

McKay Observation 補遺

東大・理 岩堀長慶

§ 1. 問題の設定

群論六甲シンポジウム(1980年3月)の報告集の中で McKay Observation について紹介した([3] 参照)が, Ford-McKay の preprint [1] について, Happel-Preiser-Ringel [2] により, [1] の一種の一般化が与えられた。[2] の結果を少し別の方法で以下に紹介したい。(筆者の見地ではこの方がよりわかり易いと思われる。また [2] では以下の 表現体の条件 が一寸不十分な形で述べられている点も茲で訂正しておきたい。)

[2] で扱っている問題を述べるため一つの定義から始めよう。

定義 有限群 G に対して, 体 k が次の条件 (i), (ii) を満たす時, k は G の (2 次の) 表現体 であるという:

(i) G の k 上の群環 kG は半単純である。(すなわ

ち体 $\mathcal{A}$ の標数 $\text{char } \mathcal{A}$ は群 G の位数 $|G|$ の約数ではない。))

(ii) G は $\mathcal{A}$ 上に2次の自己反傾的な忠実表現 ρ をもつ。

このとき次のような問題 I, II, III が [2] で解かれている: (以下表現体といえは2次の表現体の意とする。)

問題 I. 表現体をもつような有限群を決定せよ。

問題 II. 有限群 G に対し, その表現体を決定せよ。

問題 III. 有限群 G が体 $\mathcal{A}$ を表現体にもつとし, ρ を G の $\mathcal{A}$ 上の2次の自己反傾的な忠実表現とする。このとき [1] と同様に, 表現 ρ の定める群 G の体 $\mathcal{A}$ 上の 表現グラフ Γ が定義されるが, 表現グラフとしてどのようなものが出現するか?

以下の小文で I は [2] と別な方法で解決する。II は [2] の不十分な結果 (十分条件のみが与えられていて, 必要条件が考慮されていない) を精密化して, $\mathcal{A}$ が G の表現体となるための必要十分条件を与える。III は, 本質的には [2] と同様だが, 非負実行列に関する Perron-Frobenius の理論を応用して, 若干見通し, よい (と思われる) 形で表現グラフの決定を行なう。

§ 2. 多面体群 (polyhedral group) と n -項多面体群

表現体をもつような有限群を記述するために必要な用語と記号を茲で準備しておく。

(a) 位数 n の巡回群を Z_n と書く。

(b) 生成元 P, Q, R と基本関係

$$P^l = Q^m = R^n = PQR = 1$$

与えられる群を (l, m, n) と書き, これを型 l, m, n の 多面体群 (polyhedral group) という。ただし l, m, n は自然数で, $1 < l \leq m \leq n$ とする。このとき次の事実が昔から知られている (Coxeter-Moser [4], p. 67 参照):

定理 2.1. 群 (l, m, n) が有限群 $\iff \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$

このような l, m, n の値と, その時の群 (l, m, n) は次の表の通りである:

$(2, 2, n) \cong D_{2n}$ (位数 $2n$ の dihedral group)

$(2, 3, 3) \cong A_4$ (4次交代群) 正四面体群

$(2, 3, 4) \cong S_4$ (4次対称群) 正八面体群

$(2, 3, 5) \cong A_5$ (5次交代群) 正十二面体群

(c) 生成元 P, Q, R と基本関係

$$P^l = Q^m = R^n = PQR$$

与えられる群を $\langle l, m, n \rangle$ と書き, これを型 l, m, n の 二項多面体群 (binary polyhedral group) という。ただし l, m, n は自然数で $1 < l \leq m \leq n$ とする。従つ

て, $\langle l, m, n \rangle$ から (l, m, n) 上への自然な準同型写像 φ が定まり, $\text{Ker } \varphi = \langle Z \rangle$, 但し $Z = PQR$, である。

