

多自由度系における淀み運動の幾何学的モデル

名古屋大理学部 山口義幸、小西哲郎

ハミルトン系においてはパワースペクトルがしばしば $S(f) \sim f^{-\nu}$ ($0 < \nu < 2$) という振舞をする [1-4]。この現象は $1/f$ スペクトルと言われている。このとき系は平衡への緩和が遅く、この遅い緩和を相空間の構造から解明することは大きな問題として残されている。

自由度が 2 の場合には、相空間の幾何学的なモデルを用いて $1/f$ スペクトルは説明されている [5, 6]。このモデルは、ポアンカレ写像の不動点を軸に構成されている。楕円型不動点を作る階層構造は完全自己相似であり、各階層の時間スケールは、楕円型不動点の数と各階層の空間スケールとによって決まると仮定すると、 $1/f$ スペクトルが導出されるのである。ここで、相空間内の運動は楕円型不動点の周りに存在する淀み領域で淀んでいる (長時間トラップされている) と仮定している。

多自由度系でも $1/f$ スペクトルは観測されているが、上記の幾何学的なモデルは系の自由度が 2 であることを用いているので、そのままでは多自由度系へ適用できない。そこで、本発表では上記の幾何学的モデルを多自由度に拡張したモデルを提案した [7]。拡張したモデルにおいても、従来と同様にポアンカレ写像の不動点を軸に相空間の構造を考えていく。また、相空間の構造は不動点を作る階層構造であると仮定する。なお、階層はレベル 0 がもっとも浅く、レベル l の不動点の周りにはレベル $l+1$ の不動点が存在しているとする。多自由度化のポイントは以下の通り。

(1) 不動点の種類は自由度とともに増えるので、増えた種類すべてを考慮する。このとき、Poincaré-Birkhoff 定理を一般化して考察すると、第 l 階層における 第 i 番目の種類の不動点の個数 $N_{l,i}$ が

$$N_{l+1,i} = \sum_{k=0}^i \rho_{l,k} N_{l,k} (n-k C_{i-k}) \quad (1)$$

より求まる。ここで、 $\rho_{l,k}$ は正の整数である。

(2) 自由度が 2 のときには KAM トーラスに対応する楕円型不動点の回りでのみ淀み領域を定義したが、多自由度系ではすべての種類の不動点のまわりに淀み領域 $V_{l,i}$ を仮定する。ここでは、

$$V_{l,i} = b^{-(l+i)} \quad (2)$$

とした。

ここまでで構成した相空間の構造の模式図を図 1 に示す。

(3) 従来は、相空間内の運動を考えるとときには、完全自己相似性を用いて議論していた。しかし多自由度系では不動点の種類が増えるために完全自己相似性は仮定できない。したがって、カオス領域ではランダムな運動をするという仮定のもと、階層間の遷移運動を各階層における淀み領域の体積 $\hat{V}_l = \sum_i N_{l,i} V_{l,i}$ を用いてマスター方程式で記述する。マスター方程式は次のようになる。

$$P_l(t+1) = \sum_m w_{l,m} P_m(t), \quad (3)$$

$$w_{m,l} = \begin{cases} c\hat{V}_{l-1} & (m = l-1) \\ 1 - w_{l-1,l} - w_{l+1,l} & (m = l) \\ c\hat{V}_{l+1} & (m = l+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4)$$

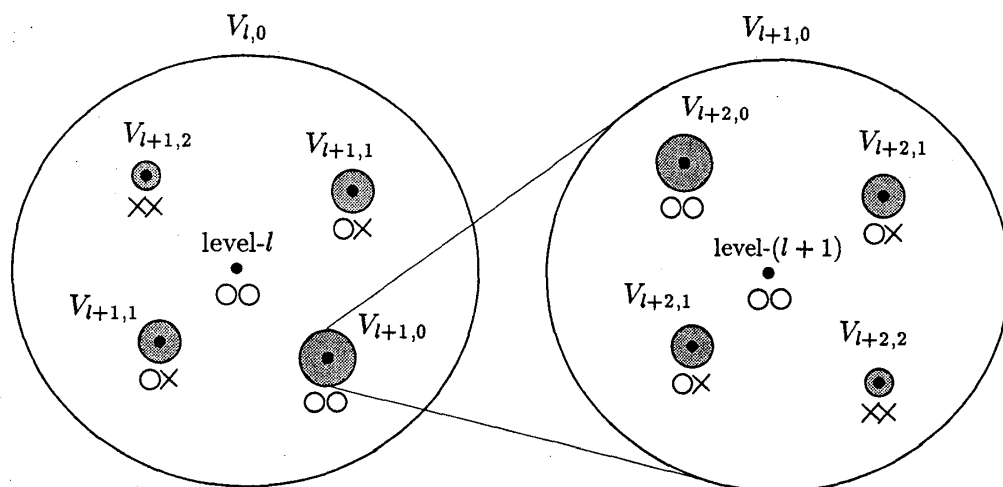


図 1: 相空間の構造を表す幾何学的モデルの概念図。まず、左半分に着目する。大円の中心にあるのは第 l 階層の不動点で、その周りには第 $l+1$ 階層の不動点がある。この第 l 階層の不動点の淀み領域は、大円から影を付けた部分を省いた領域である。影を付けた部分の内部は大円の内部と同様の構造になっている (図の右半分)。第 $l+1$ 階層の不動点の周りには第 $l+2$ 階層の不動点があり、以下同様の階層構造が作られている。

