

Record statistics for the Weibull distribution

筑波大・教育 諏佐 洋一 (Yoichi Susa)
筑波大・数理 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1 はじめに

最近, 数理統計学の分野では, 独立同分布に従う確率変数から得られる記録値, 記録時刻, 記録時刻の差などの分布や, 記録値の予測問題についての研究が盛んに行われている (Arnold *et.al* [ArnBaN98], Hida and Akahira [HiAk02], 竹内・藤野 [TF88]). また, 記録値と記録時刻に含まれる情報量についても論じられている (Hofmann and Nagaraja [HoN03], Yamamoto and Akahira [YAk04]).

本論では, 第3節において, [ArnBaN98], [TF88] に従って, 記録数の正確な分布, 記録数の分布の近似について論じる. 第4節では, 第3節の応用として, イチローが新記録を達成した年間最多安打数等の実際の米国のメジャーリーグのデータから得られる記録数にもとづいて, 過去104年間における打者の競技力の水準に関する仮説検定を行い, その結論を得る. そして, 第5.1節では, [YAk04] に従って, 連続型分布から得られた無作為標本にもとづく上位(下位)の記録値, 記録時刻, 最大(最小)の記録値のもつ Kullback-Leibler 情報量について論じる. その上で, 第5.2節において, [YAk04] で論じられている指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$ を特別な場合として含む Weibull 分布 $W(\alpha, \lambda)$ の場合を論じ, 実際に母数 α, λ を変化させて K-L 情報量の値を数値的に求め, その情報量から記録データを通してその分布の性質について考察する.

2 設定

いま, 確率変数 $X_1, \dots, X_n$ をたがいに独立にいずれも確率密度関数 (probability density function 略して p.d.f.) $f(x, \theta)$, 累積分布関数 (cumulative distribution function 略して c.d.f.) $F(x, \theta)$ をもつ分布に従うとする. ただし, $\theta \in \Theta$ とし, Θ を $\mathbf{R}^1$ の開区間とする. 上位の記録時刻 (upper record time) T_m , 上位の記録値 (upper record value) R_m を

$$T_1 := 1, T_m := \min\{j | j > T_{m-1}, X_j > X_{T_{m-1}}\} \quad (m = 2, \dots, n),$$

$$R_m := X_{T_m} \quad (m = 1, \dots, n)$$

と定義する. さらに, 下位の (lower) 記録時刻, 記録値も同様に

$$T_1 := 1, T_m := \min\{j | j > T_{m-1}, X_j < X_{T_{m-1}}\} \quad (m = 2, \dots, n),$$

$$R_m := X_{T_m} \quad (m = 1, \dots, n)$$

と定義する. また, $X_1, \dots, X_n$ 間の記録値の数 (記録数) を N_n と定義する. ただし, X_1 はいつも記録値となるから, $N_1 = 1$ とする.

次に, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ について, $f(\cdot, \theta_2)$ に対して $f(\cdot, \theta_1)$ の識別をするために, Kullback-Leibler (K-L) 情報量を

$$I(\theta_1 : \theta_2) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta_1) \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} dx$$

によって定義する. ただし, $0/0 = 1$, $0 \log 0 = 0$, $a \log(a/0) = \infty$ ($a > 0$) とする. この K-L 情報量は, $f(\cdot, \theta_1)$ と $f(\cdot, \theta_2)$ の相違を表す尺度であり, また標本が p.d.f. $f(x, \theta_1)$ をもつ分布から得られたと仮定するとき, その標本が p.d.f. $f(x, \theta_2)$ をもつ分布から得られたものでない程度の度合いを表す尺度とも考えられる. ここで, $I(\theta_1 : \theta_2) \geq 0$ であり, 等号成立は $f(x, \theta_1) = f(x, \theta_2)$ a.e. のときに限る. そして, $I(\theta_1 : \theta_2) \neq I(\theta_2 : \theta_1)$ となり, 非対称であるから, $I(\cdot : \cdot)$ は距離ではない.

3 記録数および記録時刻の分布

本節では, [ArnBaN98], [TF88] に従って, 記録数 N_n の正確な分布と, 近似による分布を求める. また, 記録数の分布から, 記録時刻 T_m の分布についても考察する.

3.1 記録数の正確な分布

いま, 上位の記録値に関して, 確率変数 I_n を

$$I_1 := 1, I_n = I[X_n > \max\{X_1, \dots, X_{n-1}\}]$$

と定義する. ただし, $I[\cdot]$ は定義関数とする. 同様に, 下位の記録値に関して,

$$I_1 := 1, I_n = I[X_n < \min\{X_1, \dots, X_{n-1}\}]$$

と定義する. これは, X_n が記録値であるとき, $I_n = 1$ になることを意味している.

次に, $I_1, \dots, I_n$ に関して, 同時分布を求めるために, $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_m$ ($m \in \mathbf{N}$) の自然数の列に対して, $j_1, j_2, \dots, j_m$ のときの観測値が記録値となる確率を考える. このとき, 一般性を失うことなく, 任意の X_i は一様分布 $U(0, 1)$ に従うと仮定してよい. そこで, 上位の記録値に関して, $m = 1$ のとき

$$P(I_{j_1} = 1) = P(I_1 = 1) = 1 = \frac{1}{j_1} \quad (3.1)$$

となる. また, 各 $m \geq 2$ について,

$$\begin{aligned} & P(I_{j_1} = 1, I_{j_2} = 1, \dots, I_{j_m} = 1) \\ &= \int \dots \int_{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1} P(I_{j_1} = 1, I_{j_2} = 1, \dots, I_{j_m} = 1 | X_{j_1} = x_1, \dots, X_{j_m} = x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &= \int \dots \int_{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1} x_2^{j_2-2} x_3^{j_3-j_2-1} \dots x_m^{j_m-j_{m-1}-1} dx_1 \dots dx_m \\ &= \frac{1}{j_1} \frac{1}{j_2} \frac{1}{j_3} \dots \frac{1}{j_m} \end{aligned} \quad (3.2)$$

となる. ここで, (3.2) の等号が成り立つことを数学的帰納法によって示す.

(i) $m = 2$ のとき

$$\begin{aligned} \int_{0 < x_1 < x_2 < 1} \cdots \int x_2^{j_2-2} dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \int_{x_1}^1 x_2^{j_2-2} dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{j_2-1} \int_0^1 (1 - x_1^{j_2-1}) dx_1 \\ &= \frac{1}{j_1} \frac{1}{j_2} \end{aligned}$$

となるから, $m=2$ のとき, (3.2) は成り立つ.

(ii) $m = k - 1$ のとき, (3.2) の等式が成り立つと仮定する. そこで, $m = k$ のとき, $x'_i = x_i/x_k$ ($i = 1, \dots, k-1$) と変数変換すると

$$\begin{aligned} &\int_{0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 1} x_2^{j_2-2} x_3^{j_3-j_2-1} \cdots x_k^{j_k-j_{k-1}-1} dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_0^1 \int_{0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_{k-1} < 1} (x_k x'_2)^{j_2-2} (x_k x'_3)^{j_3-j_2-1} \cdots (x_k x'_{k-1})^{j_{k-1}-j_{k-2}-1} \\ &\quad x_k^{j_k-j_{k-1}-1} x_k^{k-1} dx'_1 \cdots dx'_{k-1} dx_k \\ &= \int_{0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_{k-1} < 1} x_2'^{j_2-2} x_3'^{j_3-j_2-1} \cdots x_{k-1}'^{j_{k-1}-j_{k-2}-1} dx'_1 \cdots dx'_{k-1} \int_0^1 x_k^{j_k-1} dx_k \\ &= \frac{1}{j_1} \frac{1}{j_2} \frac{1}{j_3} \cdots \frac{1}{j_{m-1}} \frac{1}{j_m} \end{aligned}$$

となるから, $m = k$ のとき (3.2) は成り立つ. よって, (i), (ii) より $m \geq 2$ において等式 (3.2) が成り立つ.

いま, (3.1), (3.2) から, $I_{j_1}, \dots, I_{j_m}$ はたがいに独立で, 各 I_j は確率

$$P(I_j = 1) = \frac{1}{j}, \quad P(I_j = 0) = 1 - \frac{1}{j} = \frac{j-1}{j} \quad (3.3)$$

をもつベルヌーイ分布 $\text{Ber}(1/j)$ に従うことがわかる. 下位の記録値に関しても同様に, $m = 1$ のとき,

$$P(I_{j_1}) = \frac{1}{j_1} \quad (3.4)$$

となり, $m \geq 2$ において

$$\begin{aligned} &P(I_{j_1} = 1, I_{j_2} = 1, \dots, I_{j_m} = 1) \\ &= \int_{0 < x_m < \cdots < x_2 < x_1 < 1} (1 - x_2)^{j_2-2} (1 - x_3)^{j_3-j_2-1} \cdots (1 - x_m)^{j_m-j_{m-1}-1} dx_1 \cdots dx_m \\ &= \frac{1}{j_1} \frac{1}{j_2} \frac{1}{j_3} \cdots \frac{1}{j_m} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となるから, (3.4), (3.5) より, 下位の記録値の場合にも $I_{j_1}, \dots, I_{j_m}$ はたがいに独立で, 各 I_j は確率 (3.3) をもつベルヌーイ分布 $\text{Ber}(1/j)$ に従う. このとき, 各 I_j の平均と分散は, それぞれ

$$E(I_j) = P(I_j = 1) = \frac{1}{j}, \quad (3.6)$$

$$V(I_j) = \frac{1}{j} - \left(\frac{1}{j}\right)^2 = \frac{j-1}{j^2} \quad (3.7)$$

となる. また, 記録数 N_n は I_j ($j = 1, \dots, n$) を用いて

$$N_n = \sum_{j=1}^n I_j$$

と表せるから, 記録数 N_n の平均と分散は, (3.6), (3.7) から

$$E(N_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \quad (3.8)$$

$$V(N_n) = \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{j^2} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{j}\right) \quad (3.9)$$

になる.

次に, 記録数 N_n の正確な分布を求める. いま, N_n の確率量関数 (probability mass function 略して p.m.f.) を

$$f_{N_n}(k) := P\{N_n = k\}$$

とおくと, 事象について

$$\{N_n = k\} = \{N_{n-1} = k-1, I_n = 1\} \cup \{N_{n-1} = k, I_n = 0\}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f_{N_1}(1) &= 1, \\ f_{N_n}(k) &= P\{N_{n-1} = k-1, I_n = 1\} + P\{N_{n-1} = k, I_n = 0\} \\ &= P\{I_n = 1 | N_{n-1} = k-1\}P\{N_{n-1} = k-1\} + P\{I_n = 0 | N_{n-1} = k\}P\{N_{n-1} = k\} \\ &= \frac{1}{n}f_{N_{n-1}}(k-1) + \frac{n-1}{n}f_{N_{n-1}}(k) \quad (3.10) \\ &\quad (k = 1, \dots, n; n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

という関係が成り立つ. ただし,

$$f_{N_n}(0) = f_{N_n}(n+1) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする. よって, N_n の正確な分布は (3.10) から再帰的に求められる ([TF88]).

