

Periods of automorphic forms and special values of L -functions

Masaaki Furusawa

古澤 昌秋

広島大学 理学部 数学教室

講演：1998 年 1 月 29 日

上記の表題で概説的な話をさせて頂いた。表題を邦訳すれば、「保型形式の周期と L 函数の特殊値」ということになる。確かに、代数幾何学的な意味での周期とここで扱う保型形式の周期とは、関係はあるが同一のものではなく、余り良い命名ではなかったかもしれないが、現在ではすでにこの用語は定着しているように思われるので、ご容赦願いたい。（これは、講演でも話したが、筆者のように代数幾何を知らないことにコンプレックスを持っている人間にとっては、周期という言葉を使えるのには、正直言って、何となく嬉しいところがある。）

また、はじめに断わっておきたいのだが、本文において、現実よりも単純化した、例えば、現在に於いては、まだ good prime でしかいえていないことを、あたかもすべての素点で成り立つかのように、表現している個所がある。これは、 L 函数の特殊値という繊細な性質を持つ話題からすると、許されざることであると思われる方々も居られると思うが、この難しい問題への保型形式側からのアプローチのアイデアを説明するのが、講演ならびにこの小文の主眼であり、アイデアを分かり易い形で提示するためにそうしたことをご了承いただきたい。

参考文献については、網羅的でなく、直接に本文中で参照しているもののみで、重要な文献で見落としているものも多いと思われることをあらかじめお断りしておく。（Uzawa [19] は、興味深い本文と共に、文献表がとても詳しく、是非参照されたい。）

記号: 特に断わらない限り、 F によって代数体を、 $\mathbb{A}$ によって、 F 上のアデール環 $\mathbb{A}_F$ を表す。

1 保型形式の周期とは?

まず、言葉の定義をある程度はっきりしておこう。

定義: G を F 上の代数群とし、 H を G の F 上の代数的部分群とする。このとき、 $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式 φ に対して、積分

$$\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \varphi(h) \, dh,$$

を φ の H 上の周期、または、 H 周期 (H -period) という。

ここで、いくつかのことを注意しなければならない。まず最初に、個々の状況によっては、積分の領域として、 Z_G を群 G の中心としたとき、 $H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ の代わりに $(Z_G H)(F)\backslash (Z_G H)(\mathbb{A})$ をとることがある。次に、 G_1 を G_2 の部分群とすると

$$G = G_1 \times G_2, \quad H = \Delta G_1 \subset G \quad (G_1 \text{ を対角に埋め込んだもの}),$$

とすれば、 φ_1, φ_2 をそれぞれ、 G_1, G_2 の保型形式としたとき、 G 上の保型形式

$$\varphi(g_1, g_2) = \varphi_1(g_1) \varphi_2(g_2)$$

に対して、 φ の H 周期は、

$$\int_{G_1(F)\backslash G_1(\mathbb{A})} \varphi_1(g_1) \varphi_2(g_1) \, dg_1 = (\varphi_1, \varphi_2|_{G_1})_{G_1},$$

すなわち、大きな群 G_2 上の保型形式 φ_2 を部分群 G_1 に制限して、その保型形式 φ_1 との Petersson 内積を取ったものになっている。今後は、断わりなしに、此の種類の積分も周期と呼ぶことにする。(これは余談になるが、最近、このような状況で、大きな群上に「典型的な」保型形式 (例えば theta 函数のようなもの) を考え、その部分群への制限と部分群上の保型形式 φ との Petersson 内積をとったものを、Steve Rallis らは、特に、 φ の余周期 (coperiod) と呼んで考察している。) 最後に積分の収束について、cusp form の場合については、問題のない場合が殆んどであ

