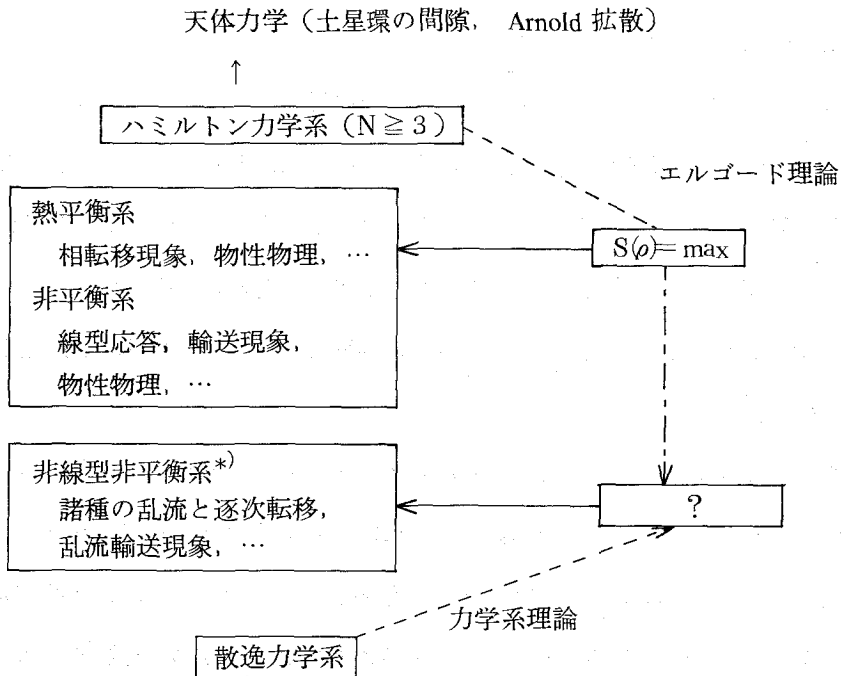


非線型非平衡系の逐次転移と乱流

九大理 森 肇

Boltzmann に始まり Gibbs によって体系化された統計熱力学は、揺動散逸定理を支点として熱平衡系の線型応答および熱平衡近傍の不可逆過程をも包含することとなった。しかし、表 1 のように、熱平衡から遠く隔った非線型非平衡系、たとえば、流体の乱流では、マクロの性質



- *) A. 流体力学（古典，量子），レーザー物理，反応拡散系，プラズマ，半導体の熱い電子系，…核反応系
B. 大気物理学，発生生物学，集団生物学，…

表 1 統計物理とその周辺

が統計熱力学とは全く異質な統計法則に支配されていると考えられる。また、体系を熱平衡から次第にずらしていくとき、時空の対称性が逐次に変化して乱流が出現する様子は、熱平衡系の相転移とは全く異なる性質をもつ。最近、これらの現象が、実験および理論の両面から活発に研究されるようになってきた。その背景および統計物理的な問題について議論した。

乱流およびそれへの逐次転移の研究は、1940 年代の Landau, Onsager, Heisenberg や

Feynman lecture¹⁾ の Feynman のように、しばしば physicists によって取上げられてきた、いわば、統計物理の夢といえる。今回の、研究の世界的活発化は、電算機実験および高精度の流体実験によるいくつかの新事実の発見と、力学系理論的および統計物理的な新しい概念と観点の導入によるわけであるが、はたしてこの夢がかなうかどうか？ 今回のもう一つの特徴は、天体力学およびエルゴード理論における不安定軌道、カオス領域の発見を契機として、ハミルトン力学系のカオスの研究が、非可積分系の量子力学を含めて、同時に行われていることである。