定理 2.2 $\langle l, m, n \rangle$ が有限群となるための必要十分条件は (l, m, n) が有限群となることである。このとき Z は $\langle l, m, n \rangle$ の中心に属し, しかも Z の位数は 2 である。
([4], p. 68 参照)

$\langle 2, 2, n \rangle$ を binary dihedral group 又は ~~binary~~ ^{dicyclic} group という。 $\langle 2, 3, 3 \rangle$, $\langle 2, 3, 4 \rangle$, $\langle 2, 3, 5 \rangle$ は夫々 binary tetrahedral group, binary octahedral group, binary icosahedral group と呼ばれている。位数および交換子群 G' による商群の構造は次表の通りである。

$$G = \langle 2, 2, n \rangle \quad |G| = 4n,$$

$$n = \text{偶数} \Rightarrow G/G' \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$n = \text{奇数} \Rightarrow G/G' \cong \mathbb{Z}_4$$

$$G = \langle 2, 3, 3 \rangle (\cong SL(2, \mathbb{F}_3)), \quad |G| = 24$$

$$G/G' \cong \mathbb{Z}_3$$

$$G = \langle 2, 3, 4 \rangle, \quad |G| = 48$$

$$G/G' \cong \mathbb{Z}_2$$

$$G = \langle 2, 3, 5 \rangle (\cong SL(2, \mathbb{F}_5)), \quad |G| = 120$$

$$G/G' \cong \mathbb{Z}_1$$

§ 3. 表現体をもつような有限群の決定

定理 3. 1. 有限群 G に対し次の 3 条件 (I) ~ (III) は互いに同値である。

(I) G は表現体をもつ。

(II) 複素数体 $\mathbb{C}$ は G の表現体である。

(III) G は次のどれかと同型である: $\mathbb{Z}_n$, $\mathcal{D}_{2n}$,
finite polyhedral group $\langle \ell, m, n \rangle$.

(証明) (III) $\Rightarrow$ (II) は周知である。(例えば [3] 参照)。また (II) $\Rightarrow$ (I) は明らかである。よって以下に (I) $\Rightarrow$ (III) を示そう。体 k を有限群 G の表現体とし, ρ を G の k 上の 2 次の自己反傾的な忠実表現: $\rho: G \rightarrow GL(2, k)$ とする。 G と $\rho(G)$ を同一視して, $G \subset GL(2, k)$ としてよい。表現 ρ はその反傾表現 ρ^* と同値だから, G の各元 σ は ' σ^{-1} ' と相似である。よって k の代数的閉包 $\bar{k}$ 中に σ の固有値 α, β をとれば, $\{\alpha, \beta\}$ は ' σ^{-1} ' の固有値 $\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\}$ と一視する。よって

$$\alpha = \alpha^{-1}, \quad \beta = \beta^{-1}$$

又は

$$\alpha = \beta^{-1}, \quad \beta = \alpha^{-1}$$

の少なくとも一方が起る。よって $\alpha\beta = \pm 1$, すなわち $\det(\sigma) = \pm 1$ だから, G は $GL(2, k)$ の部分群

$$SL^{\pm}(2, k) = \{ \tau \in GL(2, k) \mid \det(\tau) = \pm 1 \}$$

に含まれる。さて場合を二つに分けて考えよう。

Case 1. $G \not\subset SL(2, k)$ の時。(従って $\text{char } k \neq 2$)

