

マルチフラクタル解析の有限サイズ効果

神戸大 鈴木崇仁、高安秀樹 東工大 田口善弘

アブストラクト：

フラクタル及びマルチフラクタル解析は最近様々なところで使われているが、その測り方というのは $\log\text{-}\log$ プロットした点をfitさせてその直線の傾きを調べているにすぎない。このとき存在するそれぞれの点のバラツキはこの直線に吸収されてしまいデータの少しの誤差も $f-\alpha$ の形に重大な影響を与える。

本研究ではスケール依存性を持つ $f-\alpha$ を白色雑音について調べそれがスケールに対して興味深いふるまいを示すことを示し、システムサイズが有限な場合、 $f-\alpha$ にどのような影響を与えるか具体的に示す。

 $f-\alpha$ の定義：

データ列をサイズ r で分割しそれぞれの重み $P(r)$ の q 乗の和の対数を r の対数で微分したものを $\tau(q, r)$ と置く。この $\tau(q, r)$ を使って α を $\tau(q, r)$ の q についての偏微分、 f を $\tau(q, r)$ の変数 q を変数 α にルジャンドル変換したものと定義する。

例：

まず例としてガウス分布をするホワイトノイズを考える。サイズ r での $P(r)$ の q 乗の和と r の両対数プロットを見てみる。見た感じでは全て、直線にfitするように見えるが、定義に従って、スケール依存な $f-\alpha$ を求めて見るともっともらしい放物線になるがそれぞれの放物線の幅は r が大きくなるにつれて狭まっていく。 r_c は(データ列の分散)/(データ列の平均の自乗)。(Fig. 1, Fig. 2)

理論的な考察：

ここでは x 軸上のデータ列 $m(x)$ について $P(r)$ を次のように定義する。

$$P(r) = \frac{\sum_x \{m(x)\}_r}{\sum_x m(x)} = \frac{\sum_x \{m(x)\}_r}{M}$$

ここで $\{m(x)\}_r = [m(nr), m((n+1)r)], n = [0, N/r], N$ はデータの総数
これを使ってサイズ r についての $P_i(r)$ の q 乗の和は

$$\sum_{i=1}^N P_i^q(r) = \frac{1}{M^q} \sum_{i=1}^N \{m(1) + \dots + m(r)\}^q$$

であるからスケール依存な $\tau(q, r)$ は

$$\tau(q, r) \equiv \frac{d \log \sum_{i=1}^N P_i^q(r)}{d \log r} = \frac{d \log \langle (m(1) + \dots + m(r))^q \rangle}{d \log r} - 1$$

$m(x)$ の分布がガウシアンであるようなホワイトノイズを考えると $m(x)$ が無相関であることと、 $m(x)$ の三次以上のキュムラント平均が0であるから、適当な計算によりスケール依存な $f-\alpha$ は q が大きくないところで、 $r/r_c \gg 1$ の時次のように近似できる。

$$\alpha(q, r) \equiv \frac{2z(q, r)}{2q} \doteq 1 - (q - \frac{1}{2}) \left(\frac{r}{r_c}\right)^{-1}$$

$$f(\alpha, r) \equiv \alpha(q, r) \cdot q - z(q, r) \doteq 1 - \frac{r}{2r_c} \left(1 - \alpha(q, r) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_c}\right)^{-1}\right)$$

これから $f-\alpha$ は放物線で、 r/r_c の値が大きくなるに従って放物線の形が鋭くなり、頂点は $(f, \alpha) = (1, 1)$ に近付いて行く。(Fig. 3)

まとめ：

この様にホワイトノイズでも $f-\alpha$ の形がきれいな放物線としてでてしまうことがある。だからスケール依存な $f-\alpha$ を調べてスケールに対して $f-\alpha$ の形が変わらないことを確かめる必要がある。