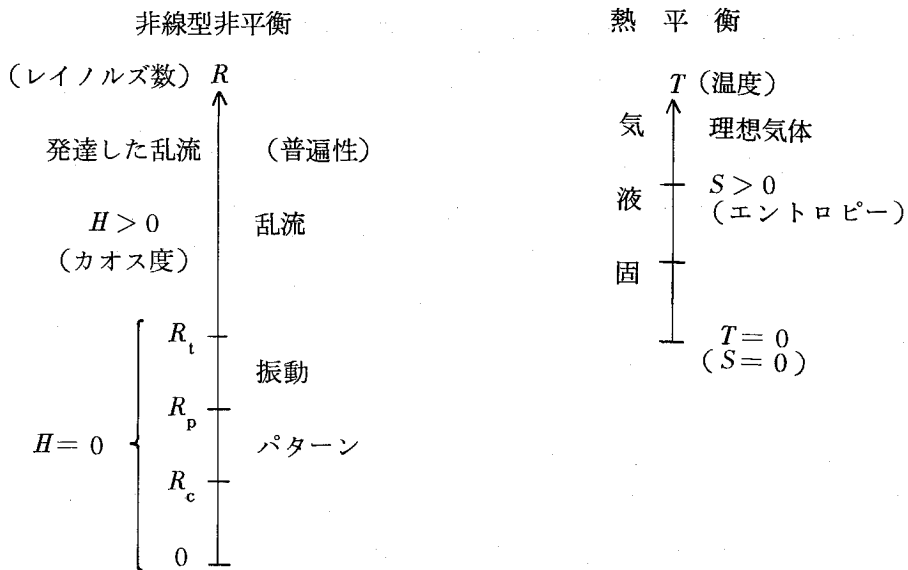


図1. 非線型非平衡系の逐次転移と熱平衡系の相転移

図1は、非線型非平衡系の逐次転移と熱平衡系の3相（固相、液相、気相）とを比較したものである。熱平衡の液体を2つの水平板にはさみ下から熱すると、よく知られているように、2つの水平板間の温度差 R がある値 R_c に達すると、熱対流による流れのパターンが現われる。さらに温度差を上げていくと、ある値 R_p を境としてパターンが時間的に振動する。さらに上げていくと、ある値 R_t で乱流へ転移し、流速がランダムな時間変化を行うようになる²⁾。つまり、空間のある点での、ある流速成分 $u(t)$ の時間相関関数

$$C(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt u(t) u(t+\tau)$$

が混合性 ($C(\tau) \rightarrow 0$ as $\tau \rightarrow \infty$) をもつようになる。いいかえれば、 $u(t)$ の強度スペクトル $C(\omega)$

が連続スペクトルとなる。このような逐次転移が、多くの場合に観測された³⁾。じつは、逐次転移の詳細は、流体のプラントル数 P （粘性率と熱伝導率の比）、容器の形状、平均流の構造に依存するのである。たとえば、容器のアスペクト比 Γ が小さいときには、パターン振動は一つの基本振動数 ω_1 の周期運動から始まり、つぎに二つの基本振動数 ω_1, ω_2 をもつ準周期運動へ転移し、ついで乱流へ転移する⁴⁾。このとき、実験によれば、winding number ω_1/ω_2 が R_1 で簡単な分数になるという。その分数を m_1/m_2 とすれば、振動数 $\omega_L = \omega_1/m_1 = \omega_2/m_2$ の周期運動となるが、じつは、ある実験によれば、 R_1 の直前で $\omega_L/2^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)の振動数をもつ低調波が順次に出現するという（低調波分岐）。これらの低調波は R のある値 R_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)で順次に出現し、 R_∞ が乱流の発生点 R_1 を与える。

このような低調波分岐は、じつは、一変数の差分方程式

$$x_{p+1} = g(x_p), \quad (p = 1, 2, \dots)$$

の分岐理論ですでに知られていた。 $g(x)$ が極大をもつ滑かな関数であれば、その極大点近傍に着目して

$$g(x) = rx(1-x), \quad (0 < x < 1)$$

とおけよう。そのとき、 $r_0 = 1, r_1 = 3, r_2 = 1 + \sqrt{6}, \dots, r_\infty = 3.5700$ とすれば $r_n < r_{n+1}$ なる r で、 2^n 重周期運動がえられる。つまり、 r_n で $\omega_L/2^n$ 型の低調波分岐が現われる。しかも、相つぐ区間の比は、 r_∞ の近傍で漸近的に

