

一般線型偏微分方程式に対する
局所境界値問題とその応用^{*)}

東大 教養 金子 見

実解析係数の m 階線型偏微分方程式 $p(x, D)u = 0$ の解 u が非特性実解析的超曲面 $S = \{\varphi(x) = 0\}$ の一方の側 $\varphi(x) > 0$ で存在すれば必ず S 上への境界値 $Q_j^+(u)$, $j = 0, \dots, m-1$ を取ることができる。もっとも解 u が境界面 S に近づくときの増大度に制限がなければ、境界値は一般に佐藤の超函数となる。もっとも佐藤の超函数は Cauchy-Riemann の方程式 $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ という楕円型の方程式の半平面 $y > 0$ (或いは $y < 0$) における解の“理想的”境界値として導入されたものであるが、任意の方程式に対して解の範囲を超函数にまで拡張しても境界値がやはり超函数の範囲で得られるという意味で境界値問題について開いた函数概念の拡張となっている。

*) これは同じ頃行われた偏微分方程式札幌シンポジウムにおける筆者の報告の原稿である。本シンポジウムの予稿は Proc. Japan Acad. にそのまま掲載される予定である。

以下簡単のため非特性境界面を $x_1 = 0$ とする。 u を $\phi(x, D)u = 0$ の $x_1 > 0$ における超函数解とすれば超函数の f -labbiness により $x_1 = 0$ を超えて u の拡張である超函数 $[u]$ を $x_1 \geq 0$ に含まれるように作ることが出来る。

$\phi(x, D)[u]$ は $x_1 = 0$ に含まれる超函数と成るが、初めから $x_1 = 0$ に含まれる超函数 v に ϕ の掛かっているようなもの $\phi(x, D)v$ を modulo とし、 $\sum_{j=0}^{m-1} b_j^+(u) \delta^{(m-j-1)}(x_1)$ の形のものを作ることが出来る。こゝに $b_j^+(u)$ は $x' = (x_2, \dots, x_m)$ のみの超函数である。この操作は一種の割り算であり、 u が distribution としてのびれば拡張 $[u]$ も distribution となり、従って $b_j^+(u)$ も distribution となる。

v を $[u]$ に繰り込むことにより

$$(1) \quad \phi(x, D)[u] = \sum_{j=0}^{m-1} b_j^+(u) \delta^{(m-j-1)}(x_1)$$

を満足する $[u]$ をとることが出来る。この様な $[u]$ は一意に定まり、 u の標準的拡張と呼ばれる。 $b_j^+(u)$ は境界作用素系 $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^j \right\}_{j=0}^{m-1}$ の双対系に関する境界値に相当する。一般の正規境界作用素系 $\{B_j(x, D)\}_{j=0}^{m-1}$ に関する境界値 $b_j^+(u) = B_j(x, D)u|_{x_1 \rightarrow +0}$ を得るには、この双対系 $\{C_j(x, D)\}_{j=0}^{m-1}$ を用いて (1) の代わりに

$$(2) \quad \phi(x, D)[u] = \sum_{j=0}^{m-1} {}^t C_{m-j-1}(x, D) (b_j^+(u) \delta(x_1))$$

とすればよい。小松-河合 [10] は以上の手続を Cauchy-

Kowalewski の定理の双対表現を用いて裏付けし、境界値 $b_j^+(u)$ が解 u により局所的に定まる (層の準同型になる) ことを証明した。

逆に方程式の階数 T への境界値 $b_j^+(u)$ が指定されると解は境界面の近傍で一意的に定まる。これは Holmgren の定理の云々である。ただし境界値を勝手に与えたとき、それを達成する解が必ずしも存在するとは限らない。これは既に初期値問題においてそうであった。初期値問題は境界値問題の特別な場合である。 $x_1 = 0$ の両側 $x_1 > 0$, $x_1 < 0$ で解が存在して、 $x_1 = 0$ への両側から境界値が一致するとき解は $x_1 = 0$ でつながり、このとき境界値は初期値となる。まず初期値問題の結果を思い出そう。以下双対変数を $\xi = (\xi_1, \xi')$, $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$ と記す。 $p_m(x, D)$ を p の主部とする。

