

量子化された一次と高次の Hamiltonian の可換性について

小樽医科大学 池田 薫 (Kaoru Ikeda)

§0 Intro. 次の戸田分子は古典力学の意味で完全積分可能

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 = 2e^{2(u_2-u_1)} \\ \ddot{u}_i = 2(e^{2(u_{i+1}-u_i)} - e^{2(u_i-u_{i-1})}) & 1 < i < n \\ \ddot{u}_n = -2e^{2(u_n-u_{n-1})} \end{cases} \quad (0.1)$$

この事実と古典行列の言葉を用いて述べよう.

$$R = i \sum_{1 \leq i \leq n} e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{i \neq j} e_{ii} \otimes e_{jj} + (1-i^2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} e_{ij} \otimes e_{ji}$$

但し e_{ij} は (i,j) 行列単位とする. 行列 $X \in X = (X_{ij})_{n \times n}$ とする.

又 $X_1 = X \otimes 1$, $X_2 = 1 \otimes X$ とする. $\hat{A}(GL_2(n)) \in \mathcal{X}_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n$ で生成された自由結合代数とし $A(GL_2(n)) = \hat{A}(GL_2(n))/I_R$, 但し I_R は $RX_1X_2 - X_2X_1R$ の成分で生成された ideal, とする. $\mathcal{X}_{ij}$ 達からなす関係式を具体的に書き下すと

$$[X_{ij}, X_{kl}] = X_{ij}X_{kl} - X_{kl}X_{ij} = (e^{\theta(i,j)} - e^{\theta(k,l)})X_{il}X_{kj} \quad (0.2)$$

但し $\theta(i,j) = 1 \ (i < j), = 0 \ (i = j), = -1 \ (i > j)$ とする. $X = (X_{ij})_{n \times n} \in X = GL_2(n)$ とかく. $i = e^{\hbar}$ とし R は $\hbar$ に関し展開する. $R = 1 + \hbar R + o(\hbar^2)$, $X = Y + o(\hbar)$ とかくと $RX_1X_2 - X_2X_1R = 0$ より $Y_1Y_2 - Y_2Y_1 = 0$ $Y = (Y_{ij})_{n \times n}$ とすると $Y_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n$ 達は可換性代数を生成する. 以下

を $A(GL(n))$ とかく. $A(GL(n))$ には次の Poisson 構造が入る.

$$\{y \otimes y\} = [r, y \otimes y]$$

この Poisson 関係式を具体的に書き下すと

$$\{y_{ij}, y_{kl}\} = (\theta(j, l) + \theta(i, k)) y_{il} y_{kj}$$

となる. さて $\text{tr}(y^m)$ (以下 $\text{tr} y^m$ と略記) に関し次の公式がなりたつ.

$$\{\text{tr} y^m, y_{ij}\} = m [r_m(y), y]_{ij} = 2r_m(y)_{ij} = (y^m)_{ij} \quad i < j,$$

$$= 0 \quad i=j, \quad = -(y^m)_{ij} \quad i > j. \quad \text{この公式より } \{\text{tr} y^k, \text{tr} y^l\} = 0 \text{ が成り立つ.}$$

$\text{tr} y^k \quad k=1, 2, \dots$ はこの Poisson 構造の上で互いに可換な Hamiltonian

となれる. $A(GL(n))$ の生成元の個数を phase space の自由度と

なすと $\det y = \text{const}$ となれるからその次元は $n-1$ 次元となる.

自由度 $2n$ の phase space 上の n 個の互いに Poisson bracket で可換な Hamiltonian があればその系は積分可能であるという Liouville の定理がある.

$\text{tr} y^k$ のうち $k \leq n$ については $\text{tr} y, \dots, \text{tr} y^n$ の多項式で書き下せてしまうので本質的には Hamiltonian は $n-1$ 個しかない.

phase space の自由度をばさえて $2n-2$ 次元までおろす. $z_{ij} = (y^2)_{ij}$

とすると $z_{ij} = z_{ji}$ で

$$\{z_{ij}, z_{kl}\} = (\theta(j, l) + \theta(i, k)) z_{il} z_{kj} + (\theta(i, l) + \theta(j, k)) z_{il} z_{kj}$$

となる. さらに $\rho(z_{ij}) = 0$ if $|i-j| > 1$, $\rho(z_{ij}) = z_{ij}$ if $|i-j| \leq 1$ と

したとき $\{\rho(z_{ij}), \rho(z_{kl})\} = \rho\{z_{ij}, z_{kl}\}$ となる. $\rho(z)$ を改めて z とかくと

$$z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & & 0 \\ & z_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z_{n-1, n-1} & z_{n-1, n} \\ & & & z_{n, n-1} & z_{n, n} \end{pmatrix}$$

となり $\det z = \text{const.}$ となるから $A(GL(n))$ の自由

度は $2n-2$ となり互いに可換な Hamiltonian

の個数の2倍となる. 2のとき方程式系 $\frac{\partial^2}{\partial \epsilon_k} = \{tr z^k, z\}$ は $k=1$ のとき戸田分子(0.1)を含む. 以上の話の類似 $\in A(GL_2(n))$ 上で行いたい. あるいは戸田分子の類似を構成したい. そのためには Hamiltonian の公式 $\{tr y^k, tr y^0\} = 0$ の類似をつくることが必要となる.