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \simeq \delta = 4.669 \dots$$

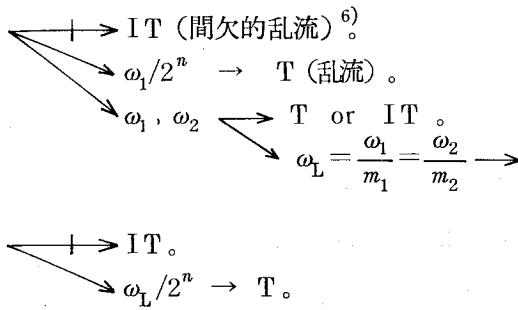
と一定となり、相つぐスペクトル強度の比も

$$\frac{P^{(n)}(\omega)}{P^{(n+1)}(\omega/2)} \simeq \mu = 6.57 \dots$$

と n によらない一定値となる (Feigenbaum, 1979)。驚くべきことに、上述の流体実験は、小さな n であるにも拘らず、これらのスケーリング則を近似的に満している⁵⁾。

可能な逐次転移の全体像を明らかにすることが、現在の課題の一つである。上述のように、ある振動数 ω_1 の周期運動が励起されるとき、乱流にいたる逐次転移のタイプは

$$\text{熱平衡} \rightarrow \text{パターン} \rightarrow \omega_1 \rightarrow$$



と5つのルートがあると考えられる。このほか周期運動なしの逐次転移

$$\text{熱平衡} \rightarrow \text{パターン} \rightarrow \text{T}$$

が Lorenz 模型では現われる。また、Ahlers らの実験によれば³⁾ P が小さく、 Γ が大きいとき、パターンの出現さえなしに

$$\text{熱平衡} \rightarrow \text{T}$$

と、熱平衡の分枝からいきなり乱流へ転移する。なお上記で、 $\rightarrow$ は準安定なカオスを伴う転移である。

発生直後の乱流 ($R \sim R_c$) は長波長のモードからなり、その統計的性質は境界条件、平均流の構造、発生機構に依存すると思われる。また、Ahlers らの乱流を除けば、発生直後の乱流は、有限個の長波長モードのフーリエ成分の時間変化、つまり、相空間における力学系の奇妙なアトラクタによって表わせると考えられている。熱対流に対する Lorenz 模型

$$\dot{X} = -10(X - Y),$$

$$\dot{Y} = rX - Y - XZ,$$

$$\dot{Z} = XY - (8/3)Z$$

は、このような観点からの乱流の研究の契機となった。この一見簡単な常微分方程式の、 $t \rightarrow \infty$ における解は、殆んどすべての初期値に対して

- 1) $0 < r < 1$ では伝導解

$$X = Y = Z = 0$$

- 2) $1 < r < r_1 = 24.06$ では対流解

$$X = Y = \pm \sqrt{4(r-1)}, \quad Z = r-1$$

- 3) $r_1 < r < r_2 = 24.74$ では

$$a. \quad X = Y = \pm \sqrt{4(r-1)}, \quad Z = r-1$$

b. nonperiodic orbits (カオス)

4) $r_t < r < r_p = 145$ では

nonperiodic orbits (カオス)

となる。3) では2つの流域 (basin), 対流の流域とカオスの流域がある。 $r > r_p$ では周期解と非周期解とが交互に現われ (Shimada-Nagashima, Shimizu-Morioka, '78), $r \rightarrow \infty$ では2つの対流点を8の字に回る周期軌道となる (Shimizu, '79)。