定理 1 (河合[8], Bony-Schapira[2]) $p(x, D)$ の ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi') = 0$ が $\xi' \in \mathbb{R}^n$ に対して必ず m 実根を持つならば任意の初期データ $u_j(x')$ に対して初期値問題

$$(3) \quad \begin{cases} p(x, D)u = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j u \Big|_{x_1=0} = u_j(x'), \quad j=0, \dots, m-1 \end{cases}$$

の超函数解 u が局所的に存在する。

これを詳しくしたものに次のがある。([7])

定理2 (相原-河合) $I \in \mathbb{R}^n \times iS_\infty^{*n-2}$ の開集合で $I^a = I$ を満たすものとする。(aは S_∞^{*n-2} において対蹠点に写可写像.) ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi') = 0$ かつ $(x, i\xi' dx^\infty) \in I$ について必ず m 実根を持つならば, S.S. $u_j \ll I|_{x_1=0}$ なる任意の初期データ u_j に対し初期値問題(3)の超函数解 u が局所的に存在する.

これと同様境界値問題について次が成り立つ.

定理3 $I \in \mathbb{R}^n \times iS_\infty^{*n-2}$ の開集合とする. $V(x, i\xi' dx^\infty) \in I$ に対し ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi') = 0$ は虚部負の根を持つものとする. このとき S.S. $u_j \ll I|_{x_1=0}$ なる任意の境界データ u_j に対し境界値問題

$$(4) \quad \begin{cases} p(x, D)u = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^j u \Big|_{x_1 \rightarrow +0} = u_j(x'), \quad j=0, \dots, m-1 \end{cases}$$

の超函数解 u が $x_1 > 0$ において局所的に存在する.

つまり S.S. の条件が半分で済む. $x_1 < 0$ に対する境界値問題のときは仮定における虚部の符号を反対にせばよくなる.

初期値問題のとき定理1の条件が必要なことは信ぜられつつあるがまだ完全な証明は与えられていない. 直観的には $p(x, D)u = 0$ の解は佐藤の基本定理により S.S. u かつ $p(x, D)$ の特性多様体

$$V(p) = \{(x, i\xi' dx^\infty); p_m(x, \xi) = 0\}$$

に含まれる, ということから従うと説明される。例えば初期値問題については, このような特異スペクトルを持つ $u(x)$ の $x_1 = 0$ への制限として一般論から

定理4 (河合[9]) $S.S. (\frac{\partial}{\partial x_1})^j u|_{x_1=0}$, $j=0, \dots, m-1$ は $V(p)|_{x_1=0}$ の赤道面 $\xi_1 = 0$ への射影像に含まれる。

故にもしもこれが $\mathbb{R}^{n-1} \times S_\infty^{n-2}$ の真部分集合となれば, 初期値 u が一般にとれるはずはない。このことから, もし初期値問題が常に可解ならば ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi')$ $= 0$ は少なくとも一つの実根を持つなければならないことが直にわかる。 m 根とも実であるべきことを云うには m 個のデータが任意に選べることを使ってもっと立ち入った議論が必要であり, それはまだなされてない。

境界値問題についてこの議論に相当するのとは次の定理である。

定理5 $x_1 > 0$ における解 u に対し $S.S. b_j^+(u)$ は

$$V(p)^{\mathbb{C}} \cap \{ \operatorname{Im} \xi_1 \geq 0, \operatorname{Im} \xi' = 0 \}$$

の赤道面 $\xi_1 = 0$ への射影像に含まれる。ここは $V(p)^{\mathbb{C}}$ は p の複素特性多様体を表わす。

$x_1 < 0$ からの境界値 $q_j^-(u)$ なら $\operatorname{Im} \xi_1 \leq 0$ とする。初期値は両側からの境界値なら $\operatorname{Im} \xi_1 = 0$ となり定理4に帰着する。