また, (3.10) で定まる分布は, 確率母関数 (probability generating function 略して p.g.f.) を用いても得られる. 実際, まず p.g.f. は

$$\pi_{N_n}(s) := E(s^{N_n}) = \prod_{j=1}^n E(s^{I_j}) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{s}{j} + \frac{j-1}{j} \right) = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n (s+j-1) \quad (3.11)$$

になり, そして

$$\pi_{N_n}(s) = \sum_{l=1}^n P\{N_n = l\} s^l = \sum_{l=1}^{k-1} P\{N_n = l\} s^l + P\{N_n = k\} s^k + \sum_{l=k+1}^n P\{N_n = l\} s^l \quad (3.12)$$

となる. (3.11), (3.12) より, 等式

$$\prod_{k=1}^n (s+k-1) = s(s+1) \cdots (s+n-1) = \sum_{k=1}^n S_n^k \cdot s^k$$

で定義される第 1 種のスターリング数 S_n^k を用いると

$$\begin{aligned} P\{N_n = k\} &= \text{coefficient of } s^k \text{ in } \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n (s+j-1) \\ &= \frac{S_n^k}{n!} \end{aligned} \quad (3.13)$$

と表せる ([ArnBaN98]). (3.10), (3.13) より, 記録数 N_n の分布は母数 θ に無関係であるから, 記録数 N_n は補助統計量になる.

3.2 記録数の分布の近似

観測数 n が十分大きいときに, 記録数 N_n の分布の近似を考える. まず, N_n の平均 (3.8), 分散 (3.9) は, n が大きいとき,

$$E(N_n) \approx \log n + \gamma =: m_n, \quad V(N_n) \approx \log n + \gamma - \frac{\pi^2}{6} =: s_n^2 \quad (3.14)$$

となる. ただし, γ はオイラーの定数で,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right\} = 0.5772 \cdots$$

である. したがって, 例えば, 観測数 n が 1000 のときに記録数の平均は約 7.5 で小さいことがわかる.

次に, N_n の分布の近似を中心極限定理を用いて考えるが, いまの場合, $I_1, \dots, I_n$ は独立であるが, 同分布でない場合の次の定理を用いる (西尾 [Ni78]).

定理 3.1 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ を独立な確率変数列とし, 各 X_j の平均を μ_j , 分散を σ_j^2 とし, $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$ とする. ある正数 δ について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n E[|X_j - \mu_j|^{2+\delta}] = 0 \quad (3.15)$$

を満たすとする. このとき

$$\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \mu_j)}{s_n}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数に法則収束する.

さて, 確率変数 I_j ($j = 1, \dots, n$) はたがいに独立で $N_n = \sum_{j=1}^n I_j$ である. ここで, $\delta = 1$ とすると, (3.14) より

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^n E \left[\left| I_j - \frac{1}{j} \right|^3 \right]}{s_n^3} &= \frac{\sum_{j=1}^n E \left[\left| I_j - \frac{1}{j} \right|^3 \right]}{(s_n^2)^{3/2}} \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^n E [|I_j|^3]}{(s_n^2)^{3/2}} \\ &= O \left(\frac{1}{(\log n)^{1/2}} \right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となり, 条件 (3.15) を満たすから, 定理 3.1 より,

$$\frac{N_n - E(N_n)}{\sqrt{V(N_n)}} = \frac{N_n - m_n}{\sqrt{s_n^2}} \xrightarrow{L} Z \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる. ただし, Z は $N(0, 1)$ に従う確率変数とする. すなわち, N_n は漸近的に正規分布 $N(m_n, s_n^2)$ に従う.

いま, N_n の正確な分布と, 極限分布における平均, 分散, 上側 5% 点をそれぞれ表 3.1, 表 3.2 に示す. それらの表から, n が 20 以上であればその近似は良さそうである. なお, 正確な分布の上側 $100\alpha\%$ 点は, $P\{N_n \geq r^*\} \leq \alpha$ をみたす最小の自然数, 極限分布による上側 $100\alpha\%$ 点は, 連続補正を行い, u_α を標準正規分布 $N(0, 1)$ の上側 $100\alpha\%$ として,

$$\tilde{r}_n^* = \log n + \gamma + u_\alpha \sqrt{\log n + \gamma - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

で求めることができる. なお, 数値計算は極限分布による方が正確な分布より容易である.

表 3.1 : 正確な分布による n 回観測したときの記録数 N_n の平均と分散, および上側 5% 点 r_n^*

n	$E(N_n)$	$V(N_n)$	r_n^*
5	2.283	0.820	5
10	2.929	1.379	6
15	3.318	1.738	7
20	3.598	2.002	7
25	3.816	2.210	7
30	3.995	2.383	8
50	4.499	2.874	8
75	4.901	3.270	9
100	5.187	3.552	9

表 3.2 : 極限分布による n 回観測したときの記録数 N_n の平均と分散, および上側 5% 点 $\tilde{r}_n^*$

n	$E(N_n)$	$V(N_n)$	$\tilde{r}_n^*$
5	2.187	0.542	3.897
10	2.880	1.235	5.208
15	3.285	1.640	5.892
20	3.573	1.928	6.357
25	3.796	2.151	6.709
30	3.978	2.333	6.991
50	4.489	2.844	7.763
75	4.895	3.250	8.360
100	5.182	3.537	8.776

3.3 記録時刻の分布

次に, 記録数 N_n の分布から記録時刻 T_m の分布を求める. いま, T_m の p.m.f. を

$$f_{T_m}(n) := P\{T_m = n\}$$

とおくと, 事象について

$$\{T_m = n\} = \{N_n = m, N_{n-1} = m-1\} = \{I_n = 1, N_{n-1} = m-1\}$$

であり, I_n と N_{n-1} は独立であるから,

$$\begin{aligned} f_{T_1}(1) &= 1, \\ f_{T_m}(n) &= P\{I_n = 1, N_{n-1} = m-1\} \\ &= \frac{1}{n} \cdot f_{N_{n-1}}(m-1) \quad (m = 2, 3, \dots, n; n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3.17)$$

という関係が成り立ち, (3.10) から再帰的に求められる. また, (3.17) は (3.13) より第 1 種のスターリング数を用いて

$$P\{T_m = n\} = \frac{1}{n} \frac{S_{n-1}^{m-1}}{(n-1)!} = \frac{S_{n-1}^{m-1}}{n!}$$

と表せる. しかし, m が大きくなるにつれて, T_m も増加していくため, 記録時刻 T_m の平均は $E(T_m) = \infty$ となってしまう.

また, 記録時刻 $\mathbf{T} := (T_1, \dots, T_m)$ の同時 p.m.f. $f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t})$ は, 自然数 $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_m$ ($m \in \mathbf{N}$) に対して

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) &:= P\{T_1 = n_1, T_2 = n_2, \dots, T_m = n_m\} \\ &= P\{I_{n_1} = 1, I_2 = 0, \dots, I_{n_2-1} = 0, I_{n_2} = 1, \dots, I_{n_m} = 1\} \\ &= \frac{1}{(n_2-1)(n_3-1)\dots(n_m-1)n_m} \end{aligned} \quad (3.18)$$

となる. ただし, $\mathbf{t} := (n_1, \dots, n_m)$ とする. さらに, (3.18) から $\mathbf{T}$ の分布も記録数 N_n の分布と同様, 母数 θ に無関係であるから, 記録時刻 $\mathbf{T}$ は補助統計量になる.

4 記録数にもとづく仮説検定の応用例

本節では, 前節で求めた記録数 N_n の分布をもとに, 実際のデータにもとづいて仮説検定問題を考える. 実際の記録データとして, 米国のメジャーリーグの1901年から2004年までの104年間における年間最高安打数と年間最高本塁打数を取り上げ, 野球における打者の競技水準について考察する.

まず, データ数 $n = 104$ のときの記録数 N_n の p.m.f. $f_{N_n}(k)$ は, (3.10) より表 4.1 のようになり, 極限分布と比較すると図 4.1 のようになる. また, (3.8) より記録数の平均 $E(N_n) = 5.226$ であり, (3.14) より極限分布による平均は 5.222 であるから, 2 つの分布は近いものと考えられる.

表 4.1 : 記録数 N_n の p.m.f. $f_{N_n}(k)$ ($n = 104$)

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_{N_{104}}(k)$	0	0.009	0.050	0.122	0.190	0.210	0.178	0.120
	8	9	10	11	12	13	...	104
	0.067	0.032	0.013	0.004	0.001	0.000	...	0.000

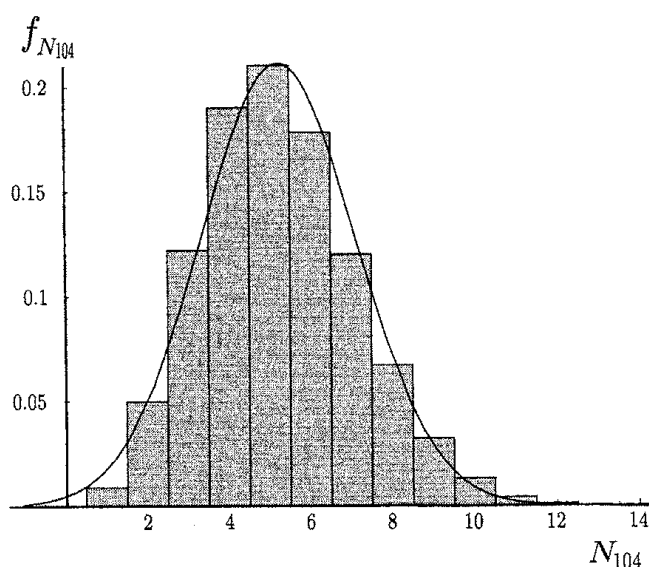


図 4.1 : 記録数 N_{104} の p.m.f. $f_{N_{104}}$ およびその極限分布 (曲線)

(i) メジャーリーグの年間最多安打数にもとづく競技力に関する検定

メジャーリーグの年間最多安打数の記録値は表 4.2 のようになり, 記録数は 4 である

([I05]). この値は平均 $E(N_{104}) = 5.226$, 極限分布による平均 5.222 よりも少ない値になっている. そこで,

仮説 H : 「104 年間に於いて打者の競技力の水準に变化がない」

対立仮説 K : 「104 年間に於いて打者の競技力の水準が退歩している」

の有意水準 0.10 の検定を行う.

いま, $n = 104$ のときの N_n の分布の下側 10% 点は表 4.1 より 2 であり, また, その極限分布による下側 10% 点は

$$\log n + \gamma - u_\alpha \sqrt{\log n + \gamma - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}}$$

より, 2.298 となる. このとき, $N_{104} = 4 > 2$ (または 2.298) であるから, 仮説 H は受容され, 年間最多安打数でみる 104 年間の打者の投手に対する相対的な競技水準は変化がないと見なせる. なお, 下側 5% 点は 1 (または 1.611) になる.

表 4.2: メジャーリーグの年間最多安打新記録 (1901 年~2004 年)

年	1901	1911	1920	2004
選手名	N. Lajoie	T. Cobb	G. Sisler	I. Suzuki
記録 (本)	232	248	257	262

(ii) メジャーリーグの年間最多本塁打数にもとづく競技力に関する検定

メジャーリーグの年間最多本塁打数のデータの記録値は表 4.3 のようになり, 記録数は 10 である ([I05]). この値は平均 $E(N_{104}) = 5.226$, 極限分布による平均 5.222 より大きい値になっている. そこで,

仮説 H : 「104 年間に於いて打者の競技力の水準に变化がない」

対立仮説 K : 「104 年間に於いて打者の競技力の水準が向上している」

の有意水準 0.10 の検定を行う.

表 4.3: メジャーリーグの年間最多本塁打新記録 (1901 年~2004 年)

年	1901	1911	1915	1919	1920
選手名	S. Crawford	F. Schulte	G. Cravath	B. Ruth	B. Ruth
記録 (本)	16	21	24	29	54

1921	1926	1961	1998	2001
B. Ruth	B. Ruth	R. Maris	M. McGwire	B. Bonds
59	60	61	70	73

いま, $n = 104$ のときの N_n の分布の上側 10% 点は表 4.1 より 8 であり, また, その極限分布による上側 10% 点は (3.16) より 8.145 である. このとき, $N_{104} = 10 > 8$ (または 8.145) であるから, 仮説 H は棄却され, 年間最多本塁打数でみる 104 年間の打者の投手に対する相対的な競技水準は向上していると思なせる.