$H = G \cap SL(2, k)$ とおくと $[G : H] = 2$ となる。

$G - H \ni \sigma \Rightarrow \sigma^2 = 1$ が成り立つ。(実際, σ の固有値 α, β は $\alpha\beta = -1$ を満たすから, 上記により $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ である。 $\therefore \alpha = \pm 1, \beta = \pm 1$ 。よって σ の Jordan 標準形は $\sigma \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ($\sigma^2 = 1$)。次に $G - H \ni \sigma, H \ni h \Rightarrow \sigma h \sigma^{-1} = h^{-1}$ である。(実際 $\sigma^2 = 1$ かつ $(\sigma h)^2 = 1$ だから。) よって H はアーベル群である。 $\text{char } k \nmid |H|$ 故, H の各元は $GL(2, \bar{k})$ 中で対角化可能である。しかも H がアーベル群だから, H は $SL(2, \bar{k})$ 中の対角行列全体のなす部分群 $\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} \mid \xi \in \bar{k}^* \right\}$ の或る部分群と共役である。一方 $\Delta \cong \bar{k}^*$ 故, H は巡回群である。いま $H \cong \mathbb{Z}_n$ とすれば $G \cong \mathcal{Q}_{2n} = (2, 2, n)$ となる。

Case 2. $G \subset SL(2, k)$ の時。

$SL(2, k)$ は k 上の 2 次元列ベクトル全体のなすベクトル空間 $\bar{k}^2$ に左から自然に作用する。従って $SL(2, k)$ は, $\bar{k}^2$ 中の 1 次元部分空間の全体のなす集合 $\mathbb{P}_1$ (k 上の射影直線) にも作用する。 $SL(2, k)$ の中心 $\mathcal{Z} = \{\pm I\}$ は $\mathbb{P}_1$ に trivial に作用するから, $SL(2, k)/\mathcal{Z}$ が $\mathbb{P}_1$ に作用する。従って $G \cap \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0$ とおくと, 商群 $\bar{G} = G/\mathcal{Z}_0$ も

$\mathbb{P}_i$ に作用する。茲で場合を二つに分けて考えよう。

Case 2. 1. $\bar{G}$ が $\mathbb{P}_i$ 中に共通不動点をもつ場合。

$\bar{k}^2$ 中に $\bar{G}$ 不変な 1 次元部分空間 $\bar{k}u$ があるのだから, G の下で完全可約な $\bar{k}^2$ 中に ($\because \text{char } k \neq |G|$) もう一つの G 不変な 1 次元部分空間 $\bar{k}v$ が存在して

$$\bar{k}^2 = \bar{k}u \oplus \bar{k}v$$

となる。よって base u, v で行列表示すれば, G は $SL(2, k)$ の対角部分群 Δ に含まれる。よって G は巡回群である。

Case 2. 2. $\bar{G}$ が $\mathbb{P}_i$ 中に共通不動点をもたぬ場合。

$\bar{G} - \{1\}$ の各元 σ は $\mathbb{P}_i$ 中に丁度 2 個の不動点をもつ。何故なら, σ を与える G の元 σ をとれば, $\sigma \neq 1$ により σ はスカラー行列ではない。また σ の Jordan 標準形 ($\bar{k}$ での) は $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の形ではない。(実際もし $\sigma \sim \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ なら, $N = |G|$ として $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore N\alpha^{N-1} = 0, \therefore$

$\text{char } k \mid N$ となり矛盾。) よって σ の Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha \neq \beta$, の形である。よって σ 不変な $\bar{k}^2$ 中の 1 次元部分空間は丁度 2 つである。すなわち σ は $\mathbb{P}_i$ 中に丁度 2 個の不動点をもつ。

すると次のことがわかる。(岩堀[5] 参照)。いま $\bar{G}^\# = \bar{G} - \{1\}$ とおき, $\bar{G}^\#$ の σ の $\mathbb{P}_i$ 中にもつ不動点の集合を $\mathbb{P}_i^\sigma$ とおく。そして $\mathbb{P}_i$ の有限部分集合 $\Omega = \bigcup_{\sigma \in \bar{G}^\#} \mathbb{P}_i^\sigma$

を考える。すると Ω は 3 個の $\bar{G}$ -orbit $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ に分割される。各 Ω_i から点を一つとって固定し、 P_i の $\bar{G}$ 中の stabilizer を $\bar{G}_i = \{ \bar{\sigma} \in \bar{G} \mid \bar{\sigma}(P_i) = P_i \}$ とし、 $|\bar{G}_i| = \nu_i$ とおく。 $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$ としてよい。すると Case 2.1 と [5] の結果から、次の場合の何れかが起る。