例1 波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$ を考える。解 u の x_1

$=0$ への境界値の S.S. は上の定理では何ら制限されない。そ

れ故に混合問題が意味を持つのだが、

これをもう少し詳しく見てみよう。図

のイに於いては $V(p) \cap \{ \operatorname{Im} \xi_1 \geq 0, \operatorname{Im} \xi' = 0 \}$

からの射影は二重であり、この内部に

S.S. が含まれる境界データについて

二個独立に与えても境界値問題の解が

ある（実はこの場合は初期値問題から解ける）。一方ロの部分

は射影が一重しかない。故に通常混合問題で知られる如

く全体として $(C^\infty$ データにしろ L^2 データにしろ) 一つ

しか与えられないことになる。

そこで一般に $I \in \mathbb{R}^n$ は S_∞^{*n-2} の開集合とする。 $V(p) \cap \{ \operatorname{Im} \xi_1 \geq 0, \operatorname{Im} \xi' = 0 \}$ から $\xi_1 = 0$ への射影が I 上に二重になつていけば、S.S. $u_j \ll I|_{x_1=0}$ を満たす r 個の勝手な境界値 $u_j(x')$ に対し境界値問題

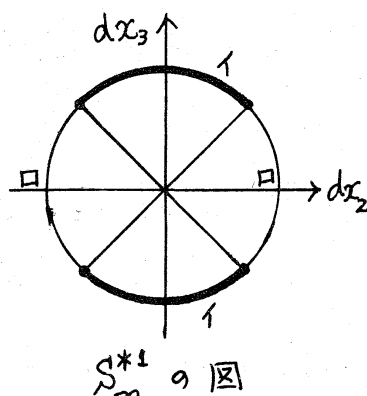
$$(5) \quad \begin{cases} p(x, D)u = 0 \\ B_{mj}(x, D)u|_{x_1 \rightarrow +0} = u_j, \quad j=1, \dots, r \end{cases}$$

の $x_1 > 0$ における解が少なくとも一つ局所的に存在すること

期待される。ここには $\{B_{mj}\}$ は正規境界作用素系(の一部)と可

る。この逆が正しいことも期待される。良い特性根の部分と

悪い特性根の部分の作用素としてきれいに分割できることを



仮定すれば双曲型混合問題と同様の議論ができるであろう。
解として超函数を許した場合、これらの条件 (Lopatinski
条件に相当するものも含めて) がどこまで実際必要なものか
興味のある問題である。データが減った場合一意性もろろ
んくするが、混合問題の初期条件のように何らかのこれを
保障する定式化を探ることにも興味がある。

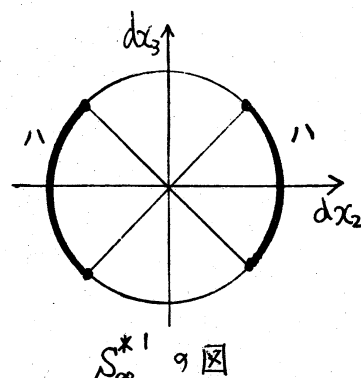
超函数解の場合はこのくらいにして実解析解の場合にうつ
ろう。この場合にはデータの S.S. は当然さらに少なくなる
はずである。実際このときには初期値の S.S. は ϕ となり、
初期値問題に關しては面白いことは可もない。境界値につい
ては

定理 6 $x_1 > 0$ における $p(x, D)u = 0$ の実解析解 u に対し
S.S. $b_f^+(u)$ は $V(p)^c \cap \{ \operatorname{Im} \xi_1 > 0, \operatorname{Im} \xi' = 0 \}$ の赤道面 $\xi_1 = 0$ へ
の射影像の閉包の $x_1 = 0$ との交わりに含まれる。

云いかえると、 ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi') = 0$ の
根の虚部が非正となるような集合の内点 $(x', i\xi' dx' \infty)$ は
S.S. $b_f^+(u)$ に含まれない。これは閉包操作を除けば超函数
解の場合の定理 5 における条件 $\operatorname{Im} \xi_1 \geq 0$ から等号を除いたも
のになっている。閉包操作は一般には省けない。さらに詳し
い個別的吟味が必要である。