上記3), 4) の非周期軌道はランダムな運動を表わし, Lorenz の奇妙なアトラクタとよばれる, 非可算無限回ランダムに折りたたまれた sheet の上を閉じることなく彷徨し続けるのである。このような, 決定論的力学系の非周期軌道が示すランダムな運動はカオス (chaos) とよばれる。カオスの本質は混合性にあり, それを捉えるには, 初期値の少しずつ異なる多数の軌道の集団をみるのがよい。たとえば, 相空間 (X, Y, Z) の小さなセル (cell) が, 時間と共に, どのように変形していくかをみるのである。変形の詳細は, 伸縮率が0, $\pm$ なる方向の数 m^0 , $m^\pm$ および $\pm$ なる伸縮率の算術平均 $\lambda^\pm$ に依存する。カオスのときには $m^\pm \geq 1$ であり, しかもセルの体積は急速に0となるので, セルは急速に細長いシートまたはリボンに変形していく。Lorenz 模型では $m^0 = m^\pm = 1$ である。このセルは, $t \rightarrow \infty$ では, 奇妙なアトラクタに吸引されると同時にそれを覆う。したがって, セルの, $t \rightarrow \infty$ での形状は, そのまま, 奇妙なアトラクタの形状を表わすと考えてよい。このことから, 奇妙なアトラクタの次元 (相似次元) は

$$D = m^0 + m^+ \{1 + |\lambda^+/\lambda^-|\}$$

によって与えられる (Mori, '80)。Lorenz アトラクタの次元は, $r = 40$ ($\sigma = 16, b = 4$) で $D \doteq 2.06$, Hénon アトラクタの次元は, $a = 1.4, b = 0.3$ で $D \doteq 1.26$ となる。非整数の次元は奇妙なアトラクタのランダムな形状の特徴である。

上述のように, 一次元差分系の一山変換や Lorenz 系のような少数自由度の力学系が, 短時間では何の変哲もない軌道をつくるにすぎないが, 長時間 $t \rightarrow \infty$ の極限では, 奇妙なアトラクタとよばれる singular なランダムな構造をつくり出し, 統計力学を不可欠とする。今までの統計力学は自由度無限大の極限にその基盤を求めてきたが, このことは, そのような観点を改めて, もっと広いスコープで統計力学を展開しなければならないことを示唆している。

発達した乱流 ($R \gg R_t$) の著しい特徴は, 図1の理想気体に対応して, 普遍的な性質をもつことである。これは, 非線型の慣性力によって多数の短波長モードが励起され, それらが境界条件や平均流の構造に強く依存する長波長モードとは統計的に独立となるからである。短波長モードの励起に対する伝統的な描像は, 1940年代に Kolmogorov, Landau, Weizsäcker,