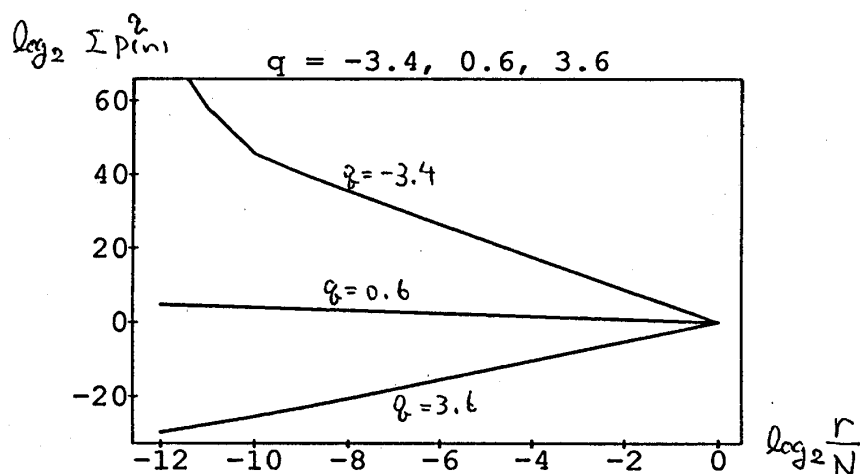


Fig.1 $\frac{r}{N}$ と $\sum p_i^2$ の両対数プロット

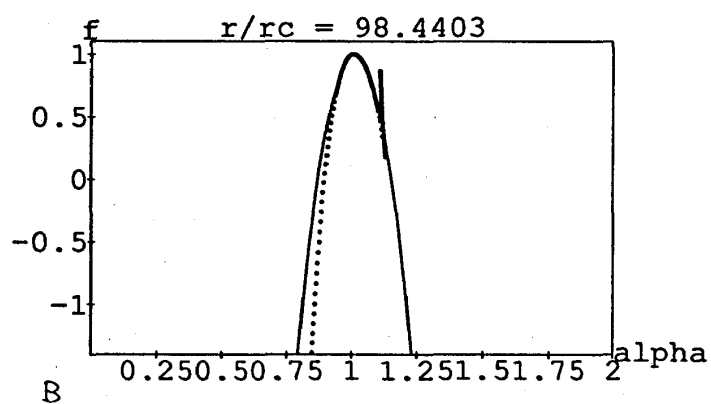
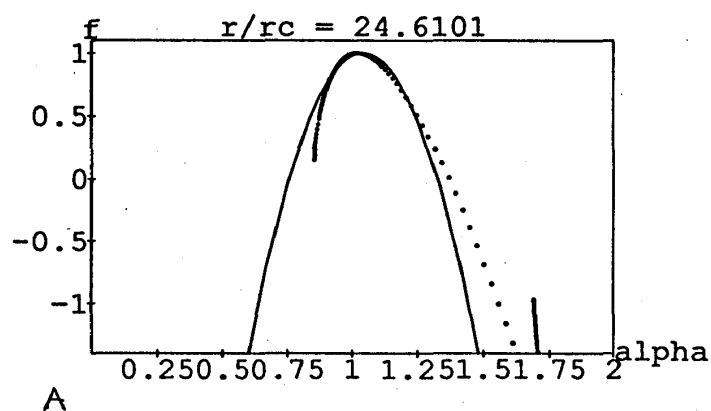


Fig.2

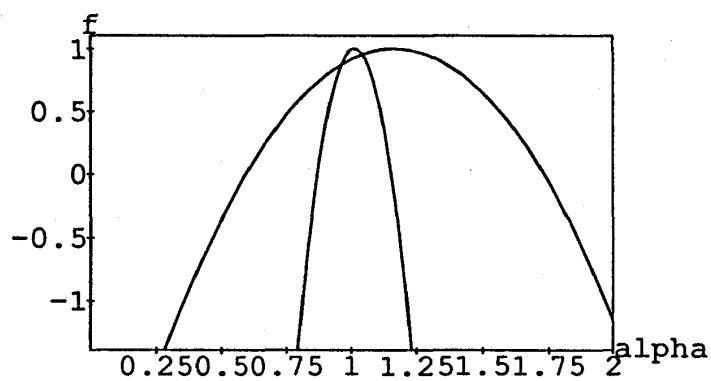


Fig.3