また, 有意水準 0.05 の検定においても, 上側 5% 点は 9 (または 8.833) であるから同様の結論が得られる.

上記の (i), (ii) の検定から, 104 年間のメジャーリーグの歴史において, 打者のヒットを打つ能力はあまり変化していないが, ホームランを打つ能力, すなわち, ボールを遠くに飛ばす能力は上がってきていると考えることができる. その要因は, 科学的に研究された打撃フォームや, 個人個人の筋力アップなどが考えられる. しかし, バット等の道具の発達によることも予想できるので, ここでは打者の投手に対する相対的な競技水準として考えている.

5 記録データの Kullback-Leibler 情報量

本節では, 第 2 節の設定の下で [YAk04] に従って, 母数 θ_2 をもつ分布に対して母数 θ_1 をもつ分布の識別をするために, 記録値等に関する K-L 情報量を求める. その際に, 次の表記を用いる.

- (i) $I_{RT}^U(n, \theta_1, \theta_2)$: 大きさ n の無作為標本から得られた上位の記録値 $\mathbf{R} := (R_1, \dots, R_{N_n})$ と上位の記録時刻 $\mathbf{T} := (T_1, \dots, T_{N_n})$ の組 $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ のもつ K-L 情報量
- (ii) $I_R^U(n, \theta_1, \theta_2)$: 大きさ n の無作為標本から得られた上位の記録値 $\mathbf{R}$ のもつ K-L 情報量
- (iii) $I_M^U(n, \theta_1, \theta_2)$: 大きさ n の無作為標本から得られた最後 (最大) の記録値 R_m のもつ K-L 情報量

また, 下位の記録値に関しても, 同様の表記 $I_{RT}^L(n, \theta_1, \theta_2)$, $I_R^L(n, \theta_1, \theta_2)$, $I_M^L(n, \theta_1, \theta_2)$ を用いる.

注意 5.1 $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$ のもつ K-L 情報量を $I_{\mathbf{X}}(\theta_1, \theta_2)$ とするとき, $I_{\mathbf{X}} - I_{RT}^U(n)$ を $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ の情報量損失という. これは, $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ が全標本 $\mathbf{X}$ と比較して, どれだけ情報を失うかを示す (非負値) 量と考えられる. 他の $I_R^U(n)$, $I_M^U(n)$, $I_{RT}^L(n)$, $I_R^L(n)$, $I_M^L(n)$ についても同様である.

5.1 Kullback-Leibler 情報量

まず, $X_1, \dots, X_n$ をたがいに独立にいずれも p.d.f. $f(x, \theta)$, c.d.f. $F(x, \theta)$ をもつ分布に従う確率変数とする. このとき, 最大の記録値 R_m は順序統計量を用いれば, $R_m = \max_{1 \leq i \leq n} X_i =: X_{(n)}$ となるから, その p.d.f. は,

$$f_{R_m}(x, \theta) = nF^{n-1}(x, \theta)f(x, \theta)$$

になる. 第2節の K-L 情報量の定義より, R_m のもつ K-L 情報量は,

$$I_M^U(n; \theta_1, \theta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} + (n-1) \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right\} n F^{n-1}(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \quad (5.1)$$

になる. 最小の記録値のもつ K-L 情報量については, (5.1) において F を $1-F$ とすればよい.

次に, 記録値 $\mathbf{R}$, 記録時刻 $\mathbf{T}$ の同時確率密度関数 (joint(j.)p.d.f.) は

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{R}, \mathbf{T}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}, \theta) &= P\{X_{T_1} = r_1\} P\{X_{T_1+1} \leq r_1\} \cdots P\{X_{T_2-1} \leq r_1\} P\{X_{T_2} = r_2\} \\ &\quad \cdot P\{X_{T_2+1} \leq r_2\} \cdots P\{X_{T_m} = r_m\} \cdots P\{X_{T_{m+1}-1} \leq r_m\} \\ &= f(r_1, \theta) \{F(r_1, \theta)\}^{t_2-t_1-1} f(r_2, \theta) \{F(r_2, \theta)\}^{t_3-t_2-1} \cdots f(r_m, \theta) \{F(r_m, \theta)\}^{n-t_m} \\ &= \prod_{i=1}^m f(r_i, \theta) \prod_{i=1}^m F^{\delta_i}(r_i, \theta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

と表される. ただし, $r_1 < \cdots < r_m, t_1 = 1 < t_2 < \cdots < t_m \leq n, m = 1, \dots, n, \delta_i = t_{i+1} - t_i - 1, t_{m+1} = n+1$ とする. このとき, 上位の記録値と記録時刻の組 $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ のもつ θ に関する K-L 情報量は,

$$\begin{aligned} I_{RT}^U(n; \theta_1, \theta_2) &= E_{\theta_1} \left[\log \frac{f(\mathbf{R}, \mathbf{T}, \theta_1)}{f(\mathbf{R}, \mathbf{T}, \theta_2)} \right] \\ &= E_{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^{N_n} \log \frac{f(R_i, \theta_1)}{f(R_i, \theta_2)} \right] + E_{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^{N_n} \Delta_i \log \frac{F(R_i, \theta_1)}{F(R_i, \theta_2)} \right] \\ &=: E_1 + E_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる. ただし, $\Delta_i = T_{i+1} - T_i - 1, T_{m+1} = n+1$ とする. ここで,

$$E_1 = \sum_{m=1}^n E_1(m)$$

とし, 各 $m = 1, \dots, n$ について,

$$E_1(m) = \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) dr_1 \cdots dr_m$$

とする. ただし, $\delta(m) := (\delta_1, \dots, \delta_m), \Delta(m) := \{(\delta_1, \dots, \delta_m) \mid \sum_{i=1}^m \delta_i = n-m, \delta_1, \dots, \delta_m : \text{非負の整数}\}$ とする. このとき, $E_1(m)$ を計算すると,

$$E_1(m) = \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) dr_1 \cdots dr_m$$

となる. ここで, 十分小さい s に対して,

$$\sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta_1)s} \quad (5.4)$$

になる。実際,

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta_1)s} &= \prod_{k=1}^m (1 + F(r_k, \theta_1)s + F^2(r_k, \theta_1)s^2 + \cdots) \\
 &= 1 + \{F(r_1, \theta_1) + \cdots + F(r_m, \theta_1)\}s + \{F^2(r_1, \theta_1) + F(r_1, \theta_1)F(r_2, \theta_1) \\
 &\quad + \cdots + F(r_{m-1}, \theta_1)F(r_m, \theta_1) + F^2(r_m, \theta_1)\}s^2 + \cdots \\
 &= 1 + \left(\sum_{k=1}^m F(r_k, \theta_1) \right) s + \cdots + \left(\sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) \right) s^{n-m} + \cdots
 \end{aligned}$$

であるから,

$$E_1(m) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m \frac{f(r_j, \theta_1)}{1 - F(r_j, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m$$

となる。さらに、この式の積分の項は,

$$\begin{aligned}
 &\int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m \frac{f(r_j, \theta_1)}{1 - F(r_j, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m \\
 &= \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m \frac{f(r_j, \theta_1)}{1 - F(r_j, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m \\
 &= \frac{1}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) \frac{f(x, \theta_1)}{1 - F(x, \theta_1)s} dx \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y, \theta_1)}{1 - F(y, \theta_1)s} dy \right)^{m-1} \\
 &= \frac{1}{(m-1)!} \left(-\frac{1}{s} \log(1-s) \right)^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} F^i(x, \theta_1)s^i \right) f(x, \theta_1) dx
 \end{aligned}$$

となる。いま、この0から ∞ までの i についての和は s^{n-m} の係数として用いる部分のみ考えればよい。上式のもう一方の s に依存する部分である $-(1/s) \log(1-s)$ をTaylor展開すると,

$$-\frac{1}{s} \log(1-s) = 1 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{3} + \cdots$$

となるので、この i についての和は結局0から $n-m$ まで考える必要があるということになる。よって,

$$\begin{aligned}
 E_1(m) &= \sum_{i=0}^{n-m} \frac{1}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \\
 &\quad \cdot \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } (-\log(1-s))^{m-1}
 \end{aligned}$$

となるから,

$$E_1 = \sum_{m=1}^n E_1(m)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \\
&\quad \cdot \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \sum_{m=1}^{n-i} \frac{1}{(m-1)!} (-\log(1-s))^{m-1}
\end{aligned}$$

となる. ここで上式において,

$$\begin{aligned}
&\text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \sum_{m=1}^{n-i} \frac{1}{(m-1)!} (-\log(1-s))^{m-1} \\
&= \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} (-\log(1-s))^{m-1} \\
&= \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \exp(-\log(1-s)) \\
&= \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \frac{1}{1-s} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.5}$$

となるから,

$$E_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \tag{5.6}$$

を得る. また, 同様にして,

$$E_2 = \sum_{m=1}^n E_2(m)$$

と表すと,

$$\begin{aligned}
E_2(m) &= \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \left\{ \sum_{i=1}^m \delta_i \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) dr_1 \cdots dr_m \\
&= \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \delta_i \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) dr_1 \cdots dr_m
\end{aligned}$$

となる. ここで, 十分小さい s に対して,

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \delta_i \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) &= \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \frac{F(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_1)} \frac{\partial}{\partial r_i} \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) \\
&= \frac{F(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_1)} \frac{\partial}{\partial r_i} \left[\text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta_1)s} \right] \\
&= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \frac{F(r_i, \theta_1)s}{1 - F(r_i, \theta_1)s} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta_1)s}
\end{aligned}$$

であるから,

$E_2(m)$ = coefficient of s^{n-m} in

$$\int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \frac{F(r_i, \theta_1)s}{1 - F(r_i, \theta_1)s} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m$$

となる. さらに, この右辺の積分の項は,

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \frac{F(r_i, \theta_1)s}{1 - F(r_i, \theta_1)s} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m \\ &= \frac{s}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \frac{F(r_i, \theta_1)}{1 - F(r_i, \theta_1)s} \prod_{j=1}^m \frac{f(r_j, \theta_1)}{1 - F(r_j, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m \\ &= \frac{s}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) \frac{f(x, \theta_1)F(x, \theta_1)}{(1 - F(x, \theta_1)s)^2} dx \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y, \theta_1)}{1 - F(y, \theta_1)s} dy \right)^{m-1} \quad (5.7) \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\frac{1}{1 - F(x, \theta_1)s} = \sum_{i=0}^{\infty} F^i(x, \theta_1)s^i$$

の両辺を s で微分すれば,

$$\frac{F(x, \theta_1)}{(1 - F(x, \theta_1)s)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i F^i(x, \theta_1)s^{i-1}$$

であるから, 結局 (5.7) の右辺の積分の項は,

$$\frac{s}{(m-1)!} \left(-\frac{1}{s} \log(1-s) \right)^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} i F^i(x, \theta_1)s^{i-1} \right) f(x, \theta_1) dx$$

となる. この i に関する和は E_1 の場合と同様に 0 から $n-m$ まで考えれば十分であるから,

$$\begin{aligned} E_2(m) &= \sum_{i=0}^{n-m} \frac{i}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \\ &\quad \cdot \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } (-\log(1-s))^{m-1} \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{m=1}^n E_2(m) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \\ &\quad \cdot \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \sum_{m=1}^{n-i} \frac{1}{(m-1)!} (-\log(1-s))^{m-1} \end{aligned}$$

となり, (5.5) よりこの係数部分は1になるから,

$$E_2 = \sum_{i=0}^{n-1} i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \quad (5.8)$$

となる. よって, (5.6) と (5.8) より,

$$\begin{aligned} I_{RT}^U(n; \theta_1, \theta_2) &= E_1 + E_2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} + i \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right\} F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \end{aligned} \quad (5.9)$$

を得る ([YAk04]). また, 下位の記録値のもつ K-L 情報量 $I_{RT}^L(n)$ については, (5.9) において F を $1 - F$ におきかえればよい.