§1 X の k 次で定義する. ${}_1X^1 = X$, ${}_1X^{k+1} = X \cdot (C^* X^k)$ 但し $C = (\delta^{0(i,j)})_{n \times n}$ $(A_{ij})_{n \times n} * (B_{ij})_{n \times n} = (A_{ij} B_{ij})_{n \times n}$ とする. 最終的には次の予想を示したい.

予想 $[tr {}_1X^k, tr {}_1X^l] = 0 \quad X \in GL_2(n), \text{ for } k, l.$

以下では上記予想に関する幾つかの部分的結果を述べたい.

Theorem 1 $X \in GL_2(n)$ とする. $tr {}_1X^k, k \geq n$ は $det {}_1X, tr {}_1X, \dots, tr {}_1X^{n-1}$ の多項式で書き下される.

証明. X は次の Cayley-Hamilton の類似をみたす [5]

$${}_1X^n - {}_1X^{n-1} d^1 + \dots + (-)^{n-1} {}_1X d^{n-1} + (-)^n det {}_1X \cdot 1 = 0 \quad (1.1)$$

ここで $d^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} det {}_1X_{i_1 \dots i_k}$ とし $X_{i_1 \dots i_k}$ は X の $i_1 \dots i_k$ 首座小行列とする. これより

$${}_1X^{n+m} = {}_1X^{n+m-1} d^1 - \dots - (-)^{n-1} {}_1X^{m+1} d^{n-1} - (-)^n {}_1X^m det {}_1X$$

従って次の Lemma を示せば十分である.

Lemma 2 $d^l, 1 \leq l \leq n-1$ は $tr {}_1X, \dots, tr {}_1X^{n-1}$ の多項式であらわせる.

(i) n に関する帰納法で示す. $n=2$ のとき $d^1 = tr {}_1X$ より Lemma は正しい. $k \leq n$ に関し Lemma 2 は成立しているとする. $X_{i_1 \dots i_k}$

に關し τ も Cayley-Hamilton の公式は成立してゐるから

$$k(-)^k \det_k X_{i_1 \dots i_k} = -tr_k X_{i_1 \dots i_k}^k + tr_k X_{i_1 \dots i_k}^{k-1} d_{i_1 \dots i_k}^1 - \dots - (-)^{k-1} tr_k X_{i_1 \dots i_k} d_{i_1 \dots i_k}^{k-1}$$

となる. $d_{i_1 \dots i_k}^k = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det_k (X_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k})$. 帰納法の仮定から

$$\det_k X_{i_1 \dots i_k} = F_k(tr_k X_{i_1 \dots i_k}, \dots, tr_k X_{i_1 \dots i_k}^k). \quad (1.2)$$

$X_{i_1 i_1}, i_1 < \dots < i_k$ が生成する代数と $X_{j_1 j_1}, j_1 < \dots < j_k$ が生成する代数が同型であることより F_k は $i_1 \dots i_k$ のとり方によらない.

$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ に対し $\binom{n}{k}$ 個のパラメータ $a_{i_1 \dots i_k}$ を用意する.

$$\tilde{X}_{ij} = \left(\prod_{J(i,j)} a_{i_1 \dots i_k} \right) X_{ij} \text{ とする. } \text{ここで } J(i,j) = \{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n \mid (i,j) \in \{\mu_1, \dots, \mu_k\}\}$$

とし $\prod_{J(i,j)}$ は $J(i,j)$ の積を意味する. $f = f(x_1, \dots, x_n)$ に対し

$\tilde{f} \in f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ で定義する. $tr_k X^{j_1} \dots tr_k X^{j_m}$ の任意の单项式

$$\in \pi_{\ell_1 \dots \ell_m} = f(\ell) X_{i_1 i_1} \dots X_{i_{\ell_1} i_{\ell_1}} \dots X_{j_1 j_1} \dots X_{j_{\ell_m} j_{\ell_m}} \text{ とする } \text{ここで } f(\ell) \text{ は } \ell \text{ の}$$

有理式. このとき

$$\tilde{\pi}_{\ell_1 \dots \ell_m} = \left(\prod_{J(i_1, i_1)} \dots \prod_{J(i_{\ell_1}, i_1)} \dots \prod_{J(j_1, j_1)} \dots \prod_{J(j_{\ell_m}, j_1)} a_{i_1 \dots i_k} \right) \pi_{\ell_1 \dots \ell_m}$$

となる.