るが、Eisenstein 級数の場合については、積分の正規化 (regularization) を考えなければならないことが多い。(この問題に関して、Jacquet-Lapid-Rogawski [14] は、大変興味深く思われる。) 例えば、古典的な Kronecker の極限公式は群 $GL(2)$ 上の Eisenstein 級数の二次体に対応する torus 上の周期と関連しており、一般に Eisenstein 級数の周期を考察することはとても興味深い問題と思われるが、この小文では、今後は、cusp form の周期のみを考察する。

さて、それでは何故、保型形式の周期を考えることが興味深いのであろうか。まず、古典的な Fourier 係数は、上記の周期のひとつの例になっていることは明らかである。では、上のようにさらに一般化した形で考える意義は何処に在るのだろうか。それについては、次の二つの観点から答えることができる。ひとつは、保型形式の functorial lifting の研究からの観点であり、もうひとつは、 L 関数の函数等式での値の研究からの観点である。しかし、第一の観点においても、保型形式の functorial lifting によるイメージは通常、ある L 関数の、 $s = 1$ に於ける極の存在によって特徴づけられることが多く、従って、保型形式の周期としてある保型 L 関数の $s = 1$ に於ける特殊値を考察していると観ることが出来る。よって、いずれの見方も、保型形式の周期と L 関数の特殊値の結び付きを調べていると言うことができる。そして、函数等式を、 $s \mapsto 1 - s$ に関してとなるように正規化したとき、 L 関数の $s = \frac{1}{2}, 1$ に於ける値は、それぞれ、算術幾何学的には、Birch & Swinnerton-Dyer 予想、Tate 予想と結び付いており、此の点からも、発展性のある課題と思われる。

とにかく、言葉だけではうまく説明できないので、次節でいくつかの例を説明しよう。

2 例

まず、functorial lifting に関係した例として、 $GSp(4)$ について考えてみよう。しばらくの間、

$$G = GSp(4) \\ = \left\{ g \in GL(4) \mid g^T \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix} g = \nu(g) \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \nu(g) \in GL(1) \right\},$$

とする。ここで、 g^T は、 g の転置行列を表わす。さて、 ${}^L G^\circ$ で、 G の L -group の連結成分を表わすと、

$${}^L G^\circ = GSp(4, \mathbb{C}) \hookrightarrow GL(4, \mathbb{C}) = {}^L GL(4)^\circ,$$

より、 $G(\mathbb{A})$ の cuspidal automorphic representation (π, V) に対して、 $GL_4(\mathbb{A})$ の automorphic representation (π', V') で、

$$L(s, \pi) = L(s, \pi'),$$

となるものが存在することが期待される。ここで、左辺は $GSp(4)$ の次数 4 の spin L -function と言われるもの、右辺は $GL(4)$ の standard L -function と言われるものである。実際、 (π, V) が generic (すなわち、Whittaker Fourier 係数が消えない場合) ならば、 $GL(4)$ を $GO(3, 3)$ と関係づけることによって、Jacquet, Piatetski-Shapiro & Shalika [15] (cf. D. Soudry [18]) により、この lifting は、theta correspondence を用いて実現されている。

さて、ここでさらに説明を続けるのに、簡単のため、 π の central character ω_π について、 $\omega_\pi = 1$ とする。このとき、

定理 (Jacquet, Piatetski-Shapiro & Shalika)

(σ, W) を $GL_4(\mathbb{A})$ の cuspidal automorphic representation とするとき、これが、 $PGSp_4(\mathbb{A})$ の generic cusp form 達からの lifting の image に入っている必要十分条件は、ある $\varphi \in W$ に対して、

$$\int_{\mathbb{A}^\times GL_2(F) \backslash GL_2(\mathbb{A})} \int_{M_2(F) \backslash M_2(\mathbb{A})} \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \psi(\text{tr} X) dX dg \neq 0,$$