注意 5.2 (5.1), (5.9) より,

$$\begin{aligned} I_{RT}^U(n; \theta_1, \theta_2) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} + i \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right\} (i+1) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} I_M^U(i+1; \theta_1, \theta_2) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} I_M^U(i; \theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

を得る. 下位の記録値等のもつ K-L 情報量に関しても, (5.10) と同様の関係式が成り立つ. これより, 上位 (下位) の記録値と記録時刻の組の K-L 情報量を求めたいときには, (5.9) を直接計算しなくてもよく, それぞれ, 最大 (最小) の記録値のみの K-L 情報量を考慮すれば (5.10) から求められるということになる.

記録値 $\mathbf{R}$ の周辺確率密度関数 (m.p.d.f) は, (5.2) において記録時刻 $\mathbf{T}$ に関する周辺密度を考えることにより得られる. すなわち, 各記録時刻間の間隔である $\delta(m)$ を $\Delta(m)$ の中で動かすことによって得られるので,

$$f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \prod_{i=1}^m f(r_i, \theta) \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{i=1}^m F^{\delta_i}(r_i, \theta)$$

になる. ただし, $r_1 < \dots < r_m, m = 1, \dots, n, \delta(m) := (\delta_1, \dots, \delta_m), \Delta(m) := \{(\delta_1, \dots, \delta_m) \mid \sum_{i=1}^m \delta_i = n - m, \delta_1, \dots, \delta_m : \text{非負の整数}\}$ とする. よって, 上位の記録値 $\mathbf{R}$ に含まれる K-L 情報量 $I_R^U(n; \theta_1, \theta_2)$ は,

$$\begin{aligned} I_R^U(n; \theta_1, \theta_2) &= E_{\theta_1} \left[\log \frac{f(\mathbf{R}, \theta_1)}{f(\mathbf{R}, \theta_2)} \right] \\ &= E_{\theta_1} \left[\log \frac{\prod_{i=1}^{N_n} f(R_i, \theta_1) \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{i=1}^{N_n} F^{\Delta_i}(R_i, \theta_1)}{\prod_{i=1}^{N_n} f(R_i, \theta_2) \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{i=1}^{N_n} F^{\Delta_i}(R_i, \theta_2)} \right] \\ &= E_{\theta_1} \left[\sum_{i=1}^{N_n} \log \frac{f(R_i, \theta_1)}{f(R_i, \theta_2)} \right] + E_{\theta_1} \left[\log \frac{\sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{i=1}^{N_n} F^{\Delta_i}(R_i, \theta_1)}{\sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{i=1}^{N_n} F^{\Delta_i}(R_i, \theta_2)} \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

になる. ここで, (5.11) の最下行の右辺の第1項は (5.3) より E_1 に等しいので, (5.6) によって求まり, 第2項は十分小さい s に対して (5.4) と同様に考えれば,

$$I_R^U(n; \theta_1, \theta_2) = E_1^U + E_{\theta_1} \left[\log \frac{A^U(\mathbf{R})}{B^U(\mathbf{R})} \right] \quad (5.12)$$

と表せる. ただし,

$$E_1^U = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx,$$

$$A^U(\mathbf{r}) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - F(r_i, \theta_1)s},$$

$$B^U(\mathbf{r}) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - F(r_i, \theta_2)s}$$

とする. 下位の記録値については, $E_1^L, A^L(\mathbf{r}), B^L(\mathbf{r})$ として F を $1 - F$ におきかえたものを用いればよい. ここから, 情報量の値をシミュレーションによる数値計算によって求めることができる ([YAk04]).

5.2 Weibull 分布の場合の記録データの K-L 情報量

第 5.1 節において得られた記録値等の K-L 情報量の例として, [YAk04] において指数分布の尺度母数の場合が論じられている. 本論においては, 指数分布を特別な場合として含む Weibull 分布の場合に, 記録値等含まれる尺度母数に関する K-L 情報量を計算する. なお, Weibull 分布は機器類の寿命分布として知られており, 記録値に関する例としてもよく扱われる ([ArnBaN98]).

いま, $X_1, \dots, X_n$ をたがいに独立にいずれも p.d.f.

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつ Weibull 分布 $W(\alpha, \lambda)$ に従う確率変数とする. ただし, $\alpha > 0, \lambda > 0$ とし, α は既知とする. 例えば, $\alpha = 1, 2, 4$ とし, λ の値を変化させたときの Weibull 分布の p.d.f. はそれぞれ図 5.1, 5.2, 5.3 のようになる. ここで, $\alpha = 1$ のとき, 指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$ になり, また $\alpha = 2$ のときは Rayleigh 分布とも呼ばれる.

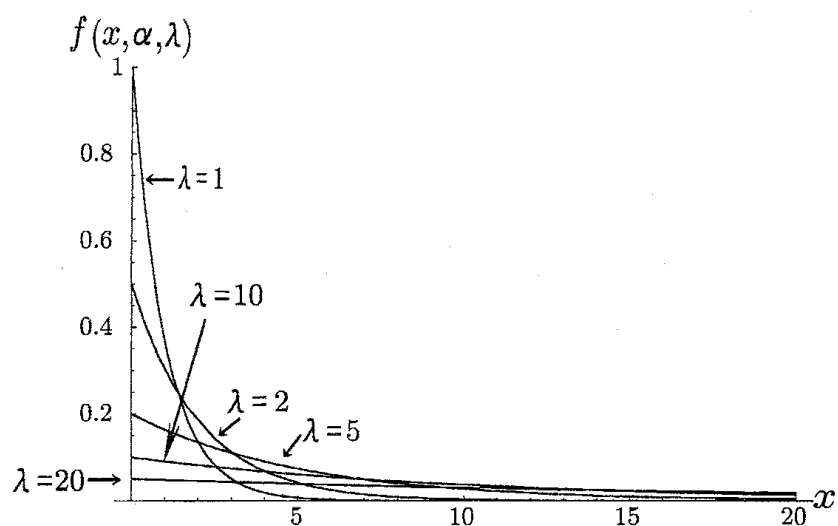


図 5.1 : Weibull 分布 $W(1, \lambda)$ (指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$) の p.d.f. $f(x, \alpha, \lambda)$

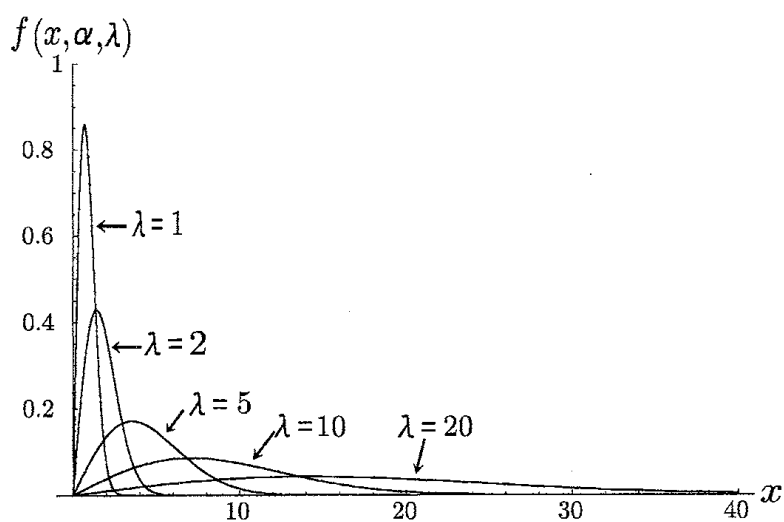


図 5.2 : Weibull 分布 $W(2, \lambda)$ の p.d.f. $f(x, \alpha, \lambda)$

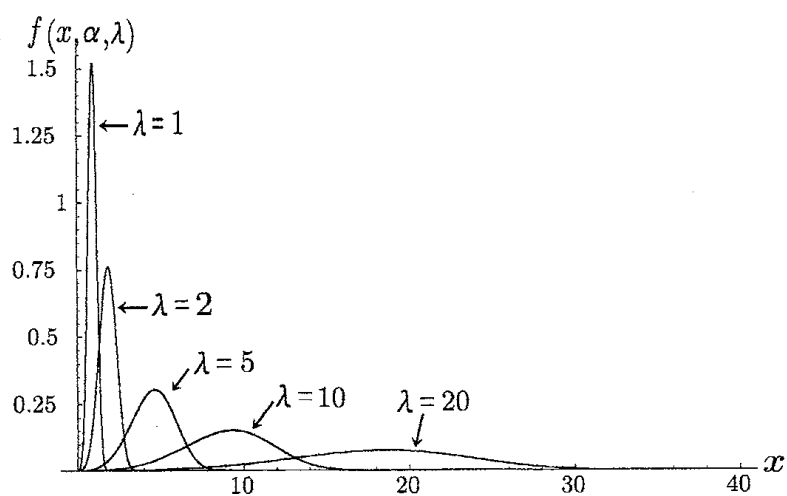


図 5.3 : Weibull 分布 $W(4, \lambda)$ の p.d.f. $f(x, \alpha, \lambda)$

このとき,

$$\log \frac{f(x, \lambda_1)}{f(x, \lambda_2)} = \log \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} - \log \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_2^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_2}\right)^\alpha} = \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\right) x^\alpha,$$

$$\log \frac{1 - F(x, \lambda_1)}{1 - F(x, \lambda_2)} = \left(\frac{x}{\lambda_2}\right)^\alpha - \left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\right) x^\alpha$$

となるので, (5.1) より最小の記録値の持つ K-L 情報量は,

$$\begin{aligned} I_M^L(n; \lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^\infty \left\{ \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\right) x^\alpha + (n-1) \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\right) x^\alpha \right\} \\ &\quad \cdot n \left\{ e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} \right\}^{n-1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\ &= \int_0^\infty \left\{ \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + n \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\right) x^\alpha \right\} n \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-n\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\ &= \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_0^\infty n \frac{\alpha}{\lambda_1^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-n\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\ &\quad + n \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\right) \int_0^\infty n \frac{\alpha}{\lambda_1^\alpha} x^{2\alpha-1} e^{-n\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\ &= \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_0^\infty e^{-u} du + \lambda_1^\alpha \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\right) \int_0^\infty u e^{-u} du \\ &= \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^\alpha - 1 \\ &=: \alpha \log \theta + \theta^{-\alpha} - 1 =: \tilde{I}_M^L(n; \theta) \end{aligned} \quad (5.13)$$

となる. ただし, $\theta := \lambda_2/\lambda_1$ とする. また, このとき $\tilde{I}_{RT}^L(n; \theta) := I_{RT}^L(n; \lambda_1, \lambda_2)$ とすれば, (5.10) より下位の記録値と記録時刻の組のもつ K-L 情報量は,

$$\tilde{I}_{RT}^L(n; \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \tilde{I}_M^L(i; \theta) = (\alpha \log \theta + \theta^{-\alpha} - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