Lemma 3 上記 $\tilde{\pi}_{\ell_1 \dots \ell_m}$ で $a_{\mu_1 \dots \mu_k}$ が係数となるような $\mu_1 < \dots < \mu_k$ が存在する.

$\therefore i_1, \dots, i_{\ell_1}, \dots, j_1, \dots, j_{\ell_m}$ を単調非減少になるようにならせ, 等しいものは同一視する. すると単調増加列 $\mu_1 < \dots < \mu_k, k \leq \ell$ を得る.

このとき $\mu_k < \mu_{k+1} < \dots < \mu_k \leq n$ なる $\mu_{k+1}, \dots, \mu_k$ に対し $X_{i_1 i_1}, \dots, X_{i_{\ell_1} i_{\ell_1}}, \dots, X_{j_1 j_1}, \dots, X_{j_{\ell_m} j_{\ell_m}}$ は X の $\mu_1 \dots \mu_k$ 首座小行列の成分になつてゐるから //

多項式 $F_k(t_1 X, \dots, t_k X^k)$ を考えその中の任意の単項式を π とおく.

Lemma 4 $\tilde{\pi}$ の中で $a_{\mu_1, \dots, \mu_k}^k$ が係数となっていていような単調増加列 $1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n$ は唯一つ存在する.

$\therefore \pi = f(i) x_{i_1 i_2} \dots x_{i_{l_1} i_1} \dots x_{i_{l_m} i_m} \dots x_{i_{l_m} i_m} \quad l_1 + \dots + l_m = k$ とする.

Lemma 3 より $\tilde{\pi}$ が係数として $a_{\mu_1, \dots, \mu_k}^k$ を含む $\mu_1 < \dots < \mu_k$ は存在する. $\therefore$ $F_k(t_1 X, \dots, t_k X^k)$ は任意の単調増加列 $\mu_1 < \dots < \mu_k$ に対し $F_k(t_1 X_{\mu_1, \dots, \mu_k}, \dots, t_k X_{\mu_1, \dots, \mu_k}^k)$ にあらわれる単項式を含む. 明らかに $\tilde{\pi}$ が $a_{\mu_1, \dots, \mu_k}^k$ を係数として持つことと π が $F_k(t_1 X_{\mu_1, \dots, \mu_k}, \dots, t_k X_{\mu_1, \dots, \mu_k}^k)$ のなかにあらわれる単項式であることは同値である.

(1.2) より $\det_k X_{\mu_1, \dots, \mu_k} = \tilde{F}(t_1 X_{\mu_1, \dots, \mu_k}, \dots, t_k X_{\mu_1, \dots, \mu_k}^k)$

この左辺は $a_{\mu_1, \dots, \mu_k}^k$ 以外に左側の係数を含まない. //

Lemma 3, 4 により

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \tilde{\det}_k X_{i_1, \dots, i_k} - F_k(t_1 X, \dots, t_k X^k) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}^k (\tilde{\det}_k X_{i_1, \dots, i_k} - \tilde{F}_k(t_1 X_{i_1, \dots, i_k}, \dots, t_k X_{i_1, \dots, i_k}^k) |_{a_{i_1, \dots, i_k} = 1}) = 0$$

$\binom{n}{k}$ 個の $1 \times \dots \times 1$ - $a_{i_1, \dots, i_k}$ を $\rightarrow 1$ とすると

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \det_k X_{i_1, \dots, i_k} - F_k(t_1 X, \dots, t_k X^k) = 0$$

これより Lemma 2 の証明が終り Th. 1 は示された. Q.E.D.

次に記号の定義をしよう. $f = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1 i_1} \dots x_{i_k i_k}$ とし整数の集合 $\{i_1, \dots, i_m\}$ に対し $f_{i_1, \dots, i_m}$ を

$$f_{j_1, \dots, j_m} = \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_k\} \\ = \{j_1, \dots, j_m\}}} a_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1 i'_1} \dots x_{i_k i'_k} \text{ とする. } \quad \text{ここで } \sum \text{ の和の意}$$

味は $\{i_1, \dots, i_k\}$ が整数の集合としてみたとき $\{j_1, \dots, j_m\}$ と一致している $i_1, \dots, i_k$ に関するすべての和ということ. 例えは $f = x_{12}x_{21} + x_{13}x_{11}^2x_{22} + 2x_{11}^3x_{21} + x_{11}^5$ としたとき $f_{12} = x_{12}x_{21} + 2x_{11}^3x_{21}$.

Proposition 5 $f \in A(GL_2(n))$ とする. n のとき $f=0$ と任意の $j_1 < \dots < j_m$ について $f_{j_1, \dots, j_m} = 0$ であることは同値.