ν_1	ν_2	ν_3	$ \bar{G} $	$\bar{G}$
2	2	n	$2n$	$(2, 2, n)$
2	3	3	12	$(2, 3, 3)$
2	3	4	24	$(2, 3, 4)$
2	3	5	60	$(2, 3, 5)$

よって何れの場合にも $|\bar{G}| = \text{偶数} \therefore |G| = \text{偶数}$ 。よって G 中に位数 2 の元 a がある。 $\therefore \text{char } K \neq 2$ かつ $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。 $\therefore \mathcal{F} = \{1, a\} \subset G \therefore \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}, \bar{G} = G/\mathcal{F}$ 。このことより容易に G が $\langle 2, 2, n \rangle, \langle 2, 3, 3 \rangle, \langle 2, 3, 4 \rangle, \langle 2, 3, 5 \rangle$ のどれかと同型になることがわかる。(証明終)

§ 4. 有限群の表現体の決定

体が有限群 G の表現体となるための条件を考えよう。 $G = \mathbb{Z}_n, \mathcal{O}_{2n}, \langle 2, 2, n \rangle, \langle 2, 3, n \rangle$ $3 \leq n \leq 5$ のあつあつの場合にそれぞれ考えよう。

定理 4.1. 体が群 $G = \mathbb{Z}_n$ の表現体になるための必要

十分条件は次の通り

$$n = 1 \quad \dots \text{無条件}$$

$$n = 2 \quad \dots \text{char } k \neq 2$$

$$n \geq 3 \quad \dots \text{char } k \nmid n, \text{ かつ } \zeta_n + \zeta_n^{-1} \in k$$

(但し $\zeta_n \in \bar{k}$ は 1 の原始 n 乗根)

(証明) $n=1, 2$ は容易にわかる。 $n \geq 3$ の時条件の必要性は容易にわかる。十分性は, $\gamma = \zeta_n + \zeta_n^{-1} \in k$ とし, $G = \langle \sigma \rangle$ とおくと, $\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$ が G の 2 次の自己反傾的な忠実表現を与えるからである。($\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}$)

定理 4.2 体 k が群 $G = \mathcal{O}_{2n} = (2, 2, n)$ の表現体になるための必要十分条件は

$$n = 2 \quad \dots \text{char } k \neq 2$$

$$n \geq 3 \quad \dots \text{char } k \nmid 2n \text{ かつ } \zeta_n + \zeta_n^{-1} \in k$$

(証明) $n=2$ なら $\mathcal{O}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 故容易。 $n \geq 3$ の時の必要性は容易。十分性は, $G = \langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^n = PQR = 1 \rangle$ とし, $\gamma = \zeta_n + \zeta_n^{-1}$ とおく。表現 $\rho \in$

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \rho(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(P) = \rho(Q)\rho(R)$$

で定めれば, 忠実かつ自己反傾的になる。

定理 4.3 体 k が群 $G = \langle 2, 2, n \rangle$ の表現体になるための必要十分条件は $\text{char } k \nmid 2n$, $\zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1} \in k$ かつ $x, y \in k$ が存在して $x^2 + y^2 = \gamma^2 - 4$ (但し $\gamma = \zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1}$) である。

