

同変コホロディスム論における特性類

九大理

菅原 民生

有限 abel 群 G について, 同変コホロディスム論 $\tilde{U}_G^*(X)$ を局所化したところ, G -ベクトル束 E の Chern 類 $c(E)$ の定義を与え, その性質を考察する.

§1 分類空間

G -ベクトル束の分類空間と同変コホロディスム論についての解説が F. Uchida [7] §§ 5, 6 にあるので, 記号などはそれに従う.

G を有限 abel 群, $I(G) = \{V_\alpha; \alpha \in A\}$ を G の既約なユニタリ表現の完全系とする. G を有限 abel 群としているので, A は有限集合で $\dim V_\alpha = 1$ である. $k: A \rightarrow \mathbb{Z}$ を非負整数値関数とし, それらの全体を K_A で表わす. $k \in K_A$ に対して $\|k\| = \sum_{\alpha} k(\alpha)$ とし, $k, l \in K_A$ に対して $k+l$ を $(k+l)(\alpha) = k(\alpha) + l(\alpha)$, $k \leq l$ を任意の $\alpha \in A$ について

$k(\alpha) \leq l(\alpha)$, $k < l$ 且 $k \leq l$ かつ $k \neq l$ で定義する.

$k \in K_A$ に対して V_α の $k(\alpha)$ 個の直和を $V_\alpha^{k(\alpha)}$ と書き,
 $V(k) = \bigoplus_\alpha V_\alpha^{k(\alpha)}$ とすると $V(k)$ は G の表現空間であり, 逆に任意の有限次元表現空間はある $k \in K_A$ について $V(k)$ と同値になる.

$V(k)$ 内の n 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $B_n(V(k))$ は自然に G -多様体となり, その上の標準的なベクトル束 $E_n(V(k)) \rightarrow B_n(V(k))$ は G ベクトル束となる. その Thom 空間 $M_n(V(k))$ は G -空間で, それらのなす同変 Thom スペクトラム から同変コホモロジー論 $\tilde{U}_G^*(X)$ が定義される. ここではコンパクト Hausdorff G 空間で, 基座をもち, 基座は不動点であるようなカテゴリーの中で考える.

$\tilde{U}_G^*(S^0)$ の中の Euler 類よりなる積について閉じた部分集合 $S = \{e(V(k)); k \in K_A\}$ による局所化を $S^{-1}\tilde{U}_G^*(X)$ と書くとき, 次の T. tom Dieck の定理が Chern 類を定義するとき大切である. [3].

定理 1.1

$X \supset A \supset X^G$ で A は G 不変な閉集合とする. $i: A \subset X$ を包含写像とすると, $S^{-1}i^*: S^{-1}\tilde{U}_G^*(X) \rightarrow S^{-1}\tilde{U}_G^*(A)$ は同型写像である.

$B_n(V(k))$ の不動点集合については $B_n(V(k))^G = \bigcup_{\|m\|=n} \prod_{\alpha} B_{m(\alpha)}(V_{\alpha}^{k(\alpha)})^G$ であり, 各 α について $B_{m(\alpha)}(V_{\alpha}^{k(\alpha)})^G = B_{m(\alpha)}(\mathbb{C}^{k(\alpha)})$, ($\mathbb{C}^{k(\alpha)}$ は G が trivial に作用している表現空間) となっていることを想起しよう.

§2 普遍 Chern 類

まずはじめに G -射影空間 $CP(V(k)) = B_1(V(k))$ について考察する. 1次元 G -ベクトル束 $E_1(V(k)) \rightarrow B_1(V(k))$ の Euler 類を $\chi_k \in \tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ とする. 定理 1.1 より

$$S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k))) \cong \sum_{\alpha} S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V_{\alpha}^{k(\alpha)}))$$

であるから, 各 α について $\chi_{\alpha,k} \in S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ が存在して, $\chi_k = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha,k}$ となる. このとき次の定理を得る.

定理 2.1

任意の $k \in KA$ と任意の $\alpha \in A$ に対して $\chi_{\alpha,k} \in S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ が存在して次の (a), (b) を満たす:

(a) $S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ は $\bigcup_{\alpha} \{1_{\alpha}, \chi_{\alpha,k}, \chi_{\alpha,k}^2, \dots, \chi_{\alpha,k}^{k(\alpha)-1}\}$ を基底とする自由 $S^{-1}\tilde{U}_G^*(S^0)$ -加群を部分環として含む.