証明. 集合 $C = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ に次のように順序を入れる.

$$(i, j) < (h, l) \Leftrightarrow i < h \text{ or } i = h \text{ かつ } j < l. \quad D = \{(i, i'), \dots, (i_k, i'_k) \mid k \in \mathbb{N}.$$

$$(i_s, i'_s) \in C\} \text{ とし } D \text{ に } < \text{ を拡張する. 任意の } ((i_1, i'_1), \dots, (i_k, i'_k)) < ((j_1, j'_1), \dots, (j_m, j'_m)) \Leftrightarrow k < m \text{ or } k = m \text{ かつ } (i_1, i'_1) < (j_1, j'_1) \text{ or } \dots \text{ or } k = m \text{ かつ } (i_1, i'_1) = (j_1, j'_1), \dots, (i_{k-1}, i'_{k-1}) = (j_{k-1}, j'_{k-1}), (i_k, i'_k) < (j_k, j'_k).$$

単項式 $u = x_{i_1 i'_1} \dots x_{i_k i'_k}$ に対し整数 $B(u) \in \mathbb{Z}$ $B(u) = \#\{(i_s, i'_s), (i_t, i'_t) \mid i_s < (>) i_t, i'_s < (>) i'_t\}$ で定義する. x_{ij} と x_{kl} について $i < (>) k$ かつ $j < (>) l$ であるとき x_{ij} は x_{kl} について bad であるという. 任意の $B(u)$ は u の中の bad な関係の個数. さらに $i < (>) j, j > (>) k$ のとき x_{ij} は x_{kl} について good であるといい $i = k$ かつ $j < (>) l$ or $i < (>) k$ かつ $j = l$ のとき x_{ij} は x_{kl} について neutral であるという [3].

$x_{i_1 i'_1} \dots x_{m_0 p_0} x_{p_1 q_1} \dots x_{i_k i'_k}$ の $x_{m_0 p_0}$ と $x_{p_1 q_1}$ の順序を交換すると

$$x_{i_1 i'_1} \dots x_{p_1 q_1} x_{m_0 p_0} \dots x_{i_k i'_k} + (t^{B(0,1)} - t^{-B(m,p)}) x_{i_1 i'_1} \dots x_{m_0 p_0} \dots x_{i_k i'_k} \text{ となる. } \quad \text{このとき次がなりたつ.}$$

Lemma 6 $U = X_{i_1 i'_1} \cdots X_{\mu \eta} X_{\rho \gamma} \cdots X_{i_s i'_s}$ とし $X_{\mu \eta}$ は $X_{\rho \gamma}$ と bad と
あるとする. このとき $B(U) > B(X_{i_1 i'_1} \cdots X_{\mu \eta} X_{\rho \gamma} \cdots X_{i_s i'_s})$.

∴) 後で示す定理のためには $X_{i_s i'_s}$ が $X_{\mu \eta}$ 及び $X_{\rho \gamma}$ と good とし
は bad の場合の示せば十分. $\mu < \rho$, $\eta < \gamma$ とし γ も一般性
は失わない. もし $X_{i_s i'_s}$ が $X_{\mu \eta}$ 及び $X_{\rho \gamma}$ に関し good ならば $X_{i_s i'_s}$
は $X_{\mu \eta}$, $X_{\rho \gamma}$ に関し good (Fig. 1). 次に $X_{i_s i'_s}$ が $X_{\mu \eta}$ に関し bad
で $X_{\rho \gamma}$ に関し good とあるとする. このとき次の 2つの場合
が考えられる. (i) $\mu < i_s < \rho$, $i'_s > \eta$ もしくは (ii) $\rho < i_s$, $\eta < i'_s < \gamma$.

(i) のとき $X_{i_s i'_s}$ は $X_{\rho \gamma}$ と good. (ii) のときは $X_{i_s i'_s}$ は $X_{\mu \eta}$ と good.

$X_{i_s i'_s}$ が $X_{\mu \eta}$ とは good で $X_{\rho \gamma}$ とは bad とあったとすると次の 2つ
の場合が考えられる. (iii) $i_s < \mu$, $\eta < i'_s < \gamma$ もしくは (iv) $\mu < i_s < \rho$,
 $i'_s < \eta$. (iii) のとき $X_{i_s i'_s}$ は $X_{\rho \gamma}$ と good, (iv) のとき $X_{i_s i'_s}$ は $X_{\mu \eta}$ と good
(Fig. 2).

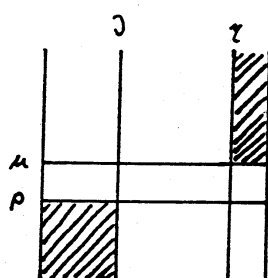


Fig. 1

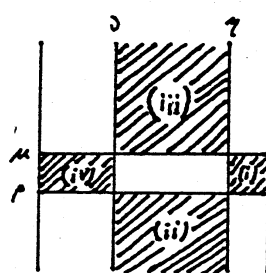


Fig. 2

$M = \max B(X_{j_1 j'_1} \cdots X_{j_s j'_s})$ とする 但し $X_{j_1 j'_1} \cdots X_{j_s j'_s}$ は f の中の単項
式とする. $U \in f$ の単項式とし $B(U) = L$ とあるとき U は class L
に属する という. $U = a_{j_1 j'_1 \cdots j_m j'_m} X_{j_1 j'_1} \cdots X_{j_m j'_m} \in \text{Class } M$ に属する f
の単項式であるとする. $Y = \{(h_1, h'_1), \dots, (h_s, h'_s)\} | a_{h_1 \cdots h'_s} X_{h_1 h'_1} \cdots X_{h_s h'_s}$