(証明) (必要性) k が $G = \langle 2, 2, n \rangle = \langle P_0, Q_0, R_0 \mid P_0^2 = Q_0^2 = R_0^n = P_0 Q_0 R_0 \rangle$ の表現体であるとし, $\rho: G \rightarrow GL(2, k)$ を G の自己反傾的な忠実表現とする。既述により $\rho(G) \subset SL(2, k)$ である。 $\rho(P_0) = P$, $\rho(Q_0) = Q$, $\rho(R_0) = R$ とおくと

$$(*) \quad P^2 = Q^2 = R^n = PQR = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって P, Q, R の位数はそれぞれ $4, 4, 2n$ となりその固有値はそれぞれ 1 の原始 $4, 4, 2n$ 乗根である。さて $P \in$ 相似表現でおきかえて $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ としてよい。このとき $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと, $ad - bc = 1$, $a + d = \zeta_4 + \zeta_4^{-1} = 0$ である。そして $R = -(PQ)^{-1} = -Q^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} b & d \\ -a & -c \end{pmatrix}$ であるから, $b - c = \zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1} \in k$ 。いま $\gamma = \zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1}$ とおくと, $b = c + \gamma$ と $a = -d$ と $ad - bc = 1$ より

$$-a^2 - c(c + \gamma) = 1$$

$$\therefore a^2 + (c + \frac{\gamma}{2})^2 = -1 + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{1}{4}(\gamma^2 - 4)$$

よって, $x = 2a$, $y = 2(c + \frac{\gamma}{2})$ は $x^2 + y^2 = \gamma^2 - 4$ を満たす。 $\text{char } k \nmid |G|$ より $\text{char } k \nmid 2n$ である。

(十分性) $x^2 + y^2 = \gamma^2 - 4$ の解 $x, y \in k$ から出発して, $2a = x$, $2(c + \frac{\gamma}{2}) = y$ で a, c を定め, $d = -a$, $b = c + \gamma$ とおけば, 上の計算を逆に辿って $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} b & d \\ -a & -c \end{pmatrix}$ が $SL(2, k)$ の元で, $(*)$ を満たす。これにより ρ が自己反傾的であることがわかる。 ρ が忠実であることは表現

ことを示そう。■ R の位数が $2n$ で、 $|G| = 4n$ より、 $\text{Ker } \rho = \pi$ の位数は高々 2 である。もし $|\pi| = 2$ なり $\pi = \langle \Sigma_0 \rangle$ ($\Sigma_0 = P_0 Q_0 R_0$) $\therefore G/\pi \cong D_{2n}$. 一方 $G/\pi \cong \langle R \rangle \cong \mathbb{Z}_{2n}$ で矛盾。 $\therefore \pi = 1$ よって k は G の表現体である。(証明終)

定理 4.4. 自然数 n , $3 \leq n \leq 5$, に対し, 体 k が群 $G = \langle 2, 3, n \rangle$ の表現体になるための必要十分条件は, $\text{char } k \nmid 6n$, $\zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1} \in k$, かつ $x, y \in k$ が存在して $x^2 + y^2 = \gamma^2 - 3$ (但し $\gamma = \zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1}$) である。

(証明) 定理 4.3 とほぼ同様である。(必要性) 群 G の位数を ■ 考慮すれば $\text{char } k \nmid 6n$ がえる。 $G = \langle P_0, Q_0, R_0 \mid P_0^2 = Q_0^3 = R_0^n = P_0 Q_0 R_0 \rangle$ とし, G の自己反傾的な忠実表現 $\rho: G \rightarrow GL(2, k)$ をとり, $\rho(P_0) = P$, $\rho(Q_0) = Q$, $\rho(R_0) = R$ とおくと, 自己反傾性から $P, Q, R \in SL(2, k)$ かつ

$$(**) \quad P^2 = Q^3 = R^n = PQR = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。 P を相似表現でおきかえて $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ としてよい。

このとき $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$ とおくと, 上記と同様に

$R = \begin{pmatrix} b & d \\ -a & -c \end{pmatrix}$ となる。 $a + d = \zeta_6 + \zeta_6^{-1} = 1$, $b - c = \zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1}$

$\therefore \zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1} \in k$. いま $\zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1} = \gamma$ とおくと, $d = 1 - a$ と