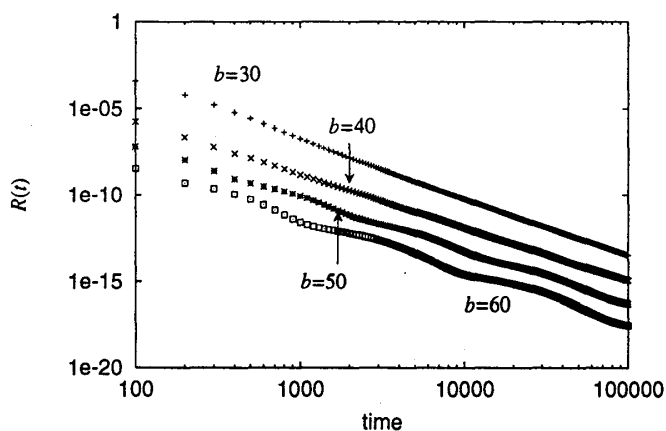


図 2: 滞在時間分布。自由度は 81。 $l_{th} = 1$ 。図中の値 b は階層構造の空間的スケールを表す因子: $V_{l,i} = b^{-(l+1)}$ 。

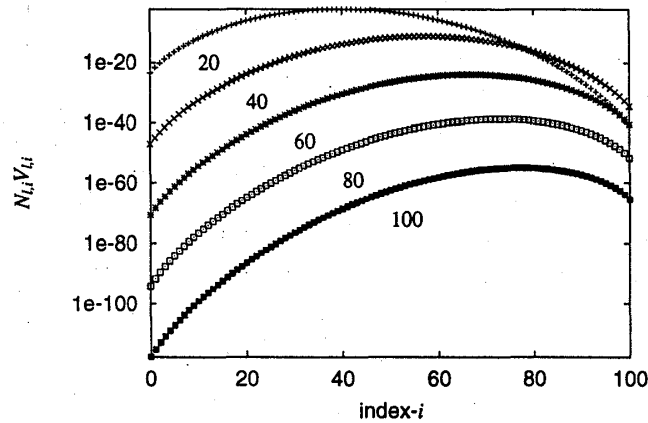


図 3: 淀み領域の体積に対する不動点の種類の寄与。図中の数値は階層のレベルを表す。自由度は 101。横軸は不動点の種類を識別する番号 i 、縦軸はその種類の不動点を持つ淀み領域の体積 $N_{l,i} V_{l,i}$ を表す。 $i=0$ は、そのまわりに KAM トーラスを持つ総楕円型不動点。淀み領域の体積への寄与が最も大きいのは一般には $i \neq 0$ であることがわかる。

ここで、 $P_l(t)$ は時刻 t でレベル l の階層にいる確率、 $w_{m,l}$ は 1 ステップでレベル l から m へ遷移する確率を表す。また、 c はモデルの自由パラメータである。(今回は、 $c = 1/(2(\hat{V}_0 + \hat{V}_2))$ とした。)

マスター方程式 (3) によって定められた系の時間発展が淀み運動を引き起こすことを滞在時間分布がベキ型になることによって示す (図 2)。滞在時間分布 $R(t)$ とは、階層のあるレベル l_{th} から出発した運動が、時間 t の後始めてレベル $l_{th} - 1$ より浅い階層に出て来る確率を表すものである。滞在時間分布がベキであると、運動は深い階層からなかなか抜け出て来られない。深い階層とは相空間の局所的な領域であるので (式 (2) 参照)、相関もゆっくり緩和するのである。なお、空間スケールの因子 b の値が大きくなると滞在時間分布がベキ型から波うつのは、 b の値が大きいとレベル l に比べレベル $l+1$ が非常に小さくなり階層性の効果が小さくなるからである。

つぎに、淀み領域の体積に対してもっとも寄与している不動点の種類を調べる。図 3 は不動点の各種類がどれだけ体積に寄与しているかを表している。図 3 によると、一般には KAM トーラスに対応する総楕円型不動点以外の種類が最も寄与していることがわかる。これは多自由度化した効果であり、自由度が 2 のときにはかならず KAM トーラスに対応する楕円型不動点が最も寄与する。

本発表では、多自由度ハミルトン系における遅い緩和を相空間の構造から理解するために、相空間の幾何学的なモデルを提案した。このモデルは遅い緩和を引き起こし、かつ多自由度化した効果により KAM トーラスの近傍以外における淀み領域が遅い緩和を支配していることを示している。

参考文献

- [1] C. F. F. Karney, Physica D **8** (1983), 360.
- [2] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky, Physica D **13** (1984), 395.
- [3] A. Baba, Y. Hirata, S. Saito and I. Ohmine, J. Chem. Phys. **106** (1997), 3329-37, and references therein.
- [4] Y. Y. Yamaguchi, International Journal of Bifurcation and Chaos **7** (1997) 839-47.
- [5] Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. **71** (1984), 1419.
- [6] Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota and K. Tanaka, Prog. Theor. Phys. Suppl. **98** (1989), 36.
- [7] Y.Y.Yamaguchi and T.Konishi, Prog. Theor. Phys. **99** No.1.