例 2 再び波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$ を考える。

この場合上の定理が与える $S.S.$ の評価集合は $\mathcal{H}$ の部分である。端点は閉包操作によりつけ加わったものであるが、簡単な例によつて $\mathcal{H}$ の各点が適当な実解析解の境界値の $S.S.$ に実際現われる



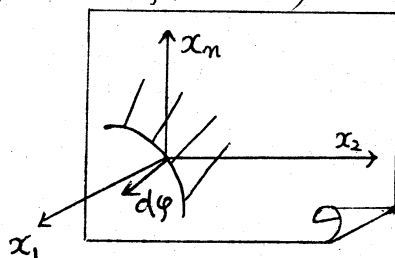
ことが確かめられる。つまり通常 α の混合問題においても $x_1 > 0$ で実解析的となる解を得ようと思えば $\Gamma = \Gamma$ 一個の境界値といえども $S.S.$ の条件がつかうのである。

境界値問題を解く立場からすれば定理 6 は前述の必要条件に相当するものである。十分条件に相当するものは次の定理である。

定理 7 I を $\mathbb{R}^n \times S_\infty^{*n-2}$ の開集合とする。 $V(x, i, \xi, dx_\infty) \in I$ に対し、 ξ_1 に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi') = 0$ の根はすべて虚部が正であるとする。このとき $S.S. u_j \subset I|_{x_1=0}$ なる任意の境界データ u_j に対し境界値問題 (4) の超函数解 u は $x_1 > 0$ において実解析的となる。

最後にこれらの結果の応用を述べる。いずれも実解析解の接続の問題の変種である。(定数係数方程式の場合 [5])

定理 8 $K = \{\varphi(x') \geq 0\}$ を $x_1 = 0$ 内の原点を通る滑らかな超曲面の片側とする。 $(0, i d\varphi(0) \infty)$ が



(6) $V(p)^{\mathbb{C}} \cap \{ \operatorname{Im} \xi_1 \neq 0, \operatorname{Im} \xi' = 0 \}$ の赤道面 $\xi_1 = 0$

への射影像の閉包の $x_1 = 0$ との交わり

に含まれなければ, K の外で定義された $p(x, D)u = 0$ の実解析解は必ず原点のある近傍まで超函数解として延長される。

定理の仮定は云々換えて $\xi_1 = 1$ に関する特性方程式 $p_m(x, \xi_1, \xi')$
 $= 0$ の根が可べて実であるような集合の内点に $(0, \operatorname{idp}(0)\infty)$
 が含まれるということである。この定理は定理 6 から直ちに
 証明できるが、両者の関連を明らかにする上からもこれを述
 べておこう。仮定により u は $x_1 > 0$ でも $x_1 < 0$ でも実解析解
 だが、両側から境界値をとれる。その差 $b_j(u) = b_j^+(u) - b_j^-(u)$
 は K に台を持つ $n-1$ 変数超函数となるが、仮定により原点
 において K の法線は $b_j(u)$ の特異スペクトルに含まれない。
 故に河合-相原の Holmgren type 定理 [11] により原点の
 近傍で $b_j(u) = 0$ 。従って境界値が一致し u はそこで超函数
 解としてつながる。

さらに、方程式の特性帯に条件をつければ正則性伝播が成
 り立ち、次が得られる。([6])

系 1 $p_m(x, D)$ は実係数主型とし、定理 8 の与える集合の
 原点上の fibre は S_{α}^{*n-2} 全体とは一致しないとする。この
 とし原点の外で定義された実解析解は原点まで実解析解とし
 て延長される。

C^∞ 級解に対しては定理6の証明から考察し直すことにより次も得られる。便宜上系として並べ掲げておくが定理8から直接得られるわけではない([6])。この結果は筆者のこの方面の研究への動機となった Grusin の仕事([1])の変数係数への拡張である。