となることである。ただし、ここで、 ψ は、 $F \backslash \mathbb{A}$ の非自明な character を表わす。

つまり、上記の周期を $GL(4)$ 上の cusp form に対して考察することによって、lifting の image が特徴づけられる、というのである。証明は、双方向について、Whittaker Fourier 係数の pull-back を計算することによって実行される。(最近 Friedberg & Jacquet [8] は、この lifting への、relative trace formula によるアプローチの重要な第一歩として、fundamental lemma を証明している。)

さて、ここで上の定理を少し違った角度から眺めてみよう。まず、

$${}^L PGSp(4)^\circ = Sp(4, \mathbb{C})$$

であることに注意しよう。このとき、 $GL(4, \mathbb{C})$ の exterior square representation

$$\wedge^2 : GL(4, \mathbb{C}) \rightarrow GL(6, \mathbb{C}),$$

について、

$$\wedge^2|_{Sp(4, \mathbb{C})} = \mathbb{C}(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \oplus (5 \text{ 次元の subrepresentation}),$$

となることから、 L -function 側からの考察によれば、lifting の image は、exterior square L -function $L(s, \sigma, \wedge^2)$ が、 $s = 1$ に極を持つと言う条件によって特徴づけられなければならない、ということになる。この L -function については、Jacquet & Shalika [16] による積分表示

$$L(s, \sigma, \wedge^2) = \int_{\mathbb{A}^\times GL_2(F) \backslash GL_2(\mathbb{A})} \int_{M_2(F) \backslash M_2(\mathbb{A})} \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \cdot E(g, s) \psi(\text{tr} X) dX dg,$$

があり、実際、これから、極の存在が上記の周期によって特徴づけられることがいえるのである。

また、 (σ, W) が、 (π, V) という $PGSp_4(\mathbb{A})$ の cuspidal representation の lifting による image になっているとすると、

$$L(s, \sigma, \wedge^2) = \zeta_F(s) L(s, \pi, \text{St}),$$

ここで、 $L(s, \pi, \text{St})$ は、次数 5 の通常 standard L -function とよばれるもの、になっている。従って、上記の周期を、 $L(1, \pi, \text{St})$ の lifted form による表示とみなすことができる。筆者は算術幾何学については無知であるが、この表示は、Tate 予想の観点から興味深いのではないと思われる。

以上の説明で、保型形式の周期というのは、theta correspondence, relative trace formula, Rankin-Selberg method, arithmetic geometry などの様々な理論が交錯する興味深い研究課題であると、少しは納得して頂けたらどうか。

この例と同様に functorial lifting に関係した例で、より深く研究されているのは、 $GL(2)$ の quadratic base change である。(Harder, Langlands & Rapoport [11], Ye [21] 等をまず足掛かりとして見られたい。) この場合に関係する L -function は、Asai-Oda L -function である。

では、第二の系統の例について説明しよう。まず、Hecke の積分表示を思い起こそう。 (π, V) を $GL_2(\mathbb{A})$ の cuspidal automorphic representation とする。このとき、 $\phi \in V$ を適当に取ることによって、

$$L(s, \pi) = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \phi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |a|^{s-\frac{1}{2}} d^\times a,$$

となる。とくに、

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi\right) = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \phi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d^\times a,$$

となり、函数等式の中心での値を $GL(2)$ -form の $GL(1)$ 周期として捕らえることが出来る。前にも触れたように、この種類の表示は、Birch & Swinnerton-Dyer 予想との関係から、大変興味深く思われる。これについては、次の様な二つの $GL(2n)$ への一般化が知られている。

まずひとつは、Bump, Furusawa & Ginzburg [5] によるもので、bad prime 達からの寄与を除いて、

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi\right) = \int_{GL_n(F) \backslash GL_n(\mathbb{A})} \phi \begin{pmatrix} h & 0_n \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} dh,$$