$\in \text{Class } M\}$ の中で $((j_1, j'_1), \dots, (j_m, j'_m))$ は μ に関し 極大であるとする。
 f の単項式の中で $x_{j_1 j'_1}, \dots, x_{j_m j'_m}$ の任意のなすベグえの積は
 $\text{Class } M$ に属する。 f の中に $x_{j_1 j'_1}, \dots, x_{j_m j'_m}$ のなすベグえの積があ
 ったらその積の順序を μ と同じにする。 このとき

$(a_{j_1 j'_1} + \dots) x_{j_1 j'_1} \dots x_{j_m j'_m} + \text{others}$ という形を得る。 others と
 は順序を μ にあわせるとき出てくる新しい単項式達である。
 Lemma 6 により others に属する単項式は $\text{Class } M-1$ 以下に属す
 る。 もし $(a_{j_1 j'_1} + \dots) = 0$ ならば同じ操作を $\gamma - ((j_1, j'_1), \dots, (j_m, j'_m))$
 の中の極大元に関し 2 行う。 この操作で $\text{Class } M$ の単項式がな
 くなったら同じ操作を $\text{Class } M-1$ 以下 2 行う。 $f \neq 0$ ならばこの
 過程で $f = (a_{e_1 e'_1} + \dots) x_{e_1 e'_1} \dots x_{e_p e'_p} + \text{others}$
 , $a_{e_1 e'_1} + \dots \neq 0$ かつ others の単項式は $\text{Class}(B(x_{e_1 e'_1} \dots x_{e_p e'_p}) - 1)$ 以下
 に属している, となる。 このとき $f_{e_1 \dots e'_p} \neq 0$ 。 逆は明か。

Theorem 7 $X \in GL_2(n)$ により $[tr_2 X^m, tr_2 X] = 0 \quad m > 1$.

証明 n に関する帰納法で示す。 簡単な計算により

$$[tr_2 X^2, tr_2 X] = 0 \quad X \in GL_2(3). \text{ Th. 1 より Th. 7 は } n=3 \text{ のとき正しい}$$

い。 $X \in GL_2(n)$ $n \leq n$ に関し Th. 7 は正しいとする。 $X \in GL_2(n+1)$
 とする。 $l < n$ とし $n > l+1$ とする このとき明かには

$$[tr_2 X^l, tr_2 X]_{i_1 \dots i_l} = 0. \text{ 一方 } n \leq l+1 \text{ とした } [tr_2 X^l, tr_2 X]_{i_1 \dots i_l}$$

$$= [tr_2 X^l_{i_1 \dots i_l}, tr_2 X_{i_1 \dots i_l}]_{i_1 \dots i_l} = 0. \text{ したがって } l < n \text{ に関し}$$

$$[tr_2 X^l, tr_2 X] = 0 \quad X \in GL_2(n+1) \text{ となる。}$$

$$h \leq n \text{ とする } [th_2 X^n, th_2 X]_{i_1 \dots i_h} = [th_2 X_{i_1 \dots i_h}^n, th_2 X_{i_1 \dots i_h}]_{i_1 \dots i_h} = 0.$$

$$\text{従って Prop 5. より } [th_2 X^n, th_2 X]_{i_1 \dots i_{n+1}} = 0 \text{ を示せばよい.}$$

$$X \in GL_2(n) \text{ とし } [th_2 X^{n-1}, th_2 X]_{i_1 \dots i_n} = \delta^{n-2} A_{n-2}^n + \dots + \delta^{-n+2} A_{-n+2}^n \text{ とする.}$$

$$X \in GL_2(3) \text{ に関し } [th_2 X^2, th_2 X] = \delta A_1^3 + \delta^{-1} A_{-1}^3 \text{ としたとき}$$

$$A_1^3 = A_{-1}^3 = 0 \text{ (後の example を見よ). } A_{n-2h}^n = 0 \quad h=1, \dots, n-1 \text{ と仮定す}$$

る. $\equiv$ で量子力学の用語を借用しよう. 単項式 $x_{i_1 i'_1} \dots x_{i_n i'_n}$

に対し単項式: $-(x_{i_1 i'_1}, \dots, x_{i_n i'_n} \text{ のなすベクトルの積}) \in x_{i_1 i'_1} \dots x_{i_n i'_n}$

の消滅対という. 例えば $x_{12} x_{23} x_{31}$ の消滅対は $-x_{23} x_{31} x_{12}$,

$-x_{31} x_{12} x_{23}$, $-x_{12} x_{31} x_{23}$, $-x_{23} x_{12} x_{31}$, $-x_{31} x_{23} x_{12}$, $-x_{12} x_{23} x_{31}$