系2 系1と同じ仮定のもとに、原点の外で定義された C^∞ 級解は原点まで C^∞ 級解として延長される。

次に、 $x_1=0$ 内の連続曲線 C 上の各点 x' において適当な超平面 $\varphi(x')=0$ が存在して、 $(x', \text{id} \varphi(x')^\infty)$ は定理8の与える集合に含まれず、かつ平面の族 $\varphi(x')=c$ はこの近くで C と各一点ずつでしか交わらないとき、 C を *admissible* ということにする。

定理9 C を $x_1=0$ 内の *admissible* な曲線とする。 $p_m(x, D)$ は実係数主型とし、 u を C の外で定義された $p(x, D)u=0$ の実解析解で C まで *distribution* として延長されるものとする。このときもしも u が C まで超関数解として延びなければ、 C は解析曲線でなければならぬ。

証明は定理6 (を系2の証明に変更したもの) と次の補題による。

補題 $u(x, t)$ は t を実解析パラメーターとする *distribution* で (i.e. $\mathcal{D}'$ sense で) analytic S.S. u が

士 ∞ を含まず), $\text{supp } u$ は $x = \text{const}$ と η の交わりが常に一点となるような連続曲線であるとする。このとき C は解析曲線である。

次に C を C^1 級としてみる。 C の法線ベクトルが必ず定理 8 の与える集合 (6) に含まれているとき C を $\mathcal{P}(x, \eta)$ に関して *timelike* ということにする。 C の外で定義された実解析解 u は C が *timelike* でないところでは定理 8 により超函数解としてのびてしまう。さて、それでは *timelike* な解析曲線は必ず実解析解のこの意味での特異集合となり得るであろうか？ それとも更に条件が要るであろうか？ この問はなかなか微妙であり混合問題の深い理論とも密接な関りがあるものと思われる。

今のところ筆者には何もわからないが、境界値問題のこれより深い部分は方程式の既約性がかかわってくることは確かである。それはモノドロミー群により表現されて境界値の完全な特徴づけを与えるであろうと筆者は夢想している。ともあれ特異集合が超曲面に含まれている場合の実解析解の接続問題に対しては境界値理論が統一視点を与えるという筆者の夢 ([4]) は実現されつつある。

文 献

- [1] Grušin, V.V., On solutions with isolated singularities for partial differential equations with constant coefficients, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 15 (1966), 262-278.
- [2] Bony, J.M.-Schapira, P., Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Lecture Notes in Mathematics No. 287, Springer, 1973, pp. 82-98.
- [3] Kaneko, A., On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 17 (1970), 567-580.
- [4] Kaneko A., 定数係数線型偏微分方程式の解の線状特異集合について, 数理解析研究所講究録 226 (1975) pp. 1-20.
- [5] Kaneko, A., On the singular spectrum of boundary values of real analytic solutions, submitted to J. Math. Soc. Japan.
- [6] Kaneko, A., On continuation of regular solutions of partial differential equations with real analytic coefficients, submitted to Proc. Japan Acad.
- [7] Kashiwara, M.-Kawai, T., On micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, to appear.
- [8] Kawai, T., On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 17

(1970), 467-517.

- [9] Kawai, T., Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients (I), Publ.RIMS, 7 (1971), 363-397.
- [10] Komatsu, H.-Kawai, T., Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ.RIMS, 7 (1971), 95-104.
- [11] Sato, M.-Kawai, T.-Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Mathematics No. 287, Springer, 1973, pp.265-529.
- [追記] 実根の仮定は初期平面の上以外では必要条件とはならない。同様の理由で定理 2-8 は更に拡張できる。本稿において証明を与えられていない定理は拡張された形で次の論文に載る予定である。
- [12] Kaneko, A., Singular spectrum of boundary values of solutions of partial differential equations with real analytic coefficients, submitted to Sci.pap.Coll.Gen.Educ.Univ. Tokyo.
- [13] Kaneko, A., Analyticity of lowest dimensional singularity of real analytic solutions, in preparation.