となることが示されている。

もうひとつは、上記の Hecke 周期を、 $Z_{GL_2} \backslash GL(1) \times GL(1)$ 周期と見て、一般化したもので、簡単のため、 $GL_{2n}(\mathbb{A})$ の cuspidal representation (π, V) は、自明な central character ω_π を持つとすると、Bump & Friedberg [6], Friedberg & Jacquet [7] によって、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{A}^\times (GL_n(F) \times GL_n(F)) \backslash GL_n(\mathbb{A}) \times GL_n(\mathbb{A})} \phi \begin{pmatrix} h_1 & 0_n \\ 0_n & h_2 \end{pmatrix} dh_1 dh_2 \\ &= \begin{cases} L\left(\frac{1}{2}, \pi\right), & L(s, \pi, \wedge^2) \text{ が、 } s=1 \text{ を極に持つとき、} \\ 0, & \text{そうでないとき、} \end{cases} \end{aligned}$$

となることが示されている。

後者は、lifting の image 以外では、消滅してしまうので、その意味では、前者より一般性が無いとも言えるが、見方を変え、一つの周期で、lifting condition と L 函数の中心での値の両方についての情報を得られることになり、問題によっては、後者は、より強力な手段になることを示唆している。(例えば、Ash & Ginzburg [1] を見よ。)

さて、Hecke 周期については、もうひとつ別の方向への一般化が考えられる。それは、Hecke 周期を $Z_{GL_2} \backslash$ (split maximal torus) 上の周期と見做し、split maximal torus を non-split maximal torus で置き換えることである。すなわち $K = F(\sqrt{D})$ を F の二次拡大とすると、 $K^\times$ と同型な $GL(2)$ の maximal torus

$$T_K = \left\{ \begin{pmatrix} a & bD \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 - b^2 D \in GL(1) \right\} \subset GL(2),$$

について、この群上の周期を考えると言うのである。Theta correspondence を用いて、Waldspurger [20] は、 (π, V) を $PGL_2(\mathbb{A})$ の cuspidal automorphic representation とするとき、

$$\int_{\mathbb{A}^\times T_K(F) \backslash T_K(\mathbb{A})} \phi(t) d^\times t \neq 0,$$

となる $\phi \in V$ が存在するならば、

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi\right) \cdot L\left(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{sgn}_K\right) \neq 0,$$

ただし sgn_K は K に対応する quadratic character、となることを示した。実際、このとき、上記の周期の絶対値の二乗は、本質的に上記の L 函数の特殊値に等しく、これによって、Guo [10] は、

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi\right) \cdot L\left(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{sgn}_K\right) \geq 0,$$

を示した。

逆方向の主張、すなわち、 L 函数の non-vanishing から周期の non-vanishing を得るためには、 $GL(2)$ だけではなく、 K を含むようなすべての quaternion algebra D に対して $D^\times$ 上の Jacquet-Langlands 対応による対応物を考えなければならないことが、Jacquet [13] の relative trace formula を用いた考察によって示されている。

これはすなわち、 L 函数の特殊値を考えているのだから、同じ L 函数を与えるものはすべて考えなければならないと言っているわけで、いざ言われてみれば確かに当然とも思えるが、今後の展開において、極めて示唆的な事実であると思われる。

さて最後に、この方向での最近の展開について簡単に触れたい。まず、 $GL(2)$ を $M \mapsto gMg^{-1}$ によって、二次形式 $\det \begin{pmatrix} r & s \\ t & -r \end{pmatrix} = -r^2 - st$ を持つ三次元空間

$$\left\{ M = \begin{pmatrix} r & s \\ t & -r \end{pmatrix} \in M_2 \right\}$$

に作用させることによって、同型

$$PGL(2) \simeq SO(2, 1)$$

が得られることに注意する。このとき、Hecke, Waldspurger 周期は、 $SO(2, 1)$ 上の cusp form の、それぞれ、 $SO(1, 1)$, $SO(2)$ 周期と見なすことが出来る。これによって、自然に導かれるのが、