(b) $k < l$ のとき 包含写像 $i: V(k) \hookrightarrow V(l)$ について $i^*: S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(l))) \rightarrow S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_1(V(k)))$ は $i^*(\chi_{\alpha,l}) = \chi_{\alpha,k}$ を満たす.

次に一般の n について, n 次元 G -ベクトル束 $E_n(V(k)) \rightarrow$

→ $B_n(V(k))$ の Euler 類を $c_{n,k} \in \tilde{U}_G^*(B_n(V(k)))$ とする。再び定理 1.1 によって

$$S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_n(V(k))) \cong \sum_{\|m\|=n} S^{-1}\tilde{U}_G^*\left(\prod_{\alpha} B_{m(\alpha)}(V_{\alpha}^{k(\alpha)})\right)$$

であるから、 $\|m\|=n$ となる各 m に対して $c_{m,k} \in S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_m(V(k)))$ が存在して $c_{n,k} = \sum_{\|m\|=n} c_{m,k}$ を満たす。

再び $i: V(k) \subset V(l)$ に対して、 $i^*(c_{m,l}) = c_{m,k}$ となるので

k は省略してよく、与えられた n に対して、 $\|m\| \leq n$

となる各 m に対して $c_m \in S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_m(V(k)))$ が定義でき

て、 $S^{-1}\tilde{U}_G^*(B_n(V(k)))$ は $S^{-1}\tilde{U}_G^*[c_m; \|m\| \leq n] / \sim$

の形の部分環を含むのであるが、それは次の § の定理

3.1 の系として示される。

§3 G -ベクトル束の Chern 類

X をコンパクトな G -空間、 $\xi: E \rightarrow X$ を n 次元 G -ベクトル束とする。 $P(\xi): P(E) \xrightarrow{\pi} X$ を ξ に伴う射影束とすると、 $P(E)$ にも自然に G が作用して、 π は G -map である。 $P(E)$ 上の標準直線束 η はまた G -直線束で、

$\pi^*(\xi) \cong \xi' \oplus \eta$ は G -ベクトル束としての分解を与える。

(Atiyah [1]) 従って Conner-Floyd [2]

§7 と同様に Leray-Hirsch, Dold の定理が使って次の定理をうる。

定理 3.1

任意の n と任意の n 次元 G -ベクトル束 $\xi: E \rightarrow X$ に対し
 $c(\xi) = \sum_{\|m\| \leq n} c_m(\xi)$, $c_m(\xi) \in S^{-1} \widetilde{U}_G^{2\|m\|}(X)$ なる
 元が一意的に存在して次の条件 (a), (b), (c) を満たす:

(a) 自然性 $f: X \rightarrow Y$ を G -map とすると

$$c(f^* \xi) = f^* c(\xi)$$

(b) 乗法性 ξ, η を X 上の二つの G -ベクトル束とすると

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cdot c(\eta)$$

(c) 正規性 η を $B_1(V(k))$ 上の標準的直線束とすると

$$c(\eta) = 1 + \sum \chi_\alpha$$

証明 一意性であることは、通常のコホモロジー理論の場合とまったく同様であるから省略する。存在については $n=1$ の場合は定理 2.1 である。 $n > 1$ の場合 $P(E)$ 上では splitting principle によって $\pi^*(\xi) \cong \eta \oplus \xi'$, (η は ξ' は $n-1$ 次元) となるから $\pi^*(c(\xi)) = (1 + \sum \chi_\alpha) \cdot c(\xi')$ とならなければならない。 $c(\xi')$ は帰納法の仮定によって一意に存在が決まっている。

さて n 次元 G -ベクトル束 $\xi: E \rightarrow X$ を旗束 $F(\xi): F(E) \rightarrow X$ の $F(E)$ 上へ引きもどした束 $\pi^*(\xi)$ は G -直線束に分解されて $\pi^*(c(\xi)) = \prod_{i=1}^n (1 + \sum_{\alpha \in A} \chi_{\alpha,i})$ と表わされる。