である.

$$\begin{aligned} A_{n-2h}^n &= \sum_{\substack{\{i_2, \dots, i_{n-1}\} \\ = \{1, \dots, h-1, h+2, \dots, n\}}} \sum_{s=1}^{n-1} (\delta^{\theta(i_{s+1}, h+1)} - \delta^{-\theta(i_s, h+1)}) x_{h i_2} \dots x_{i_s h+1} x_{h+1 i_{s+1}} \dots x_{i_{n-1} h} \\ &+ \dots + \sum_{\substack{\{i_2, \dots, i_{n-1}\} \\ = \{1, \dots, h-1, h+1, \dots, n-1\}}} \sum_{s=1}^{n-1} (\delta^{\theta(i_{s+1}, n)} - \delta^{-\theta(i_s, n)}) x_{h i_2} \dots x_{i_s n} x_{n i_{s+1}} \dots x_{i_{n-1} h} + \\ &\sum_{\substack{\{i_2, \dots, i_{n-1}\} \\ = \{2, \dots, h-1, h+1, \dots, n\}}} \sum_{s=1}^{n-1} (\delta^{\theta(i_{s+1}, 1)} - \delta^{-\theta(i_s, 1)}) x_{h+1 i_2} \dots x_{i_s 1} x_{1 i_{s+1}} \dots x_{i_{n-1} h+1} + \dots + \\ &\sum_{\substack{\{i_2, \dots, i_{n-1}\} \\ = \{1, \dots, h-1, h+2, \dots, n\}}} \sum_{s=1}^{n-1} (\delta^{\theta(i_{s+1}, h)} - \delta^{-\theta(i_s, h)}) x_{h+1 i_2} \dots x_{i_s h} x_{h i_{s+1}} \dots x_{i_{n-1} h+1} \end{aligned}$$

$$\text{で } A_{n-2h}^n = 0 \text{ となる}$$

$$A_{n-2h}^n = (\delta - \delta^{-1}) \sum_{\substack{\{i_2, \dots, i_n\} = \{1, \dots, h-1, h+1, \dots, n\} \\ \{j_2, \dots, j_n\} = \{1, \dots, h, h+2, \dots, n\}}} (x_{h i_2} \dots x_{i_n h} - x_{h+1 j_2} \dots x_{j_n h+1})$$

$$+ (\delta - \delta^{-1}) \sum_{\substack{\{i_2, \dots, i_n\} = \{1, \dots, k, k+2, \dots, n\} \\ \{j_2, \dots, j_n\} = \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}}} (\chi_{k+1 i_2} \dots \chi_{i_n k+1} - \chi_{k j_2} \dots \chi_{j_n k})$$

で $-\chi_{k+1 j_2} \dots \chi_{j_n k+1}$, $\chi_{k j_2} \dots \chi_{j_n k}$ は夫々 $\chi_{k i_2} \dots \chi_{i_n k}$ と $\chi_{k+1 i_2} \dots \chi_{i_n k+1}$ の消滅対. $\chi_{k i_2} \dots \chi_{i_n k}$ と $\chi_{k+1 i_2} \dots \chi_{i_n k+1} \in \mathcal{S}$ の

消滅対の積の順序にあわせると $A_{n-2k}^n = (\delta - \delta^{-1})^2 \sum \pm (\text{単項式})$

となる. $A_{n-2k}^n = 0$ よりこれは

$$A_{n-2k}^n = (\delta - \delta^{-1})^2 \sum (\text{単項式} + \mathcal{S} \text{の消滅対})$$

とあらわされる. 以下単項式の積の順序を消滅対のそれにあわせるという操作を繰り返していくと常に

$$A_{n-2k}^n = (\delta - \delta^{-1})^k \sum (\text{単項式} + \mathcal{S} \text{の消滅対}) \quad (1.3)$$

という形になる.

$$[\text{tr}_\delta X^n, \text{tr}_\delta X]_{1, 2, \dots, n+1} = \delta^n A_{n-1}^{n+1} + \dots + \delta^{-n+1} A_{-n+1}^{n+1} \quad X \in GL_\delta(n+1)$$

といたとき

$$A_{n+1-2k}^{n+1} = (\delta - \delta^{-1}) \sum_{\substack{\{i_2, \dots, i_{n+1}\} = \{1, \dots, k+1, k+1, \dots, n+1\} \\ \{j_2, \dots, j_{n+1}\} = \{1, \dots, k, k+1, \dots, n+1\}}} (\chi_{k+1 i_2} \dots \chi_{i_{n+1} k+1} - \chi_{k j_2} \dots \chi_{j_{n+1} k})$$

$$+ (\delta - \delta^{-1}) \sum_{\substack{\{i_2, \dots, i_{n+1}\} = \{1, \dots, k, k+2, \dots, n+1\} \\ \{j_2, \dots, j_{n+1}\} = \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n+1\}}} (\chi_{k+1 i_2} \dots \chi_{i_{n+1} k+1} - \chi_{k j_2} \dots \chi_{j_{n+1} k})$$