$SO(V) \subset SO(W)$, ただし、 V は、 W の codimension 1 の部分空間、
としたときに、

$$\int_{SO(V, F) \backslash SO(V, \mathbb{A})} \phi_V(h) \phi_W(h) dh,$$

ただし ϕ_V, ϕ_W はそれぞれ $SO(V, \mathbb{A}), SO(W, \mathbb{A})$ の cusp form, という周期を考えると、それが、 $SO(V)$ と $SO(W)$ の standard L -function 達のテンソル積 L -function $L(s, SO(V) \times SO(W))$ の中心での値

$$L\left(\frac{1}{2}, SO(V) \times SO(W)\right)$$

と深く関わっているという、Gross & Prasad 予想 [9] の設定である。

さて、 $\dim W = 3$ の場合は、上記の Hecke, Waldspurger 周期にあたるわけだが、では、 $\dim W = 4$ の場合はどうなっているだろうか。 D を F 上の quaternion algebra とすると、reduced norm n を D 上の二次形式とみることによって、 D は、 F 上 4 次元の quadratic space になっている。さらに、

$$D^- = \{d \in D \mid \text{tr}(d) = 0\},$$

ただし tr は reduced trace、とすると、もちろん D^- は、codimension 1 の D の部分空間である。このとき、

$$SO(D) \simeq (D^\times \times D^\times)^\circ / F^\times,$$

ただし、

$$(D^\times \times D^\times)^\circ = \{(d_1, d_2) \in D^\times \times D^\times \mid n(d_1) = n(d_2)\},$$

であり、 $SO(D^-) \hookrightarrow SO(D)$ は、 $D^\times \hookrightarrow (D^\times \times D^\times)^\circ$ (対角) と対応している。したがって、考察すべき周期は、 $D^\times$ 上の trilinear form

$$\int_{\mathbb{A}^\times D^\times(F) \backslash D^\times(\mathbb{A})} \varphi_1(h) \varphi_2(h) \varphi_3(h) dh,$$

になる。これについては、 $\mathbb{Q}$ 上の holomorphic form (及び、それに関係する場合) について、Harris & Kudla [12]、そしてその後、Böcherer & Schulze-Pillot [4] によって、上記の周期の絶対値の二乗が本質的に、Rankin triple product の中心での値

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3\right)$$

に等しいことが示されている。(なお、ここで、最近の論文 Jiang [17] が、この周期について興味深い考察をしていることを注意しておく。)

さて、次なる場合は、 $\dim W = 5$ ということになる。このときも、 V, W ともに split である場合を考えると、accidental isomorphism

$$SO(3, 2) \simeq PGSp(4)$$

によって、 $SO(2, 2) \hookrightarrow SO(3, 2)$ は、

$$\begin{aligned} & \{(g_1, g_2) \in GL(2) \times GL(2) \mid \det g_1 = \det g_2\} \\ & \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \mid \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right\} \hookrightarrow GSp(4), \end{aligned}$$

に対応している。これは、対称領域の方で記述すると、

$$\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1 \ni (z_1, z_2) \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & \\ & z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2,$$

となることに注意しておく。ここで、 $\mathfrak{H}_n$ は、genus n の Siegel 上半平面を表す。一般の場合について、 $\dim W \geq 5$ のとき、 $L(s, SO(V) \times SO(W))$ の積分表示は知られておらず、周期と L 函数の特殊値を結び付ける術を我々は持っていない。しかし、この場合 ($\dim W = 5$, V, W とともに split) について、Böcherer & Schulze-Pillot の結果 ([4]) を用いると、 $SO(3, 2) \simeq PGSp(4)$ 上の保型形式が、Yoshida lifting と呼ばれる、 $\mathbb{Q}$ 上の definite quaternion algebra 上の保型形式の組からくるものである場合に、周期を実際に、 L 函数の特殊値に結び付けることが可能であると思われる。これについては、準備中の論文 [3] を見られたい。