各 $m \in K_A$ について $c_m(\xi)$ を $\{\chi_{\alpha,i}\}$ できちんと記述す

るために次のように準備をする。

A に適当に全順序を入れて $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ とする。 $m \in K_A$ を一つ固定し、 $S = \|m\|$ とする。 $\alpha_1 \in m(\alpha_1)$ 個、 $\alpha_2 \in m(\alpha_2)$ 個 $\dots$ と並べたものを $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_S\}$ と書く。 他方 $\{1, 2, \dots, \|k\|\}$ から S 個とり出して並べた順列 $\ell' = \{j_1, j_2, \dots, j_S\}$ 全体の集合 $\{(\beta_1, j_1), (\beta_2, j_2), \dots, (\beta_S, j_S)\}; \ell' \in \mathcal{L}'\}$ の中には順序を除いて同じものがあるかも知れない。 同じそれらを与える ℓ' を同一視した $\mathcal{L}'$ の商集合を $\mathcal{L}$ とする。 このとき

$$\pi^* C(\xi) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} x_{\beta_1, j_1} x_{\beta_2, j_2} \dots x_{\beta_S, j_S}$$

と表わされる。 右辺は象徴的に $\sum_{\text{Sym}} \prod_{\alpha} (x_{\alpha, 1} \dots x_{\alpha, m(\alpha)})$ と表わせば (厳密ではないが) わかりよい。

$k \in K_A$ に対して $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, $r \geq 1$ $i_j \in K_A$, $\sum_{j=1}^r i_j = k$ となる ω を k の分割という。 この ω に対して $\gamma_i = \#\{j; i_j = i\}$ の列 $R = (\gamma_i, i \in K_A)$ を対応させる。 γ_i は有限個の i を除いて 0 である。

さて一つの $k \in K_A$ を十分大きくとって固定し、不定元の族 $\{x_{\alpha, j}; j=1, 2, \dots, k(\alpha), \alpha \in A\}$ ともう一つの不定元の族 $\{C_m; m \in K_A, m \leq k\}$ を考える。 両者の $\mathbb{Z}$ 上の多項式環は $C_m = \sum_{\text{Sym}} \prod_{\alpha} (x_{\alpha, 1} x_{\alpha, 2} \dots x_{\alpha, m(\alpha)})$ で関係づけられていれるとする。

分割 ω に対して $S = \#\{(\alpha, j); i_j(\alpha) \neq 0, j=1, 2, \dots, \alpha \in A\}$

とし、先ほどと同様に $\{1, 2, \dots, \|k\|\}$ から s 個とり出して並べた順列 $\ell' = \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$ 全体の集合を $\mathcal{L}'$ とする。整数値の族 $\{i_j(\alpha); j=1, 2, \dots, \alpha \in A\}$ から 0 でないものだけと

全順序集合 A を添数集合とみて辞書式に並べた全順序集合を $\{t_1, t_2, \dots, t_s\}$ とする。このとき $\ell' \in \mathcal{L}'$ に対して単項式 $x_{\beta_1 j_1}^{t_1} x_{\beta_2 j_2}^{t_2} \dots x_{\beta_s j_s}^{t_s}$ を考え、同一の単項式を与える ℓ' を同一視した $\mathcal{L}'$ の商集合を $\mathcal{L}$ とする。このとき多項式

$\sum_{\ell \in \mathcal{L}} x_{\beta_1 j_1}^{t_1} x_{\beta_2 j_2}^{t_2} \dots x_{\beta_s j_s}^{t_s}$ は $\{C_m; m \in KA, m \leq k\}$ の多項式 $f_R(C_m)$ で表わされる。今回も (やや厳密さを欠くが)

$$f_R(C_m) = \sum_{\text{Sym}} \prod_{\alpha} (x_{\alpha, 1}^{i_1(\alpha)} x_{\alpha, 2}^{i_2(\alpha)} \dots x_{\alpha, r_{\alpha}}^{i_{r_{\alpha}}(\alpha)})$$

と表わせばわかりよい。

n 次元 G ベクトル空間 $\mathcal{Z}$ に対して、 R を一つの分割 ω に対応するものとする。 $C^R(\mathcal{Z}) = f_R(C_m(\mathcal{Z}))$ によって Chern 類 $C^R(\mathcal{Z}) \in S^{-1} \tilde{U}_G^{2t}(X)$ が定義される。