$-\chi_{k+1 j_2} \dots \chi_{j_{n+1} k+1}$, $-\chi_{k j_2} \dots \chi_{j_{n+1} k}$ は夫々 $\chi_{k+1 i_2} \dots \chi_{i_{n+1} k+1}$, $\chi_{k+1 i_2} \dots \chi_{i_{n+1} k+1}$ の消滅対, となることは見易い. $\chi_{k i_2} \dots \chi_{i_{n+1} k}$

$x_{n+1,2} \cdots x_{i_{n+1,k}+1}$ をまゝの消滅対の順序にあわせると $A_{n+1-2k}^{n+1} = (q-q^{-1})^2 \sum \pm (\text{単項式})$ となる. さて $x_{k,2} \cdots x_{\mu,0} x_{p,2} \cdots x_{i_{n+1,k}}$ をその消滅対の積の順序にあわせるため $x_{\mu,0}$ と $x_{p,q}$ を入れかえるこのとき

$$x_{k,2} \cdots x_{p,q} x_{\mu,0} \cdots x_{i_{n+1,k}} + \underbrace{(q^{\theta(0,q)} - q^{\theta(\mu,p)}) x_{k,2} \cdots x_{\mu,q} x_{p,0} \cdots x_{i_{n+1,k}}}_{(1)}$$

となる. 下線部(1)の係数はとなりあう4つの数字 $\mu, 0, p, q$ のみによってきまり n が $n+1$ に変わった特殊性はない. 又(1)の添字のなす方にも n が $n+1$ に変わった特殊性はない. 従って

$$A_{n+1-2k}^{n+1} = (q-q^{-1})^2 \sum (\text{単項式} + \text{その消滅対})$$

とかける. さらに上記単項式とその消滅対の順序にあわせる際生じる新しい項の係数及び添字のなす方の変化もいれかわる2つの生成元の4つの添字にしかよらず n が $n+1$ に変わった特殊性はない. 従って A_{n+1-2k}^{n+1} は A_{n-2k}^n の性質(1.3)をひきつぐ. A_{n+1-2k}^{n+1} が $(q-q^{-1})^e \sum (\text{単項式} + \text{その消滅対})$ という形になったる単項式の順序と消滅対にあわせ $A_{n+1-2k}^{n+1} = (q-q^{-1})^{e+1} \sum (\text{単項式} + \text{その消滅対})$ という形にする. これをつづけていくと Lemma 6 により $\exists e'$ が存在して

$$A_{n+1-2k}^{n+1} = (q-q^{-1})^{e'} \sum (\text{単項式} + \text{その消滅対}) \quad (1.4)$$

但し和の中単項式の B の値は 0, となる. このとき単項式 + その消滅対 = 0 $\therefore A_{n+1-2k}^{n+1} = 0 \therefore [t_k X, t_k X]_{i_2 \cdots n+1} = 0$. Q.E.D.

Example. For $X \in GL_q(3)$, $[tr_q X^2, tr_q X]_{123} = qA_1^3 + q^{-1}A_{-1}^3$,

$$\begin{aligned} A_1^3 &= (q - q^{-1})\{(x_{13}x_{32}x_{21} - x_{21}x_{13}x_{32}) + (x_{12}x_{23}x_{31} - x_{23}x_{31}x_{12})\} \\ &= (q - q^{-1})^2(x_{13}x_{22}x_{31} - x_{13}x_{31}x_{22}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{-1}^3 &= (q - q^{-1})\{(x_{23}x_{31}x_{12} - x_{31}x_{12}x_{23}) + (x_{21}x_{13}x_{32} - x_{32}x_{21}x_{13})\} \\ &= (q - q^{-1})^2(x_{22}x_{31}x_{13} - x_{31}x_{22}x_{13}) = 0. \end{aligned}$$

For $X \in GL_q(4)$, $[tr_q X^3, tr_q X]_{1234} = q^2A_2^4 + A_0^4 + q^{-2}A_{-2}^4$,