$b = c + \gamma$ と $ad - bc = 1$ より

$$-a^2 + a - c(c + \gamma) = 1$$

$$\therefore \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c + \frac{\gamma}{2}\right)^2 = -1 + \frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{\gamma^2 - 3}{4}$$

よって $x = 2(a - \frac{1}{2})$, $y = 2(c + \frac{1}{2})$ が $x^2 + y^2 = y^2 - 3$ を満たす。

(十分性) 定理 4.3 の場合と同様に, x, y から出発して (**) の解 $P, Q, R \in SL(2, k)$ が作れ, 自己反傾的な表現 $\rho: P_0 \rightarrow P, Q_0 \rightarrow Q, R_0 \rightarrow R$ が得られる。 $SL(2, k)$ の部分群 $G_1 = \langle P, Q, R \rangle$ は k を表現体にもつ。しかも (**) から G_1 はアーベル群でない。($P = QR$ の位相も比べて, もし G_1 がアーベル群なら $\alpha = \frac{6 \cdot 2\pi}{(6, 2\pi)} \geq 6$ という式が出る。これは矛盾である。) 一方, $\text{Ker } \rho = \gamma C$ とおくとき, $|\gamma C| = |\gamma|$ が容易にわかる。よって $z_0 = P_0 Q_0 R_0$ は $\in \gamma C$ 。よって $G_1 \cong G/\gamma C$ は $G/\langle z_0 \rangle = (2, 3, n)$ の商群である。しかも G_1 中の位相 2 の中心元 $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix})$ がある。これは $2\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, 2\mathbb{Z}_5$ の商群に対しても不可能である。よって $\gamma C = 1$, すなわち ρ は忠実表現となり, k は G の表現体である。(証明終)

定理 4.5. 有限体 $k = \mathbb{F}_q$ ($q = p^e$: p は素数) が

$$G = \mathbb{Z}_n \text{ の表現体} \iff q \equiv \pm 1 \pmod{n}$$

$$G = \mathbb{Q}_{2n} \text{ の表現体} \iff q \equiv \pm 1 \pmod{n}, p > 2$$

$$G = \langle 2, 2, n \rangle \text{ の表現体} \iff q \equiv \pm 1 \pmod{2n}$$

$$G = \langle 2, 3, n \rangle \text{ の表現体} \iff q \equiv \pm 1 \pmod{2n}, p > 3$$

(証明) よく知られているように, 有限体 k の任意の α は $\alpha = x^2 + y^2$ ($x \in k, y \in k$) の形に書ける。よって定理

4.3, 4.4 の最後の条件は不要である。条件 $s_m + s_m^{-1} \in k$ は, $(s_m + s_m^{-1})^g = s_m + s_m^{-1}$ に同値である。すなわち,

$$s_m + s_m^{-1} \in k \iff s_m^g + s_m^{-g} = s_m + s_m^{-1}$$

である。さて, $s_m + s_m^{-1} = \gamma$ とおくと, 上の条件は s_m^g, s_m^{-g} 及び s_m, s_m^{-1} がどちらも = 次方程式

$$t^2 - \gamma t + 1 = 0$$

の根となることを意味するから,

$$s_m + s_m^{-1} \in k \iff s_m^g = s_m \text{ 又は } s_m^g = s_m^{-1}$$

$$\iff g-1 \equiv 0 \pmod{m} \text{ 又は } g+1 \equiv 0 \pmod{m}$$

である。■ すなわち $s_m + s_m^{-1} \in k \iff g \equiv \pm 1 \pmod{m}$ となる。

又このとき自動的に g と m とは互いに素となる。よって,

$p+1|G|$ を考慮すれば定理の条件を得る。(証明終)