となる. 次に, 上位の場合の K-L 情報量について考察すると,

$$\begin{aligned} I_M^U(n; \lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^\infty \left\{ \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\right) x^\alpha + (n-1) \log \frac{1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha}}{1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_2}\right)^\alpha}} \right\} \\ &\quad \cdot n \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} \right\}^{n-1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\ &= \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_0^\infty n \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} \right\}^{n-1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\right) \int_0^\infty n x^\alpha \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} \right\}^{n-1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\ &\quad - (n-1) \int_0^\infty \left\{ -\log \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} \right) \right\} n \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} \right\}^{n-1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\ &\quad + (n-1) \int_0^\infty \left\{ -\log \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_2}\right)^\alpha} \right) \right\} n \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} \right\}^{n-1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_0^1 nt^{n-1} dt + \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha} \right) \int_0^1 \{-\lambda_1^\alpha \log(1-t)\} nt^{n-1} dt \\
&\quad - (n-1) \int_0^1 (-\log t) nt^{n-1} dt + (n-1) \int_0^1 \left\{ -\log \left(1 - t^{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha} \right) \right\} n(1-t)^{n-1} dt
\end{aligned} \tag{5.14}$$

となる. このとき, (5.14) の最終辺の第 2, 3, 4 項の積分はそれぞれ,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \{-\lambda_1^\alpha \log(1-t)\} nt^{n-1} dt &= n\lambda_1^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_0^1 t^{n+i-1} dt \\
&= n\lambda_1^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(n+i)} \\
&= n\lambda_1^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \cdots + \frac{1}{k(n+k)} \right\} \\
&= \lambda_1^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} - \cdots - \frac{1}{n+k} \right\} \\
&= \lambda_1^\alpha \sum_{j=1}^n \frac{1}{j},
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 (-\log t) nt^{n-1} dt = \left[-t^n \log t \right]_0^1 + \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\{ -\log \left(1 - t^{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha} \right) \right\} n(1-t)^{n-1} dt &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 t^{k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha} n(1-t)^{n-1} dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left[-t^{k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha} (1-t)^n \right]_0^1 \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha k t^{k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha - 1} (1-t)^n dt \right\} \\
&= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 t^{k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha - 1} (1-t)^n dt \\
&= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} B \left(k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\alpha, n+1 \right)
\end{aligned}$$

となる. ただし, $B(\cdot, \cdot)$ はベータ関数とする. これより, $\theta = \lambda_2/\lambda_1$ として, $\tilde{I}_M^U(n; \theta) := I_M^U(n; \lambda_1, \lambda_2)$ とすれば

$$\tilde{I}_M^U(n; \theta) = \alpha \log \theta + (\theta^{-\alpha} - 1) \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \frac{n-1}{n} + \theta^{-\alpha} (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} B(k\theta^{-\alpha}, n+1) \tag{5.15}$$

となる. さらに, このとき $\tilde{I}_{RT}^U(n; \theta) := I_{RT}^U(n; \lambda_1, \lambda_2)$ とすれば, (5.10) より,

$$\tilde{I}_{RT}^U(n; \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \tilde{I}_M^U(i; \theta)$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \log \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + (\theta^{-\alpha} - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} - \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i^2} \\
&\quad + \theta^{-\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} B(k\theta^{-\alpha}, i+1) \quad (5.16)
\end{aligned}$$

として上位の記録値と記録時刻の組 $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ のもつ K-L 情報量が得られる.

最後に, 下位と上位の記録値 $\mathbf{R}$ のもつ K-L 情報量 $\tilde{I}_R^L(n; \theta) := I_R^L(n; \lambda_1, \lambda_2), \tilde{I}_R^U(n; \theta) := I_R^U(n; \lambda_1, \lambda_2)$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned}
E_1^L &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^\infty \left\{ \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha} \right) x^\alpha \right\} e^{-i\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \left\{ \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha} \right) x^\alpha \right\} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-i\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\alpha}{i} \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1^\alpha}{i^2} \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha} \right) \right\} \\
&= \alpha \log \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + (\theta^{-\alpha} - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}, \\
E_1^U &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^\infty \left\{ \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha} \right) x^\alpha \right\} \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} \right\}^i \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda_1^\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)^\alpha} dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left\{ \alpha \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \lambda_1^\alpha \left(\frac{1}{\lambda_2^\alpha} - \frac{1}{\lambda_1^\alpha} \right) \log(1-t) \right\} t^{i-1} dt \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\alpha}{i} \log \theta + (\theta^{-\alpha} - 1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(i+j)} \right\} \\
&= \alpha \log \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + (\theta^{-\alpha} - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}
\end{aligned}$$

となることから,

$$\begin{aligned}
A^L(\mathbf{r}) &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{r_i}{\lambda_1}\right)^\alpha} s}, \\
B^L(\mathbf{r}) &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{r_i}{\lambda_2}\right)^\alpha} s}, \\
A^U(\mathbf{r}) &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{r_i}{\lambda_1}\right)^\alpha}\right) s}, \\
B^U(\mathbf{r}) &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{r_i}{\lambda_2}\right)^\alpha}\right) s}
\end{aligned}$$

として, (5.12) からシミュレーションによりその情報量の値が得られる.

さて, Weibull 分布 $W(\alpha, \lambda)$ において, $\alpha = 1$ (すなわち, 指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$) の場合に, p.d.f. $f(\cdot, \lambda_1)$ をもつ分布から得られた上位の最大の記録値に含まれる $(f(\cdot, \lambda_2))$ に対して $f(\cdot, \lambda_1)$ の識別をするための K-L 情報量 $\tilde{I}_M^U(n; \theta)$ の値, 同様に下位の最小の記録値に含まれる K-L 情報量 $\tilde{I}_M^L(n; \theta)$ の値が数値的に得られる (表 5.1, 5.2 参照). ただし, $\theta := \lambda_2/\lambda_1$ とする. また, 上位と下位それぞれの記録値と記録時刻の組 $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ のもつ K-L 情報量 $\tilde{I}_{RT}^U$ および $\tilde{I}_{RT}^L$ の値が数値的に得られる (表 5.3, 5.4 参照). さらに, 上位と下位それぞれの記録値のもつ K-L 情報量 $\tilde{I}_R^U$ および $\tilde{I}_R^L$ の値をシミュレーションによって得る (表 5.5, 5.6 参照). 同様にして, $\alpha = 2, 4$ のときのそれぞれの K-L 情報量の値が得られる (表 5.7-5.12, 表 5.13-5.18 参照).

α がいずれの場合も, K-L 情報量の性質である, 標本の大きさ n が大きくなると情報量が増加すること, $\lambda_1 = \lambda_2$ すなわち $\theta = 1$ のとき K-L 情報量は 0 となること, λ_1 と λ_2 に関して非対称であることが表から読み取れる. なお, 下位の最小の記録値に含まれる K-L 情報量は (5.13) からわかるように n に依存していないため, 表 5.2, 5.8, 5.14 には $n = 1$ の場合の値を載せた. さらに, $n = 1$ において, その標本 X_1 は上位の記録値にも下位の記録値にもなるので, θ が同じとき, どの情報量でも値は等しくなる. また, 第 3.3 節で, 記録時刻 $\mathbf{T}$ は補助統計量であることを述べたが, α がいずれの場合も記録値と記録時刻の組の K-L 情報量と記録値のみの K-L 情報量を比べると, シミュレーションにより多少の誤差があるが, 上位と下位どちらの場合でも前者の K-L 情報量の値の方が少し大きくなる傾向にある. これについて, $\alpha = 1, 2, 4$ において, 上位の場合, 下位の場合, それぞれについて相対差の値を得る (表 5.19-5.24 参照). それらの表より, α がいずれの場合も記録時刻を含めることによる K-L 情報量への影響は, 標本の大きさ n が大きくなるほど大きいことがわかる. さらに, θ の値が 1 に近いとき, すなわち 2 つの分布が接近しているときほど大きくなっていることもわかる. これは, たとえば $\alpha = 2$ において $\lambda_2 = 1$ とし, $\lambda_1 = 2$ としたときと $\lambda_1 = 10$ としたときの上位の記録値について考えると, 図 2 より λ_1 が 2 のときより 10 のときの方が右裾が長くなっているため, $\lambda_1 = 10$ のときの方が $\lambda_1 = 2$ のときより上位の記録値が出やすいが, $\lambda_2 = 1$ のときにはその記録が出にくくなるため, 記録時刻に関係なく識別しやすくなるからと考えられる.

次に, α を変化させることによる K-L 情報量の変化を考察する. 最大 (最小) の記録値, 記録値と記録時刻の組, 記録値に関するそれぞれ情報量に対して α を 1 から 2, 2 から 4 と大きくしていくと, 値が極端に大きくなっていることが読み取れる. これは図 5.1-5.3 を見てもわかるように, α が大きくなるにつれて, λ の値を変えたときの $W(x, \lambda)$ の p.d.f. $f(x, \lambda)$ の重複部分が少なくなるため, 識別しやすくなるからである. また, 最大 (最小) の記録値, 記録値と記録時刻の組に関する情報量については, (5.13), (5.15) からわかるように, $\alpha = 1$ のときの $\theta = 0.01, 100$ の値と $\alpha = 2$ のときの $\theta = 0.1, 10$ の値, $\alpha = 2$ のときの $\theta = 0.01, 100$ の値と $\alpha = 4$ のときの $\theta = 0.1, 10$ の値がそれぞれ等しくなる. しかし, 記録値の持つ K-L 情報量に関してはシミュレーションにより多少の誤差が出てしまう.

さらに, 記録時刻を考慮することによる情報量の影響は, 上位の場合, $\alpha = 2, 4$ のときには p.d.f. $f(x, \lambda)$ の右裾が比較的短いので (図 5.2, 5.3 参照), 記録時刻は影響してこない (表 5.21, 5.23 参照). しかし, $\alpha = 1$ のとき, p.d.f. $f(x, \lambda)$ の右裾は長くなるので (図 5.1 参

照), 記録時刻の影響は $\alpha = 2, 4$ のときよりも大きくなる (表 5.19 参照). また, 上位の場合, $\theta < 1$ のときよりも $\theta > 1$ のときの方がその度合は大きくなる. 下位の場合, $\alpha = 2, 4$ のときには λ が小さいほど p.d.f. $f(x, \lambda)$ のモードは $x = 0$ の方向に近づくので (図 5.2, 5.3), 記録時刻を含めることによる影響は上位の場合よりも大きくなる. また, 上位の場合とは逆に $\theta > 1$ のときよりも $\theta < 1$ のときの方がその度合はかなり大きくなっており, $\theta < 1$ に対しては θ の値が変化してもあまり変化が見られない (表 5.21, 5.23 参照). $\alpha = 1$ のときも λ が小さいほど p.d.f. $f(x, \lambda)$ は $x = 0$ の近傍の確率が大きくなるので (図 5.1 参照), やはり, $\alpha = 2, 4$ のときと同じ傾向にある (表 5.19 参照).