なお、講演の最後で、次数 2 の Siegel 保型形式の Fourier 係数の、虚二次体のイデアル類群に対応する同値類上の和、に関する Böcherer の予想 [2] とそれに関連した筆者と Shalika との現在進行中のプロジェクトについて簡単に述べた。これについては、また別の機会にもう少し詳しく述べたいと思うので、ここでは、割愛させて頂く。

参考文献

- [1] A. Ash and D. Ginzburg. *p-adic L-functions for $GL(2n)$* . Invent. Math. **116** (1994), 27–73.
- [2] S. Böcherer. *Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß*. Preprint Math. Gottingensis Heft **68** (1986).
- [3] S. Böcherer, M. Furusawa and R. Schulze-Pillot. *In preparation*.
- [4] S. Böcherer and R. Schulze-Pillot. *On the Central Critical Value of the Triple Product L-Function*. Number Theory 1993–94 (S. David ed.). Cambridge University Press, 1996, pp. 1–46.
- [5] D. Bump, M. Furusawa and D. Ginzburg. *Non-unique models in the Rankin-Selberg method*. J. Reine Angew. Math. **468** (1995), 77–111.

- [6] D. Bump and S. Friedberg. *The exterior square automorphic L -functions on $GL(n)$* . Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part II (Ramat Aviv, 1989), Israel Math. Conf. Proc. 3, Weizmann, Jerusalem, 1990, pp. 47–65.
- [7] S. Friedberg and H. Jacquet. *Linear periods*. J. Reine Angew. Math. **443** (1993), 91–139.
- [8] S. Friedberg and H. Jacquet. *The Fundamental Lemma for the Shalika Subgroup of $GL(4)$* . Memoirs of the A. M. S. **124**, no. 594, 1996.
- [9] B. H. Gross and D. Prasad. *On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}* . Canad. J. Math. **44** (1992), 974–1002.
- [10] J. Guo. *On the positivity of the central critical values of automorphic L -functions for $GL(2)$* . Duke Math. J. **83** (1996), 157–190.
- [11] G. Harder, R. P. Langlands and M. Rapoport. *Algebraische Zyklen auf Hilbert-Blumenthal-Flächen*. J. Reine Angew. Math. **366** (1986), 53–120.
- [12] M. Harris and S. S. Kudla. *The central critical value of a triple product L -function*. Ann. of Math. **133** (1991), 605–672.
- [13] H. Jacquet. *Sur un résultat de Waldspurger*. Ann. Sci. École Norm. Sup. **19** (1986), 185–229.
- [14] H. Jacquet, E. Lapid and J. Rogawski. *Periods of Automorphic forms*. Journal of the A.M.S. (to appear) (<http://www.math.ucla.edu/~jonr/eprints.html> より、入手可能 (1998/5/6 現在))
- [15] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro and J. A. Shalika. *The Θ -correspondence from $GSp(4)$ to $GL(4)$* . In preparation.
- [16] H. Jacquet and J. A. Shalika. *Exterior square L -functions*. Automorphic forms, Shimura varieties, and L -functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 143–226.

- [17] D. Jiang. *Nonvanishing of the central critical value of the triple product L -functions*. Internat. Math. Res. Notices **1998** no. 2., 73–84.
- [18] D. Soudry. *A uniqueness theorem for representations of $\mathrm{GSO}(6)$ and the strong multiplicity one theorem for generic representations of $\mathrm{GSp}(4)$* . Israel J. Math. **58** (1987), 257–287.
- [19] T. Uzawa, *Functoriality for distinguished representations and the relative trace formula*. 第3回整数論サマースクール「等質空間と保型形式」報告集, 1995, pp. 158–167.
- [20] J-L. Waldspurger. *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie*. Compositio Math. **54** (1985), 173–242.
- [21] Y. Ye. *Kloosterman integrals and base change for $\mathrm{GL}(2)$* . J. Reine Angew. Math. **400** (1989), 57–121.