〔注意〕〔2〕の定理1で述べている条件 (k が G の表現体となるための) は, 十分条件ではあっても必要条件とは限らぬものがある。例えば $G = \langle 2, 2, m \rangle$ に対し, k が表現体なら, m が偶数のとき $s_{2m} \in k$, m が奇数のとき $s_{4m} \in k$ となるものの如く記されているが, 上記から例えば $m=3$ の時, $\mathbb{F}_7$ は表現体だが $s_4 \notin \mathbb{F}_7$, 従って $s_{12} \notin \mathbb{F}_7$ となり反例となる。 $m=4$ でも $s_8 \notin \mathbb{F}_7$ で, $\mathbb{F}_7$ は表現体となる。また $G = \langle 2, 3, 3 \rangle$ に対し, k が表現体なら $s_4 \in k$ であるが, 〔2〕にあるが, これも $k = \mathbb{F}_7$ という反例がある。(

定理 4.5 から、素数 $p > 3$ に対し $\mathbb{F}_p$ はすべて $\langle 2, 3, 3 \rangle$ の表現体である。) 標数 0 の体でも反例が作れる。例えば $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ では $\zeta_6 + \zeta_6^{-1} = 1 \in \mathcal{K}$, $1^2 + (\sqrt{3}i)^2 = -2$ だから、 $\mathcal{K}$ は $\langle 2, 3, 3 \rangle$ の表現体である (定理 4.4)。しかし $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ が $\mathcal{K}$ である。 $\langle 2, 3, 4 \rangle$, $\langle 2, 3, 5 \rangle$ についても [2] の表現体の条件は訂正の要がある。

[注意 2] $\langle 2, 3, 3 \rangle \cong SL(2, \mathbb{F}_3)$, $\langle 2, 3, 5 \rangle \cong SL(2, \mathbb{F}_5)$ が成り立つ。基本関係と満たす行列を, unipotent 行列の存在も考慮して定理 4.4 と類似の方法で作ることがにより, 同型対応がつく。従って定理 4.5 により,

$$\begin{cases} \text{素数 } p > 3 \text{ に対し } SL(2, \mathbb{F}_3) \subset SL(2, \mathbb{F}_p) \\ \text{素数 } p > 5, p \equiv \pm 1 (5) \text{ に対し } SL(2, \mathbb{F}_5) \subset SL(2, \mathbb{F}_p) \end{cases}$$

なる包含関係の存在がわかる。これは興味深い現象のように思える。

§ 5. 表現グラフの決定

有限群 G が体 $\mathcal{K}$ を表現体にもつとする。半単純多項式環 $\mathcal{K}[G]$ の単純成分への分解を $\mathcal{K}[G] = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$ とし, 単純環 $\mathcal{A}_i$ を $\mathcal{A}_i = M_{d_i}(\mathcal{E}_i)$ の形に書く。すなわち $\mathcal{A}_i$ は歪体 $\mathcal{E}_i$ 上の d_i 次の全行列環である。よって $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{E}_i = e_i$ とおくと

$$|G| = \sum_{i=1}^n d_i^2 e_i$$

となる。そして G は k 上に n 個の非同値な既約表現をもつ。

単純成分 $\mathcal{O}_i$ に対応する既約表現を (ρ_i, V_i) とすると,

$\rho_i(kG) \cong \mathcal{O}_i$ ($1 \leq i \leq n$) である。 $\dim_k V_i = \tilde{d}_i$ とおくと, V_i は kG 加群として $\mathcal{O}_i \cong M_{\tilde{d}_i}(E_i)$ の極小左イデアルに同型であるから,

$$\tilde{d}_i = d_i e_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

である。そして $E_i \cong \text{End}_{kG}(V_i)$ である。いま G の k 上の 2 次自己反値的な忠実表現を (ρ, V) とする。 $\rho \otimes \rho_j$ を既約成分に分解して

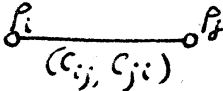
$$\rho \otimes \rho_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \rho_i \quad (c_{ij} \in \mathbb{Z}_+)$$