表 5.1 : $W(1, \lambda)(\text{Exp}(\lambda))$ のときの最大の記録値のもつ $\tilde{I}_M^U(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	94.39	45.09	16.00	6.70	2.39	0.31	0	0.19	0.81	1.40	2.05	2.93	3.62
	2	143.40	69.09	25.01	10.72	3.95	0.53	0	0.36	1.55	2.71	3.99	5.75	7.12
	3	176.23	85.25	31.27	13.54	5.10	0.72	0	0.51	2.24	3.96	5.86	8.50	10.54
	4	200.90	97.42	35.84	15.70	6.00	0.87	0	0.65	2.90	5.17	7.69	11.20	13.92
	5	220.65	107.17	39.59	17.45	6.74	1.00	0	0.78	3.53	6.34	9.47	13.85	17.25
	10	284.46	138.71	51.75	23.16	9.21	1.48	0	1.33	6.43	11.86	18.02	26.70	33.47
	20	350.62	171.43	64.41	29.13	11.83	2.04	0	2.21	11.50	21.93	33.99	51.20	64.69
	30	389.93	190.88	71.94	32.69	13.40	2.39	0	2.92	16.05	31.28	49.14	74.81	95.00
	40	418.00	204.76	77.32	35.23	14.53	2.66	0	3.55	20.28	40.20	63.78	97.87	124.73
	50	439.84	215.57	81.51	37.21	15.41	2.86	0	4.11	24.29	48.80	78.05	120.52	154.04
	75	479.64	235.27	89.14	40.82	17.01	3.25	0	5.33	33.63	69.33	112.59	175.90	226.04
	100	508.96	249.28	94.57	43.39	18.15	3.52	0	6.39	42.30	88.89	145.99	230.01	296.74

表 5.2 : $W(1, \lambda)(\text{Exp}(\lambda))$ のときの最小の記録値のもつ $\tilde{I}_M^L(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	94.39	45.09	16.00	6.70	2.39	0.31	0	0.19	0.81	1.40	2.05	2.93	3.62

表 5.3 : $W(1, \lambda)(\text{Exp}(\lambda))$ のときの上位の記録値と記録時刻の組のもつ $\tilde{I}_{RT}^U(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	94.39	45.09	16.00	6.70	2.39	0.31	0	0.19	0.81	1.40	2.05	2.93	3.62
	2	166.09	79.63	28.51	12.06	4.37	0.57	0	0.37	1.58	2.76	4.04	5.81	7.17
	3	224.84	108.05	38.90	16.57	6.07	0.81	0	0.54	2.33	4.08	5.99	8.64	10.69
	4	275.06	132.41	47.86	20.49	7.57	1.03	0	0.70	3.05	5.37	7.92	11.44	14.17
	5	319.19	153.84	55.78	23.98	8.91	1.23	0	0.86	3.76	6.64	9.81	14.21	17.62
	10	486.50	235.31	86.07	37.47	14.22	2.06	0	1.57	7.08	12.72	18.98	27.74	34.54
	20	701.16	340.15	125.35	55.16	21.35	3.25	0	2.76	13.10	24.04	36.38	53.78	67.33
	30	849.04	412.50	152.59	67.51	26.39	4.14	0	3.79	18.62	34.69	53.02	79.00	99.28
	40	963.98	468.80	173.83	77.17	30.37	4.86	0	4.71	23.81	44.90	69.15	103.66	130.67
	50	1058.87	515.29	191.40	85.19	33.68	5.47	0	5.56	28.76	54.78	84.90	127.92	161.64
	75	1244.08	606.10	225.77	100.91	40.21	6.70	0	7.46	40.38	78.46	123.10	187.28	237.73
	100	1385.48	675.48	252.08	112.96	45.25	7.67	0	9.14	51.24	101.09	160.07	245.29	312.44

表 5.4 : $W(1, \lambda)(\text{Exp}(\lambda))$ のときの下位の記録値と記録時刻の組のもつ $\tilde{I}_{RT}^L(n; \theta)$ の値

		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	94.39	45.09	16.00	6.70	2.39	0.31	0	0.19	0.81	1.40	2.05	2.93	3.62
	2	141.59	67.63	24.01	10.05	3.59	0.46	0	0.29	1.21	2.10	3.07	4.40	5.42
	3	173.06	82.66	29.34	12.28	4.38	0.56	0	0.35	1.48	2.57	3.75	5.38	6.63
	4	196.66	93.93	33.34	13.95	4.98	0.64	0	0.40	1.69	2.92	4.26	6.11	7.53
	5	215.54	102.95	36.54	15.29	5.46	0.70	0	0.44	1.85	3.20	4.67	6.69	8.25
	10	276.48	132.06	46.88	19.62	7.00	0.90	0	0.57	2.37	4.11	5.00	8.59	10.59
	20	339.61	162.22	57.58	24.10	8.60	1.10	0	0.69	2.91	5.05	7.36	10.55	13.01
	30	377.11	180.13	63.94	26.76	9.55	1.23	0	0.77	3.23	5.60	8.17	11.71	14.44
	40	403.87	192.91	68.47	28.66	10.23	1.31	0	0.83	3.46	6.00	8.75	12.54	15.47
	50	424.70	202.86	72.01	30.13	10.76	1.38	0	0.87	3.64	6.31	9.20	13.19	16.27
75	462.66	220.99	78.44	32.83	11.72	1.50	0	0.95	3.97	6.87	10.03	14.37	17.72	
100	489.66	233.89	83.03	34.74	12.40	1.59	0	1.00	4.20	7.28	10.61	15.21	18.75	

表 5.5 : $W(1, \lambda)(\text{Exp}(\lambda))$ のときの上位の記録値のもつ $\tilde{I}_R^U(n; \theta)$ の値

		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	94.39	45.09	16.00	6.70	2.39	0.31	0	0.19	0.81	1.40	2.05	2.93	3.62
	2	166.09	79.63	28.51	12.06	4.37	0.57	0	0.37	1.58	2.76	4.04	5.81	7.18
	3	224.79	108.01	38.86	16.54	6.05	0.81	0	0.54	2.32	4.07	5.99	8.63	10.67
	4	274.95	132.30	47.77	20.42	7.52	1.02	0	0.70	3.03	5.35	7.88	11.41	14.15
	5	319.01	153.66	55.62	23.86	8.83	1.21	0	0.85	3.72	6.59	9.75	14.15	17.55
	10	485.97	234.80	85.60	37.06	13.94	1.98	0	1.50	6.88	12.44	18.66	27.39	34.18
	20	700.03	339.05	124.33	54.25	20.67	3.04	0	2.54	12.37	23.02	35.21	52.50	65.99
	30	847.43	410.93	151.11	66.19	25.38	3.80	0	3.39	17.23	32.74	50.77	76.52	96.77
	40	962.00	466.84	172.00	75.52	29.07	4.40	0	4.11	21.68	41.94	65.72	99.92	126.85
	50	1056.53	513.00	189.22	83.23	32.13	4.90	0	4.77	25.87	50.76	80.26	122.84	156.43
n	75	1241.01	603.10	222.93	98.31	38.11	5.89	0	6.15	35.66	71.81	115.32	178.78	229.00
	100	1381.87	671.90	248.68	109.85	42.71	6.65	0	7.35	44.60	91.73	149.11	233.35	300.12

表 5.6 : $W(1, \lambda)(\text{Exp}(\lambda))$ のときの下位の記録値のもつ $\tilde{I}_R^L(n; \theta)$ の値

		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	94.39	45.09	16.00	6.70	2.39	0.31	0	0.19	0.81	1.40	2.05	2.93	3.62
	2	141.66	67.56	23.99	10.06	3.58	0.46	0	0.29	1.21	2.10	3.07	4.40	5.42
	3	164.93	78.83	27.95	11.70	4.18	0.54	0	0.34	1.45	2.53	3.70	5.33	6.58
	4	179.26	85.60	30.32	12.68	4.54	0.59	0	0.38	1.62	2.83	4.16	6.00	7.42
	5	189.01	90.25	31.95	13.38	4.80	0.62	0	0.41	1.74	3.06	4.50	6.52	8.07
	10	211.79	100.84	35.74	14.94	5.34	0.71	0	0.48	2.08	3.71	5.52	8.07	10.05
	20	226.32	107.52	37.98	15.95	5.76	0.77	0	0.53	2.35	4.25	6.40	9.48	11.90
	30	230.73	109.95	38.85	16.28	5.88	0.78	0	0.55	2.48	4.52	6.85	10.22	12.88
	40	233.44	110.88	39.26	16.46	5.95	0.79	0	0.56	2.55	4.66	7.13	10.68	13.53
	50	235.29	111.71	39.56	16.58	5.98	0.80	0	0.57	2.60	4.78	7.31	11.03	14.00
75	237.97	112.99	39.92	16.72	6.06	0.81	0	0.59	2.68	4.94	7.62	11.58	14.78	
100	239.47	113.91	40.18	16.86	6.10	0.81	0	0.59	2.72	5.04	7.81	11.95	15.28	

表 5.7 : $W(2, \lambda)$ のときの最大の記録値のもつ $\tilde{I}_M^U(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	9990	2491	393	94.4	20.8	1.61	0	0.64	2.26	3.62	4.99	6.82	8.21
	2	14989	3740	592	143.4	32.3	2.70	0	1.21	4.41	7.12	9.87	13.53	16.31
	3	18322	4573	725	176.2	40.1	3.51	0	1.74	6.50	10.54	14.68	20.17	24.32
	4	20821	5198	825	200.9	46.0	4.16	0	2.25	8.53	13.92	19.43	26.74	32.29
	5	22821	5697	904	220.6	50.8	4.70	0	2.73	10.52	17.25	24.13	33.28	40.21
	10	29277	7311	1162	284.5	66.2	6.51	0	4.92	20.09	33.47	47.22	65.51	79.37
	20	35934	8982	1429	350.6	82.2	8.46	0	8.67	38.08	64.69	92.13	128.71	156.42
	30	39936	9975	1597	389.9	91.7	9.63	0	11.98	55.23	95.00	136.12	190.97	232.54
	40	42771	10683	1700	418.0	98.5	10.47	0	15.03	71.86	124.73	179.52	252.64	308.07
	50	44977	11235	1788	439.8	103.8	11.13	0	17.89	88.10	154.04	222.50	313.89	383.17
	75	48999	12240	1949	479.6	113.4	12.33	0	24.47	127.54	226.04	328.62	465.68	569.59
	100	51858	12954	2063	508.0	120.3	13.19	0	30.51	165.79	296.74	433.41	616.12	754.67

表 5.8 : $W(2, \lambda)$ のときの最小の記録値のもつ $\tilde{I}_M^L(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	9990	2491	393	94.4	20.8	1.61	0	0.64	2.26	3.62	4.99	6.82	8.21

表 5.9 : $W(2, \lambda)$ のときの上位の記録値と記録時刻の組のもつ $\tilde{I}_{RT}^U(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	9990	2491	393	94.4	20.8	1.61	0	0.64	2.26	3.62	4.99	6.82	8.21
	2	17484	4361	689	166.1	36.9	2.96	0	1.24	4.46	7.17	9.93	13.59	16.36
	3	23591	5886	931	224.8	50.3	4.13	0	1.82	6.63	10.69	14.82	20.31	24.47
	4	28797	7185	1137	275.1	61.8	5.17	0	2.38	8.76	14.17	19.68	27.00	32.54
	5	33361	8325	1318	319.2	72.0	6.11	0	2.93	10.87	17.62	24.50	33.66	40.58
	10	50610	12631	2002	486.5	110.7	9.85	0	5.49	21.08	34.54	48.30	66.60	80.46
	20	72657	18137	2877	701.2	160.9	14.92	0	10.05	40.54	67.33	94.82	131.41	159.13
	30	87812	21923	3479	849.0	195.6	18.53	0	14.19	59.21	99.28	140.49	195.36	236.93
	40	99579	24862	3947	964.0	222.7	21.40	0	18.05	77.37	130.67	185.58	258.73	314.16
	50	109285	27286	4333	1058.9	245.1	23.79	0	21.70	95.14	161.64	230.24	321.67	391.96
	75	128214	32014	5086	1244.1	288.8	28.52	0	30.21	138.33	237.74	340.55	477.66	581.59
	100	142654	35621	5660	1385.5	322.3	32.17	0	38.07	180.26	312.45	449.44	632.24	770.80