$$\begin{aligned} A_2^4 &= (q - q^{-1})\{(x_{14}x_{42}x_{23}x_{31} - x_{23}x_{31}x_{14}x_{42}) + (x_{12}x_{24}x_{43}x_{31} - x_{24}x_{43}x_{31}x_{12}) + (x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} - x_{23}x_{34}x_{41}x_{12}) + \\ &\quad (x_{14}x_{43}x_{32}x_{21} - x_{21}x_{14}x_{43}x_{32}) + (x_{13}x_{34}x_{42}x_{21} - x_{21}x_{13}x_{34}x_{42}) + (x_{13}x_{32}x_{24}x_{41} - x_{24}x_{41}x_{13}x_{32})\} \\ &= (q - q^{-1})^2\{(x_{24}x_{13}x_{42}x_{31} - x_{13}x_{31}x_{24}x_{42}) + (x_{14}x_{22}x_{43}x_{31} - x_{14}x_{43}x_{31}x_{22}) + (x_{23}x_{14}x_{32}x_{41} - x_{14}x_{41}x_{23}x_{32}) + \\ &\quad (x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} - x_{13}x_{34}x_{41}x_{22}) + (x_{14}x_{23}x_{41}x_{32} - x_{23}x_{41}x_{32}x_{14})\} \\ &= (q - q^{-1})^3\{(x_{14}x_{23}x_{42}x_{31} - x_{23}x_{14}x_{31}x_{42}) + (x_{13}x_{24}x_{32}x_{41} - x_{24}x_{13}x_{41}x_{32})\} \\ &= (q - q^{-1})^4(x_{14}x_{23}x_{32}x_{41} - x_{23}x_{14}x_{41}x_{32}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0^4 &= (q - q^{-1})\{(x_{24}x_{41}x_{13}x_{32} - x_{32}x_{24}x_{41}x_{13}) + (x_{21}x_{14}x_{43}x_{32} - x_{32}x_{21}x_{14}x_{43}) + (x_{21}x_{13}x_{34}x_{42} - x_{34}x_{42}x_{21}x_{13}) + \\ &\quad (x_{24}x_{43}x_{31}x_{12} - x_{31}x_{12}x_{24}x_{43}) + (x_{23}x_{34}x_{41}x_{12} - x_{34}x_{41}x_{12}x_{23}) + (x_{23}x_{31}x_{14}x_{42} - x_{31}x_{14}x_{42}x_{23}) + \\ &\quad (x_{24}x_{41}x_{13}x_{32} - x_{32}x_{24}x_{41}x_{13}) + (x_{23}x_{31}x_{14}x_{42} - x_{31}x_{14}x_{42}x_{23})\} \\ &= (q - q^{-1})^2\{(x_{22}x_{31}x_{14}x_{43} - x_{31}x_{22}x_{14}x_{43}) + (x_{34}x_{22}x_{41}x_{13} - x_{34}x_{41}x_{22}x_{13}) + (x_{24}x_{31}x_{42}x_{13} - x_{24}x_{31}x_{42}x_{13}) + \\ &\quad (x_{21}x_{14}x_{33}x_{42} - x_{21}x_{14}x_{42}x_{33}) + (x_{24}x_{33}x_{41}x_{12} - x_{24}x_{41}x_{33}x_{12})\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{-2}^4 &= (q - q^{-1})\{(x_{34}x_{42}x_{21}x_{13} - x_{42}x_{21}x_{13}x_{34}) + (x_{32}x_{24}x_{41}x_{13} - x_{41}x_{13}x_{32}x_{24}) + (x_{32}x_{21}x_{14}x_{43} - x_{43}x_{32}x_{21}x_{14}) + \\ &\quad (x_{34}x_{41}x_{12}x_{23} - x_{41}x_{12}x_{23}x_{34}) + (x_{31}x_{14}x_{42}x_{23} - x_{42}x_{23}x_{31}x_{14}) + (x_{31}x_{12}x_{24}x_{43} - x_{43}x_{31}x_{12}x_{24})\} \\ &= (q - q^{-1})^2\{(x_{33}x_{42}x_{21}x_{14} - x_{42}x_{21}x_{33}x_{14}) + (x_{32}x_{23}x_{41}x_{14} - x_{32}x_{41}x_{23}x_{14}) + (x_{32}x_{41}x_{23}x_{14} - x_{41}x_{32}x_{14}x_{23}) + \\ &\quad (x_{33}x_{41}x_{12}x_{24} - x_{41}x_{12}x_{33}x_{24}) + (x_{31}x_{13}x_{42}x_{24} - x_{42}x_{31}x_{24}x_{13})\} \\ &= (q - q^{-1})^3\{(x_{32}x_{41}x_{24}x_{13} - x_{41}x_{32}x_{13}x_{24}) + (x_{31}x_{42}x_{14}x_{23} - x_{42}x_{31}x_{23}x_{14})\} \\ &= (q - q^{-1})^4(x_{32}x_{41}x_{14}x_{23} - x_{41}x_{32}x_{23}x_{14}) = 0. \end{aligned}$$

Ref.

- [1] Ikeda K., Lett. Math. Phys. 23(1991) 121
- [2] ———, Phys. Lett. A 183(1993) 43
- [3] KuperSchmidt B., Quasiclassical limit of quantum matrix group
in "M. Francaviglia and D. Holm (eds) Mechanics Analysis and
Geometry ; 200 years after Lagrange," Elsevier, Amsterdam.
- [4] ———, J. Phys. A 25(1992) L915
- [5] Zang J., The quantum Cayley-Hamilton theorem. Preprint.