, (22) 式の代わりに

$$\begin{aligned}
& \left[e^{\theta(t_1-t_d)} \left(ht_d + \frac{h+p\theta}{\theta} \right) - \frac{h+p\theta}{\theta} - \frac{s+\delta\pi}{\delta} + pI_p(t_1 + N - M) \right] \{1 + \delta(T - t_1)\} \\
& + \frac{s+\delta\pi}{\delta} + p_1 I_e(M - N) = 0 \quad (25)
\end{aligned}$$

を得る.

補題 3 $R_3 = e^{\theta(t_1-t_d)} \left(ht_d + \frac{h+p\theta}{\theta} \right) - \frac{h+p\theta}{\theta} - \frac{s+\delta\pi}{\delta} + pI_p(t_1 - M + N)$ とおき, $R_3 = 0$ を満たす t_1 を k_3 とおく. $t_d \leq t_1 < k_3$ である任意の t_1 に対して $t_1 \leq T$ を満たす最適な T が唯一存在し,

$$T = T_3(t_1) = t_1 - \frac{1}{\delta} - \frac{p_1 I_e(M - N) + \frac{s+\delta\pi}{\delta}}{\delta R_3} \quad (26)$$

である.

(IV) $t_1 + N \leq M$

(III) と同様の議論を行うと次のような補題が得られる.

補題 4 $R_4 = e^{\theta(t_1-t_d)} \left(ht_d + \frac{h+p\theta}{\theta} \right) - \frac{h+p\theta}{\theta} - \frac{s+\delta\pi}{\delta} + p_1 I_e(t_1 - M + N)$ とおき, $R_4 = 0$ を満たす t_1 を k_4 とおく. $t_d \leq t_1 < k_4$ である任意の t_1 に対して $t_1 \leq T$ を満たす最適な T が唯一存在し,

$$T = T_4(t_1) = t_1 - \frac{1}{\delta} - \frac{p_1 I_e(M - N) + \frac{s+\delta\pi}{\delta}}{\delta R_4} \quad (27)$$

である.

補題 2,3,4 を用いて (I) と同様の議論を行うと, 定理 1 に対応する次の定理が導かれる.

定理2 (II),(III),(IV)での Δ_1 に対応する式をそれぞれ $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ とする. 各 $i(i=1, 2, 3, 4)$ に対して $\Delta_i(t_d, T_i(t_d)) < 0$ かつ $0 < \Delta_i(k_i, T_i(k_i))$ ならば, 最適解は $\Delta_i(t_1^0, T_i(t_1^0)) = 0$ を満たす $(t_1^*, T^*) = (t_1^0, T_i(t_1^0))$ であり, 対応するコストは $TC_i(t_1^0, T_i(t_1^0))$ である.

最適解を得るためのアルゴリズムを以下に示す.

アルゴリズム

ステップ0. パラメータ及び ϵ を与える.

ステップ1. $M < t_d$ ならば $i=1$, そうでなければ $i=2$ を代入する.

ステップ2. $\Delta_i(t_d, T_i(t_d)) < 0$ かつ $0 < \Delta_i(k_i, T_i(k_i))$ なら $x_1 = t_d, x_2 = k_i$ としてステップ3へ, そうでなければ探索範囲に最適解は存在しない.

ステップ3. $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ として, $\Delta_i(x_3, T_i(x_3))$ を計算する. $x_3 - x_1 < \epsilon$ ならステップ3-2へ. そうでなければステップ3-1へ.

ステップ3-1. $\Delta_i(x_3, T_i(x_3)) < 0$ なら $x_1 = x_3$ としてステップ3へ. そうでなければ $x_2 = x_3$ としてステップ3へ.

ステップ3-2. $TC_i(x_1, T_i(x_1)), TC_i(x_2, T_i(x_2)), TC_i(x_3, T_i(x_3))$ のうち最小値をとるものに対応する x_j を t_{1i} に代入してステップ4へ.

ステップ4. $i=1$ ならば $j=1$ としてステップ5へ. $i=2, 3$ ならば $i=i+1$ としてステップ2へ. $i=4$ ならば $i=2, 3, 4$ に対して $TC_i(t_{1i}, T_i(t_{1i}))$ が最小となる i を j に代入しステップ5へ.

ステップ5. 最適解は $(t_1^*, T^*) = (t_{1j}, T_j(t_{1j}))$ で対応するコストは $TC(t_1^*, T^*)$

5. 数値例

パラメータに値を代入した後の解を以下に示す.

例1. 計算結果として次の数値に対して最適解を求める. $D = 1000, h = 15, A = 250, p = 80, p_1 = 85, s = 30, \pi = 25, I_p = 0.15, I_e = 0.12, M = 0.01233, N = 0.005, t_d = 0.0685, \delta = 0.56, \theta = 0.08$ とする. このとき, ケース(I)に該当し, 最適解は $t_1^* = 0.1001, T^* = 0.1685$, コストは2837となる.