表 5.10 : $W(2, \lambda)$ のときの下位の記録値と記録時刻の組のもつ $\tilde{I}_{RT}^L(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	9990	2491	393	94.4	20.8	1.61	0	0.64	2.26	3.62	4.99	6.82	8.21
	2	14985	3737	590	141.6	31.2	2.42	0	0.95	3.39	5.42	7.49	10.24	12.32
	3	18315	4567	721	173.1	38.1	2.96	0	1.17	4.14	6.63	9.16	12.51	15.05
	4	20812	5190	819	196.7	43.3	3.36	0	1.33	4.71	7.53	10.40	14.22	17.11
	5	22810	5688	897	215.5	47.5	3.68	0	1.45	5.16	8.25	11.40	15.58	18.75
	10	29260	7297	1151	276.5	60.9	4.73	0	1.86	6.61	10.59	14.63	19.99	24.05
	20	35941	8963	1414	339.6	74.8	5.81	0	2.29	8.13	13.01	17.97	24.55	29.54
	30	39909	9952	1530	377.1	83.0	6.45	0	2.54	9.02	14.44	19.95	27.26	32.80
	40	42742	10659	1682	403.9	88.9	6.90	0	2.72	9.66	15.47	21.37	29.20	35.13
	50	44946	11208	1768	424.7	93.5	7.26	0	2.86	10.16	16.27	22.47	30.70	36.94
	75	48964	12210	1926	462.7	101.9	7.91	0	3.12	11.07	17.72	24.48	33.45	40.24
	100	51821	12923	2039	489.7	107.8	8.37	0	3.30	11.72	18.75	25.91	35.40	42.59

表 5.11 : $W(2, \lambda)$ のときの上位の記録値のもつ $\tilde{I}_R^U(n; \theta)$ の値

θ		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	9990	2491	393	94.4	20.8	1.61	0	0.64	2.26	3.62	4.99	6.82	8.21
	2	17484	4361	689	166.1	36.9	2.96	0	1.24	4.46	7.18	9.93	13.58	16.36
	3	23591	5495	931	224.8	50.3	4.12	0	1.81	6.62	10.68	14.80	20.29	24.45
	4	28797	7185	1137	274.9	61.7	5.14	0	2.37	8.73	14.13	19.64	26.97	32.49
	5	33361	8324	1317	319.0	71.8	6.05	0	2.90	10.81	17.55	24.44	33.57	40.51
	10	50609	12631	2001	486.0	110.2	9.61	0	5.32	20.74	34.17	47.93	66.22	80.08
	20	72656	18136	2876	700.0	159.8	14.34	0	9.43	39.33	66.01	93.45	130.13	157.77
	30	87811	21921	3478	847.5	194.1	17.66	0	13.01	56.86	96.74	137.88	192.80	234.31
	40	99577	24860	3945	962.0	220.8	20.26	0	16.27	73.87	126.84	181.72	254.76	310.19
	50	109282	27284	4330	1056.5	242.9	22.43	0	19.30	90.38	156.48	224.90	316.32	385.65
	75	128210	32001	5082	1241.0	285.9	26.66	0	26.24	130.32	229.01	331.66	468.74	572.65
	100	142650	35618	5656	1381.9	318.8	29.91	0	32.56	168.97	300.13	436.88	619.64	758.24

表 5.12 : $W(2, \lambda)$ のときの下位の記録値のもつ $\tilde{I}_R^L(n; \theta)$ の値

θ		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	9990	2491	393	94.4	20.8	1.61	0	0.64	2.26	3.62	4.99	6.82	8.21
	2	14978	3735	589	141.7	31.2	2.42	0	0.95	3.39	5.42	7.49	10.24	12.32
	3	17484	4358	689	165.1	36.3	2.82	0	1.14	4.10	6.58	9.11	12.46	15.00
	4	18985	4741	747	179.1	39.4	3.08	0	1.27	4.60	7.42	10.29	14.10	16.99
	5	20052	5001	787	189.0	41.5	3.24	0	1.36	4.99	8.07	11.21	15.39	18.56
	10	22595	5617	885	211.7	46.4	3.65	0	1.62	6.13	10.05	14.08	19.44	23.50
	20	24102	6012	947	226.0	49.4	3.90	0	1.82	7.14	11.90	16.82	23.40	28.39
	30	24728	6150	968	230.8	50.5	3.99	0	1.91	7.64	12.88	18.34	25.64	31.17
	40	25020	6220	979	233.4	50.9	4.04	0	1.97	7.97	13.53	19.36	27.16	33.10
	50	25216	6276	987	235.3	51.3	4.06	0	2.01	8.19	14.00	20.11	28.33	34.56
	75	25567	6362	999	238.2	51.9	4.14	0	2.05	8.55	14.79	21.41	30.35	37.14
	100	25704	6409	1005	239.4	52.2	4.14	0	2.09	8.78	15.29	22.27	31.72	38.91

表 5.13 : $W(4, \lambda)$ のときの最大の記録値のもつ $\tilde{I}_M^U(n; \theta)$ の値

θ		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	1.00	6.25	1.60	9990	618	12.2	0	1.84	5.44	8.21	11.0	14.6	17.4
	2	1.50	9.37	2.40	14989	929	19.2	0	3.57	10.76	16.31	21.9	29.2	34.7
	3	1.83	11.46	2.93	18322	1137	24.1	0	5.24	16.01	24.32	32.6	43.6	52.0
	4	2.08	13.02	3.33	20821	1293	27.7	0	6.86	21.21	32.28	43.4	58.0	69.1
	5	2.28	14.27	3.65	22821	1418	30.7	0	8.44	26.35	40.21	54.1	72.4	86.3
	10	2.92	18.31	4.69	29277	1820	40.3	0	15.98	51.67	79.37	107.1	143.7	171.5
	20	3.60	22.49	5.76	35964	2238	50.2	0	29.98	101.03	156.42	211.9	285.2	340.6
	30	3.99	24.97	6.39	39936	2485	56.2	0	43.19	149.46	232.54	315.7	425.7	508.8
	40	4.28	26.74	6.85	42771	2662	60.4	0	55.90	197.30	308.07	419.0	565.6	676.5
	50	4.50	28.12	7.20	44977	2800	63.7	0	68.27	244.71	383.17	521.8	705.0	843.7
	75	4.90	30.63	7.84	48999	3051	69.8	0	98.08	361.93	569.59	777.5	1052.4	1260.7
	100	5.19	32.42	8.30	51868	3230	74.0	0	126.79	477.81	754.67	1031.9	1398.4	1675.7

(注) 表 5.13-5.18 において ($\theta = 0.01$ のときの値 ($\times 10^8$), $\theta = 0.02$ のときの値 ($\times 10^6$), $\theta = 0.05$ のときの値 ($\times 10^5$)) とする.

表 5.14 : $W(4, \lambda)$ のときの最小の記録値のもつ $\tilde{I}_M^L(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	1.00	6.25	1.60	9990	618	12.2	0	1.84	5.44	8.21	11.0	14.6	17.4

表 5.15 : $W(4, \lambda)$ のときの上位の記録値と記録時刻の組のもつ $\tilde{I}_{RT}^U(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	1.00	6.25	1.60	9990	618	12.2	0	1.84	5.44	8.21	11.0	14.6	17.4
	2	1.75	10.94	2.80	17484	1082	21.8	0	3.62	10.82	16.36	21.9	29.2	34.8
	3	2.36	14.76	3.78	23591	1461	29.9	0	5.37	16.16	24.47	32.8	43.8	52.1
	4	2.88	18.01	4.61	28797	1784	36.8	0	7.08	21.46	32.54	43.6	58.3	69.4
	5	3.34	20.87	5.34	33361	2068	42.9	0	8.77	26.73	40.58	54.4	72.8	86.6
	10	5.06	31.65	8.10	50610	3140	66.5	0	16.92	52.75	80.46	108.2	144.8	172.6
	20	7.27	45.43	11.63	72657	4511	97.1	0	32.30	103.72	159.13	214.6	287.9	343.3
	30	8.79	54.91	14.05	87812	5454	118.3	0	46.95	153.83	236.93	320.1	430.1	513.2
	40	9.96	62.27	15.94	99579	6187	134.9	0	61.10	203.37	314.16	425.1	571.7	682.6
	50	10.93	68.34	17.49	109285	6791	148.7	0	74.89	252.47	390.96	529.6	712.8	851.5
75	12.83	80.17	20.52	128214	7970	175.6	0	108.23	373.88	581.59	789.5	1064.4	1272.4	
100	14.27	89.20	22.83	142654	8869	196.1	0	140.37	493.87	770.80	1048.1	1415.6	1691.8	

表 5.16 : $W(4, \lambda)$ のときの下位の記録値と記録時刻の組のもつ $\tilde{I}_{RT}^L(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	1.00	6.25	1.60	9990	618	12.2	0	1.84	5.44	8.21	11.0	14.6	17.4
	2	1.50	9.37	2.40	14985	926	18.3	0	2.75	8.16	12.32	16.5	22.0	26.1
	3	1.83	11.46	2.93	18315	1132	22.4	0	3.36	9.97	15.05	20.1	26.9	31.9
	4	2.08	13.02	3.33	20812	1287	25.5	0	3.82	11.33	17.11	22.9	30.5	36.3
	5	2.28	14.27	3.65	22810	1410	27.9	0	4.19	12.42	18.75	25.1	33.4	39.8
	10	2.93	18.31	4.69	29260	1809	35.8	0	5.37	15.93	24.05	32.2	42.9	51.0
	20	3.60	22.48	5.76	35941	2222	44.0	0	6.60	19.57	29.54	39.5	52.7	62.7
	30	3.99	24.97	6.39	39909	2467	48.8	0	7.33	21.73	32.80	43.9	58.5	69.6
	40	4.28	26.74	6.85	42742	2642	52.3	0	7.85	23.27	35.13	47.0	62.7	74.5
	50	4.50	28.12	7.20	44946	2778	55.0	0	8.26	24.47	36.94	49.4	65.9	78.4
n	75	4.90	30.63	7.84	48964	3027	59.9	0	8.99	26.66	40.24	53.8	71.8	85.4
	100	5.19	32.42	8.30	51821	3204	63.4	0	9.52	28.21	42.59	57.0	76.0	90.4

表 5.17 : $W(4, \lambda)$ のときの上位の記録値のもつ $\tilde{I}_R^U(n; \theta)$ の値

		θ													
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100	
n		1	1.00	6.25	1.60	9990	618	12.2	0	1.84	5.44	8.21	11.0	14.6	17.4
	2	1.75	10.94	2.80	17484	1082	21.8	0	3.62	10.83	16.37	21.9	29.3	34.8	
	3	2.36	14.77	3.78	23591	1461	29.8	0	5.36	16.14	24.46	32.8	43.8	52.1	
	4	2.88	18.01	4.61	28797	1784	36.7	0	7.06	21.43	32.52	43.6	58.3	69.3	
	5	3.34	20.87	5.34	33361	2068	42.8	0	8.71	26.65	40.47	54.4	72.7	86.5	
	10	5.06	31.65	8.10	50609	3139	66.0	0	16.61	52.36	80.11	107.8	144.4	172.2	
	20	7.27	45.44	11.63	72656	4510	96.1	0	31.18	102.38	157.80	213.3	286.6	341.9	
	30	8.79	54.91	14.06	87811	5453	116.9	0	44.77	151.25	234.37	317.5	427.4	510.6	
	40	9.96	62.27	15.94	99577	6185	133.1	0	57.83	199.48	310.19	421.2	567.8	678.7	
	50	10.93	68.34	17.49	109285	6789	172.8	0	70.41	247.12	385.64	524.2	707.6	846.2	
	75	12.83	80.17	20.52	128214	7966	172.8	0	100.70	365.03	572.61	780.6	1055.5	1263.5	
	100	14.27	89.20	22.83	142654	8865	192.8	0	129.83	481.22	758.15	1035.5	1402.0	1679.2	