§4. Landweber-Novikov 作用素

$\mathcal{S}^*$ を $\tilde{U}_G^*()$ theory における安定コホモロジー作用素の algebra とする。また $\mathcal{C}^*$ を $\tilde{U}_G^*()$ theory における安定特性類の algebra とする。Landweber [4] の類似として同型写像 $\psi: \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{C}^*$ とその逆 $\varphi: \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$ とが次のようにして与えられる。

まず ψ は $\tau \in \mathcal{S}^*$ に対して $\psi(\tau) \in \mathcal{C}^*$ と G ハクトル束 $\xi: E \rightarrow X$ に対して $\psi(\tau)(\xi) = \phi_{\xi}^{-1} \tau \phi_{\xi}(1) \in \widetilde{U}_G^*(X)$ とする = とで定まる. 逆に φ は 普遍 Chern 類 $\gamma \in \widetilde{U}_G^*(B_n(V(k)))$ に対して $\varphi(\gamma): \widetilde{U}_G^{2n}(X) \rightarrow \widetilde{U}_G^{2n+2n}(X)$ を次のように定める. 任意の元 $\alpha \in \widetilde{U}_G^{2n}(X)$ から $f: V(\ell)^c \wedge X \rightarrow M_{n+1|\ell|}(V(k))$ で代表されておるとき, $\varphi(\gamma)$ と $\varphi(\gamma)(\alpha) = \sigma(V(\ell))^{-1} f^* \phi(\gamma)$ とするのである.

§3 で現われた KA の元の分割 ω に対応する R に対して $S^R = \varphi(C^R)$ を同変 Landweber-Novikov 作用素ということにする. このとき定理 3.1 によって M. Nakaoaka [6] §2 と同様に次が成り立つ.

$$C^R(\xi \oplus \eta) = \sum_{I+J=R} C^I(\xi) C^J(\eta)$$

$$S^R(\alpha\beta) = \sum_{I+J=R} S^I(\alpha) S^J(\beta)$$

$\mathcal{S}^* \supset \mathcal{S}^*$ と $\{S^R\}$ によって生成される部分環とすると $\mathcal{S}^*$ は Hopf algebra になる. 従って Milnor-Moore [5] によって S^R の conjugation $\bar{S}^R$ が定義される. そして

$$\sum_{I+J=R} S^I \bar{S}^J = \sum_{I+J=R} \bar{S}^I S^J = \begin{cases} 0 & R \neq 0 \\ 1 & R = 0 \end{cases}$$

が成り立つ.

$\bar{C}^R$ と C^R の dual class とする. $\bar{U}^R = \psi(\bar{S}^R)$ とする

Wu class U^R と $U^R(\xi) = \sum_{I+J=R} \bar{S}^I C^J(\xi)$ と, dual Chern 類と $\bar{C}^R(\xi) = \sum_{I+J=R} S^I \bar{U}^J(\xi)$ でそれぞれ定義すると やはり

M. Nakaoaka [6] §3 の類似で次のことから成り立つ

$f: X \rightarrow Y$ を G の作用する 弱複素多様体の G -map とするときその Gysin 準同型が定義されて, Riemann-Roch-Grothendieck 型の定理

$$\sum_{I+J=R} S^I f_!(\alpha) C^J(N) = \sum_{I+J=R} f_!(S^I \alpha \cdot \bar{c}^J(M))$$

またその系として N を一点としたとき, Riemann-Roch 型の定理

$$\langle S^R \alpha, [M] \rangle = \sum_{I+J=R} S^I \langle \alpha \cdot u^I(M), [M] \rangle$$

等が成立する.

参考文献

- [1] Atiyah : K theory, Benjamin (1967)
- [2] Conner-Floyd : The relation of cobordism to K-theories, Lecture notes in mathematics 28.
1966, Springer
- [3] T. tom Dieck : Lokalisierung äquivarianter Kohomologie Theorien, Math. Zeit 121 (1971) 253-262
- [4] Landweber : Cobordism operations and Hopf algebras; Trans. A. M. S. 129 (1967) 94-110.
- [5] J. Milnor - J. C. Moore., On the structure of

- Hopf algebras *Ann. of Math.* 81 (1965) 211-264
- [6] M. Nakacka; Characteristic classes with values in complex cobordism, *Osaka J. of Math.* 10. (1973) 521-543
- [7] F. Uchida. 変換群とコホモロジスム論. 紀伊国屋 1974.