例2. $t_d = 0.002$ として他は例1と同じとする. このとき, ケース(II)に該当し, 最適解は $t_1^* = 0.0899, T^* = 0.1634$, コストは2977となる.

例3. $t_d = 0.002, M = 0.1, N = 0.02$ として他は例1と同じとする. このとき, ケース(III)に該当し, 最適解は $t_1^* = 0.0948, T^* = 0.1654$, コストは2202となる.

例4. $t_d = 0.002, M = 0.12, N = 0.02$ として他は例1と同じとする. このとき, ケース(IV)に該当し, 最適解は $t_1^* = 0.0957, T^* = 0.1660$, コストは1998となる.

以上のように TC_1 から TC_4 までの各範囲に対して最小値が得られた.

各パラメータに対して感度分析を行った結果を以下に示す.

(1) D や A を動かすとコストや時刻が大きく変化する.

(2) M 以外では, D, H, A を動かした際に最適解の場合分けによるケースの変化が大きい.

(3) A, D, s の変化はサイクルの長さに大きな変化を与える.

6. まとめ

本稿では, 非瞬時の品質低下を伴う商品に対し, 品切れの一部が待ち時間の関数として表わされる割合によりバックログされ, 客からの支払いとサプライヤーへの支払いの両方に対して支払いの遅れが許されるモデルを提案した. 単位時間当たりの在庫管理の費用を最小化する政策が唯一存在する

ことを示し、在庫レベルが0になる時刻 t_1 と1サイクルの長さ T の最適解を導いた。アルゴリズムでは、実用的な最適解の導出方法を提案した。数値例では、4つの利子の考察のパターンが考えられるので、それぞれの部分に対して最適解を持つケースを与えた。感度分析では、各パラメータの変化に対して $t_1^*, T^*, TC(t_1^*, T^*)$ の変化を見た。今後の拡張としては、より一般的な需要 $N \leq M, t_d + N \leq t_1$ などの仮定を取り除いた場合の研究などが考えられる。

Appendix A

コストの最適解に対して二次の十分条件を確認する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 TC_1(t_1^*, T_1(t_1^*))}{\partial t_1^2} &= \frac{D}{T} \left[\theta e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(ht_d + \frac{h + p\theta}{\theta} \right) + pI_p \theta e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(t_d - M + \frac{1}{\theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_1 I_e \delta (M - N) + (s + \delta\pi)}{[1 + \delta(T - t_1)]^2} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 TC_1(t_1^*, T_1(t_1^*))}{\partial T^2} = \frac{D}{T^2} \left[\frac{(s + \delta\pi)T}{[1 + \delta(T - t_1)]^2} + \frac{p_1 I_e \delta T (M - N)}{[1 + \delta(T - t_1)]^2} \right] - \frac{2}{T} \frac{\partial TC_1}{\partial T} \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 TC_1(t_1^*, T_1(t_1^*))}{\partial t_1 \partial T} = -\frac{1}{T} \frac{\partial TC_1}{\partial t_1} - \frac{D}{T [1 + \delta(T - t_1)]^2} [p_1 I_e \delta (M - N) + (s + \delta\pi)] \quad (30)$$

$\frac{\partial^2 TC_1(t_1^*, T_1(t_1^*))}{\partial t_1^2}$ は明らかに正である。一次の必要条件が成立する下で $\frac{\partial^2 TC_1(t_1^*, T_1(t_1^*))}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2 TC_1(t_1^*, T_1(t_1^*))}{\partial T^2} - \left[\frac{\partial TC_1(t_1^*, T_1(t_1^*))}{\partial t_1 \partial T} \right]^2$ を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{T^2 [1 + \delta(T - t_1)]^2} &\left[\theta e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(ht_d + \frac{h + p\theta}{\theta} \right) + pI_p \theta e^{\theta(t_1 - t_d)} \left(t_d - M + \frac{1}{\theta} \right) \right] \\ &\quad [p_1 I_e \delta (M - N) + s + \delta\pi] > 0 \end{aligned} \quad (31)$$

よって $(t_1^*, T_1(t_1^*))$ は局所的最小点である。

参考文献

- [1] K.S.Wu, L.Y.Ouyang, C.T.Yang, An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging, International Journal of Production Economics 101 (2006) 369-384.
- [2] K.V.Geetha, R.Uthayakumar, Economic design of an inventory policy for non-instantaneous deteriorating items under permissible delay in payments, Journal of Computational and Applied Mathematics 233 (2010) 2492-2505.
- [3] P.M.Ghare, G.H.Schrader, A model for exponentially decaying inventory system, International Journal of Productions Research 21 (1963) 449-460.