表 5.18 : $W(4, \lambda)$ のときの下位の記録値のもつ $\tilde{I}_R^L(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	1.00	6.25	1.60	9990	618	12.2	0	1.84	5.44	8.21	11.0	14.6	17.4
	2	1.50	9.38	2.40	14990	925	18.4	0	2.75	8.16	12.32	16.5	22.0	26.1
	3	1.75	10.94	2.80	17469	1081	21.3	0	3.32	9.92	15.00	20.1	26.8	31.9
	4	1.90	11.89	3.04	19032	1174	23.2	0	3.72	11.21	16.99	22.8	30.4	36.2
	5	2.01	12.54	3.21	20060	1238	24.4	0	4.03	12.22	18.56	24.9	33.3	39.6
	10	2.26	14.10	3.61	22573	1391	27.3	0	4.93	15.38	23.50	31.6	42.4	50.5
	20	2.42	15.12	3.87	24138	1489	29.1	0	5.69	18.42	28.39	38.4	51.5	61.5
	30	2.47	15.47	3.96	24679	1523	29.7	0	6.07	20.10	31.17	42.2	56.9	68.0
	40	2.50	15.64	4.00	24996	1541	30.0	0	6.31	21.25	33.10	45.0	60.6	72.5
	50	2.52	15.79	4.04	25208	1553	30.2	0	6.47	22.12	34.57	47.0	63.5	76.0
n	75	2.56	15.99	4.10	25564	1572	30.5	0	6.72	23.58	37.15	50.7	68.7	82.3
	100	2.58	16.11	4.13	25750	1581	30.7	0	6.87	24.57	38.90	53.3	72.3	86.7

表 5.19 : $W(1, \lambda)$ のときの上位の記録データの相対差 $(\tilde{I}_{RT}^U(n; \theta) - \tilde{I}_R^U(n; \theta)) / \tilde{I}_R^U(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.000	.000	.000	.000	.000	-.001	—	.000	.000	.000	.000	-.001	.000
	3	.000	.000	.001	.002	.003	.004	—	.003	.003	.002	.000	.001	.001
	4	.000	.001	.002	.004	.006	.010	—	.009	.006	.005	.005	.003	.002
	5	.001	.001	.003	.005	.009	.014	—	.014	.010	.008	.016	.005	.004
	10	.001	.002	.006	.011	.020	.037	—	.040	.030	.022	.017	.013	.011
	20	.002	.003	.008	.017	.033	.068	—	.085	.059	.044	.033	.024	.020
	30	.002	.004	.010	.020	.040	.089	—	.119	.081	.059	.044	.032	.026
	40	.002	.004	.011	.022	.045	.103	—	.145	.098	.070	.052	.037	.030
	50	.002	.004	.011	.023	.048	.115	—	.167	.111	.079	.058	.041	.033
	75	.002	.005	.013	.026	.055	.137	—	.212	.132	.093	.067	.048	.038
	100	.003	.005	.014	.028	.059	.153	—	.244	.149	.102	.073	.051	.041

表 5.20 : $W(1, \lambda)$ のときの下位の記録データの相対差 $(\tilde{I}_{RT}^L(n; \theta) - \tilde{I}_R^L(n; \theta)) / \tilde{I}_R^L(n; \theta)$ の値

		θ												
		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
n	1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.000	.001	.001	-.001	.000	.000	—	-.001	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.049	.049	.050	.050	.049	.046	—	.027	.021	.015	.012	.009	.008
	4	.097	.097	.100	.100	.098	.083	—	.060	.042	.032	.025	.019	.015
	5	.140	.141	.144	.143	.137	.124	—	.087	.061	.048	.037	.027	.023
	10	.305	.310	.312	.313	.300	.270	—	.190	.138	.108	.086	.064	.053
	20	.501	.509	.516	.511	.496	.441	—	.318	.238	.187	.149	.113	.093
	30	.634	.638	.646	.643	.625	.564	—	.399	.303	.240	.193	.146	.122
	40	.730	.740	.744	.741	.720	.663	—	.468	.357	.288	.228	.174	.143
	50	.805	.816	.820	.818	.799	.733	—	.515	.401	.321	.258	.196	.162
75	.944	.956	.965	.963	.932	.861	—	.617	.481	.392	.315	.241	.199	
100	1.045	1.053	1.066	1.061	1.033	.960	—	.687	.541	.442	.358	.272	.228	

表 5.21 : $W(2, \lambda)$ のときの上位の記録データの相対差

$$\left(\tilde{I}_{RT}^U(n; \theta) - \tilde{I}_R^U(n; \theta) \right) / \tilde{I}_R^U(n; \theta) \text{ の値}$$

		θ												
n		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
	1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	-.002	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.000	.000	.000	.000	.001	.003	—	.005	.001	.001	.001	.001	.001
	4	.000	.000	.000	.000	.002	.007	—	.007	.004	.003	.002	.001	.002
	5	.000	.000	.000	.001	.002	.011	—	.010	.005	.004	.003	.003	.002
	10	.000	.000	.000	.001	.004	.024	—	.031	.016	.011	.008	.006	.005
	20	.000	.000	.000	.002	.007	.040	—	.066	.031	.020	.015	.010	.009
	30	.000	.000	.000	.002	.008	.050	—	.090	.041	.026	.019	.013	.011
	40	.000	.000	.001	.002	.009	.056	—	.109	.047	.030	.021	.016	.013
	50	.000	.000	.001	.002	.009	.061	—	.124	.053	.033	.024	.017	.014
	75	.000	.000	.001	.002	.010	.070	—	.151	.061	.038	.027	.019	.016
	100	.000	.000	.001	.003	.011	.075	—	.169	.067	.041	.029	.020	.017

表 5.22 : $W(2, \lambda)$ のときの下位の記録データの相対差

$$\left(\tilde{I}_{RT}^L(n; \theta) - \tilde{I}_R^L(n; \theta) \right) / \tilde{I}_R^L(n; \theta) \text{ の値}$$

		θ												
n		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
	1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.000	.000	.000	.001	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	.048	.048	.046	.048	.049	.048	—	.022	.011	.008	.006	.003	.003
	4	.096	.095	.096	.098	.099	.092	—	.045	.023	.015	.012	.008	.007
	5	.138	.138	.140	.141	.143	.136	—	.067	.034	.023	.017	.012	.010
	10	.295	.299	.300	.306	.312	.294	—	.150	.080	.053	.039	.028	.023
	20	.491	.490	.494	.503	.513	.489	—	.256	.139	.092	.068	.049	.040
	30	.614	.618	.581	.634	.643	.614	—	.328	.181	.121	.088	.063	.052
	40	.708	.714	.717	.730	.746	.709	—	.380	.212	.176	.104	.075	.061
	50	.782	.786	.792	.805	.821	.786	—	.427	.240	.162	.117	.084	.069
	75	.915	.919	.928	.942	.964	.912	—	.521	.295	.198	.143	.102	.084
	100	1.016	1.016	1.028	1.045	1.065	1.022	—	.579	.334	.227	.163	.116	.095

表 5.23 : $W(4, \lambda)$ のときの上位の記録データの相対差

$$\left(\tilde{I}_{RT}^U(n; \theta) - \tilde{I}_R^U(n; \theta) \right) / \tilde{I}_R^U(n; \theta) \text{ の値}$$

		θ												
n		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
	1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	-.001
	3	.000	.000	.000	.000	.000	.001	—	.001	.001	.000	.001	.000	.000
	4	.000	.000	.000	.000	.000	.002	—	.003	.002	.001	.002	.000	.001
	5	.000	.000	.000	.000	.000	.003	—	.007	.003	.003	.001	.001	.001
	10	.000	.000	.000	.000	.000	.007	—	.019	.007	.004	.004	.003	.002
	20	.000	.000	.000	.000	.000	.010	—	.036	.013	.008	.006	.005	.004
	30	.000	.000	.000	.000	.000	.012	—	.049	.017	.011	.008	.006	.005
	40	.000	.000	.000	.000	.000	.014	—	.057	.020	.013	.009	.007	.006
	50	.000	.000	.000	.000	.000	.014	—	.064	.022	.014	.010	.007	.006
	75	.000	.000	.000	.000	.000	.016	—	.075	.024	.016	.011	.008	.007
	100	.000	.000	.000	.000	.000	.017	—	.081	.026	.017	.012	.009	.008

表 5.24 : $W(4, \lambda)$ のときの下位の記録データの相対差
$$\left(\tilde{I}_{RT}^L(n; \theta) - \tilde{I}_R^L(n; \theta) \right) / \tilde{I}_R^L(n; \theta) \text{ の値}$$

		θ												
n		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
1		.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2		.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3		.048	.047	.048	.048	.048	.051	—	.013	.005	.003	.002	.002	.002
4		.093	.095	.095	.094	.096	.098	—	.027	.011	.007	.005	.004	.003
5		.137	.138	.137	.137	.139	.144	—	.039	.016	.010	.008	.006	.005
10		.297	.298	.298	.296	.301	.311	—	.091	.036	.023	.018	.013	.011
20		.489	.488	.487	.489	.493	.514	—	.160	.062	.041	.030	.022	.019
30		.615	.614	.615	.617	.620	.646	—	.208	.081	.052	.039	.029	.024
40		.709	.709	.711	.710	.714	.745	—	.244	.095	.061	.045	.033	.028
50		.782	.781	.784	.783	.789	.822	—	.276	.106	.069	.051	.037	.031
75		.913	.916	.914	.915	.925	.962	—	.338	.131	.083	.061	.045	.038
100		1.011	1.013	1.010	1.012	1.027	1.067	—	.386	.149	.095	.069	.051	.043

6 まとめ

本論では、まず、記録数の正確な分布、極限分布、記録時刻の分布について考察した。特に、正確な分布では再帰的に求めるため、パーセント点などの数値計算がやや困難であるが、極限分布を考えると、その計算が容易になるという点で有用である。また、離散型分布の場合には与えられたサイズに応じたパーセント点は一般には得られないが、極限分布は連続型になるので、その問題はなくなるという利点もある。さらに、その応用例として、実際の米国のメジャーリーグのデータから得られる記録数にもとづいて打者の競技水準に関する仮説検定を行った。また、記録データのもつ K-L 情報量について考察し、特に Weibull 分布 $W(\alpha, \lambda)$ からの無作為標本から得られた上位 (下位) の記録値、記録時刻等に関する K-L 情報量を求めた。実際に母数 α, λ の値を変化させて、記録値等に含まれる尺度母数 λ に関する K-L 情報量の値を数値的に求めて表にし、それらの値から、Weibull 分布の特徴を把握することができ、指数分布の場合との比較も行うことができた。本論では $\alpha = 1, 2, 4$ の場合について、K-L 情報量の値を求めたが、 α が他の値をとるときについても考察する必要があると思われる。また、今後の課題としては、形状母数 α を未知として記録値等に含まれる α に関する情報量についても考察することが望まれる。

参考文献

- [ArnBaN98] Arnord, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998). *Records*. Wiley, New York.
- [HiAk02] Hida, E. and Akahira, M. (2002). On the construction of prediction intervals for record values. (In Japanese), *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, **1273**, 165-177.

- [HoN03] Hofmann, G. and Nagaraja, H. N. (2003). Fisher information in record data. *Metrika* **57**, 177-193.
- [IO5] 池田哲雄 (編集兼発行人)(2005). スポーツスピリット 21, No.20. ベースボール・マガジン社.
- [Ni78] 西尾真喜子 (1978). 確率論. 実教出版.
- [TF88] 竹内啓, 藤野和建 (1988). スポーツの数理科学. 共立出版.
- [YAk04] Yamamoto, T. and Akahira, M. (2004). Fisher and Kullback-Leibler informations contained in record data. (In Japanese), *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, **1380**, 1-32.