Heisenberg, Onsager らのせき学によって作られたエネルギーカスケードである。図2はそれを示

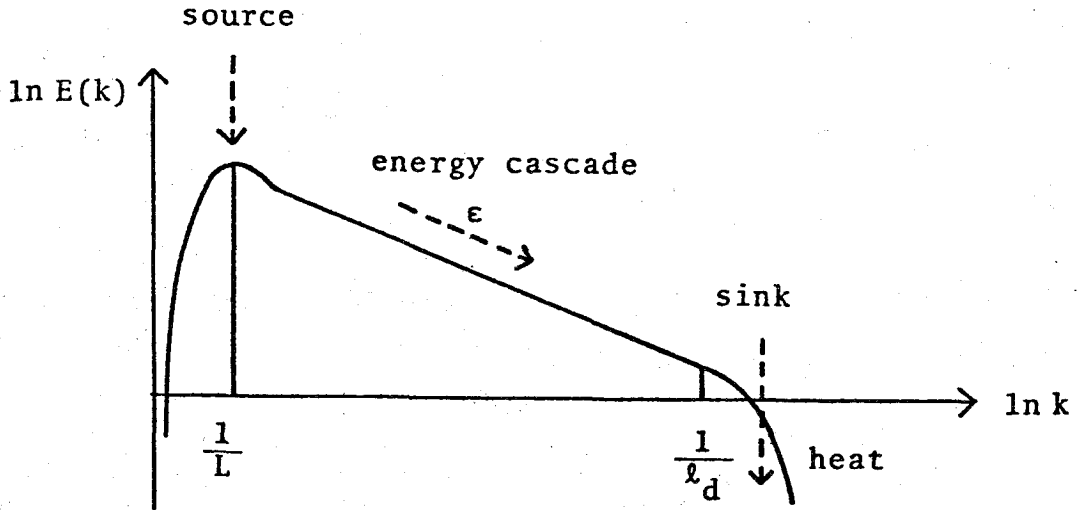


図2 波数空間におけるエネルギーカスケード

したものである。ここで $E(k)$ は単位質量当りのエネルギースペクトルであり、 $E(k)dk$ は波数の大きさが $(k \sim k + dk)$ の間にあるモードのもつ乱流エネルギーの平均値を表わす。スケール L の長波長モードに供給されたエネルギーは、平均移動率 ε で短波長モードに順次に移され、スケール $\ell_d = (R/R_1)^{-3/4}L$ になると、粘性により散逸する。慣性領域 $L^{-1} \ll k \ll \ell_d^{-1}$ ではスケールリング則

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} (kL)^{-\mu/3},$$

$$\langle |\delta \varepsilon(k)|^2 \rangle \sim \varepsilon^2 (kL)^\mu$$

が成立つ。ここで $\delta \varepsilon(k)$ は、波数 k におけるエネルギー移動率の揺ぎである。 μ は間欠性指数とよばれ、その実験値は $0.3 \sim 0.5$ である。一般に、距離 r だけ離れた2点間の速度差の揺ぎ $\delta v(r)$ について

$$\langle |\delta v(r)|^n \rangle \sim (\varepsilon r)^{n/3} (r/L)^{-(n-3)\mu/3}$$

が得られる。(Nelkin-Bell, '78)。

この美事なエネルギーカスケード像を発展させ、乱流統計の本質を捉えるためには、(1) μ

をきめる理論をつくる, (2) エネルギーカスケードの具体的な物理的モデルをつくる, (3) 長波長領域の, ε および L 以外の詳細な性質が洗い流されて, 慣性領域で普遍性が成立する機構を明らかにすることが必要であると考えられる。

発達した乱流は, 大小様々の直径をもった渦糸からなると考えられる, 渦糸はランダムに曲折し, 溶液中の高分子鎖のように, 多数の blob セグメントが連なったランダムな鎖と考えよう。いま, $t=0$ で, このような blob の一つを取り, それが時間と共にどのように伸長し曲折していくかに着目する。時刻 t における直径を $\ell(t)$, 体積を $V(t)$ とすれば, $r(t) \equiv \ell(t)/\ell(0)$ として,

$$N(t) \equiv V(t)/[\ell(t)]^3 = [r(t)]^{-D}$$

が成立つ。ただしここで $D=3-\mu$ である。この $N(t)$ は時刻 t における blob の数を与えるわけであるが, それらの空間的拡りの自乗平均は, $N \gg 1$ のとき,

$$\langle |R(t)|^2 \rangle = [N(t)]^{2\nu} [\ell(t)]^2$$

とかける。ただしここで ν は高分子鎖でよく使われる拡りの指数である。したがって, $r(t)$ の時間的変化がわかれば, 渦糸が空間的にどのように拡散していくかがわかることになる。 $r(t)$ を渦糸の離散的カスケード模型 (Mori-Fujisaka, '80) を使ってきめると

$$\langle |R(t)|^2 \rangle = \frac{\ell^2(0)}{[1 - (t/t_\infty)]^{2\eta}}$$

が得られる。ここで $t_\infty \sim [\ell^2(0)/\varepsilon]^{1/3}$ は渦糸の寿命であり, 指数 η は

$$\eta = 3[(3-\mu)\nu - 1] / (2 + \mu)$$

で与えられる。 μ と ν の間には $\nu = 1/(2-\mu)$ が成立つと思われる。したがって, $\mu = 0$ であれば, $\nu = 1/2$, $\eta = 3/4$ となる。Fujisaka-Mori ('79) によれば, $\mu = 1/3$ である。そのとき, $\nu = 3/5$, $\eta = 0.77$ となる。

発達した乱流は普遍的な統計的性質をもつが, そのエネルギー分布は理想気体の等分配則 $E = (3/2)Nk_B T$ とは異った。また, 渦糸の拡散はブラウン運動による拡散 $\langle |R(t)|^2 \rangle = 6Dt$ とは全く異った。これは, 乱流統計が熱平衡系の Boltzmann-Gibbs 統計とは異質の統計法則に支配されていることを示す。今まで, 流速に対する Navier-Stokes 方程式の統計理論がいろいろと展開されてきた。しかし, 統計熱力学の基本原理解である等確率の原理や変分原理 $S(\rho) = \max$ を, リウヴィルの方程式から演繹することに未だ成功していないことを考えると, 乱流統計をきめる変分原理 ($S(\rho) = \max$ に代るもの) を発見することがまず必要であると思われる。

μ をきめるための、間欠性エントロピー極大の仮説 (Fujisaka–Mori, '79) はその一つの側面を捉えたものと思われる。

以上、乱流の統計的性質と乱流発生にいたる逐次転移に関して、二三のトピックスを考察してきた。現在、実験および理論の両面から最も活発に研究されている課題は

I. 逐次転移の全体像とその機構

- a) P , Γ , 平均流の構造への依存性
- b) 周期外力, 外来ノイズの効果

II. 乱流の表現とその統計

- a) 弱い乱流 ($R \sim R_t$)
 - 1) 相空間の奇妙なアトラクタの統計
 - 2) 境界条件, 発生機構への依存性
- b) 発達した乱流 ($R \gg R_t$)
 - 1) 流体空間のランダムな渦糸の統計
 - 2) 普遍性, スケーリング則の基礎
- c) 外来ノイズと内来カオスの相克

である。これらの研究は、統計熱力学に対応して

III. 統計乱流力学

- a) 伸長・曲折を記述する巨視的指数 (D , ν , ...)
- b) カオス度を表わす情報エントロピーとその変分原理の発見
(KS エントロピー, 間欠性エントロピー, ...)
- c) 乱流輸送現象の統計理論

の、新しい観点からの研究を促すものと思われる。とくに、現在、弱い乱流と発達した乱流とは全く異なる表現が使われているが、それらの統一的表現への模索は乱流理論に新しい発展のモータメントをもたらすに違いない。

物性物理学を開花させ、その中ではぐくまれてきた統計物理学は、ミクロの世界とマクロの世界とを橋渡しする物理からさらに発展して、時間的 and/or 空間的にスケールの異なる2つの異質な世界をつなぐ物理として成長しようとしている、といえるのではなかろうか？

文 献

- 1) R.P. Feynman et al, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II (Addison–Wesley, Reading, 1964).

- 2) *Statistical Physics*, ed. L. Pál et al, (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975).
- 3) *Nonlinear Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **64** (1978).
- 4) D. Ruelle & F. Takens, Commun. Math. Phys. **20** (1971) 167.
J.B. McLaughlin & P.C. Martin, Phys. Rev. **A12** (1975) 186.
- 5) M.J. Feigenbaum, Phys. Lett. **74A** (1979) 375.
- 6) P. Manneville & Y. Pomeau, Phys. Lett. **75A** (1979) 1.
- 7) I. Shimada & T. Nagashima, Prog. Theor. Phys. **59** (1978) 1033.
T. Shimizu & N. Morioka, Phys. Lett. **69A** (1978) 148.
- 8) T. Shimizu, Phys. Lett. **71A** (1971) 319.
- 9) H. Mori, Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 1044.
- 10) M. Nelkin & T.L. Bell, Phys. Rev. **A17** (1978) 363.
- 11) H. Mori & H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 1931.
- 12) H. Fujisaka & H. Mori, Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 54.

なお、実験は、Ahlers, Bergé, Gollub, Libchaber, Swinney の各グループが Phys. Rev. A, Phys. Lett., J. Fluid Mech. に発表または投稿中である。また、理論は、Prog. Theor. Phys., Phys. Rev. A, J. Stat. Phys. 等の他 Math. Phys. 系の雑誌にでる。