とおく。非負整数 c_{ij} は ρ_i の $\rho \otimes \rho_j$ 中の重複度である。

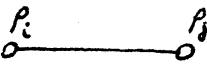
行列 $C = (c_{ij})$ をグラフ表示する: $\rho_1, \dots, \rho_n$ を n 個の頂点とするグラフ Γ を考える。ただし Γ の辺 (edge) は次のように定める。

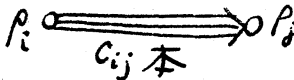
$c_{ii} > 0$ なら ρ_i  c_{ii} 本の loop

$i \neq j$, $c_{ij} = c_{ji} = 0$ なら ρ_i と ρ_j は辺で結ばない。

$i \neq j$, $c_{ij} + c_{ji} > 0$ なら ρ_i  ρ_j と書く。但し (c_{ij}, c_{ji})

次の便法も用いることにする:

$c_{ij} = c_{ji} = 1$ の時 ρ_i  ρ_j

$c_{ij} > 1$, $c_{ji} = 1$ の時 ρ_i  ρ_j

([2]) と若干表現グラフの定め方が違っている点に注意し

たい。)

定理 5.1. 行列 C が分解不能 (各 $i, j, i \neq j$, に対して $i_1, i_2, \dots, i_r$ が存在して $C_{i_1 i}, C_{i_2 i_2} \dots C_{i_r j} \neq 0$ とする) $\iff \rho$ が忠実表現

(証明) $(\implies)$ は容易 ($\text{Ker } \rho \subset \text{Ker } \rho_i$ なる頂点 ρ_i 達は proper な連結成分中にあるから)。 $(\impliedby)$ は $k = \mathbb{C}$ の時と同様に, $\rho \otimes \dots \otimes \rho$ 中にどの ρ_i も含まれることめらわめる ([3] 参照。)

定理 5.2. $e_i C_{ij} = e_j C_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n)$

(証明) 以下は [2] にある通りである。 $\text{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes_k V_j)$
 $\cong_{\mathcal{K}} \text{Hom}_{kG}(V_i, \underbrace{V_i \oplus \dots \oplus V_i}_{C_{ij} \text{ 個}}) \cong_{\mathcal{K}} \underbrace{E_i \oplus \dots \oplus E_i}_{C_{ij} \text{ 個}}$ である。

ら, $\dim_k \text{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes_k V_j) = e_i C_{ij}$ である。さて,
 $\text{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes_k V_j)$ は k 上のベクトル空間としては,
 $V_i^* \otimes V \otimes V_j$ (V_i^* は V_i の dual space) なる kG 加群中の G 不変式の全体をなす部分空間 $(V_i^* \otimes V \otimes V_j)^G$ に同型である:

$$\text{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes_k V_j) \cong_{\mathcal{K}} (V_i^* \otimes V \otimes V_j)^G$$

所が表現の完全可約性により, 上式右辺は, $(\dots)$ を dual space で置きかえても $\cong_{\mathcal{K}}$ となる:

$$(V_i^* \otimes V \otimes V_j)^G \cong_{\mathcal{K}} (V_i \otimes V^* \otimes V_j^*)^G$$

ここに ρ の自己反傾性 $V \cong_{kG} V^*$ を用いれば, 右辺は $\cong_{kG}$
 $\text{Hom}_{kG}(V_j, V \otimes V_i)$ となる。よって $\text{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes V_j)$
 は k 上のベクトル空間としては i と j を交換したものと同型
 である。よって次えを比べて証明が完了する。(証明終)

行列 C の分解可能性により, C に Perron-Frobenius の
 非負行列論 (例えば [6] 参照) が適用できる。 $\rho \otimes \rho_j =$
 $\sum C_{ij} \rho_i$ の k 上の次報を比べて

$$2\tilde{\rho} = \tilde{\rho}C$$

を得る。但し $\tilde{\rho} = (\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n) > 0$ 。よって C の Frobenius
 根は 2 である。 $\tilde{\rho}$ は固有値 2 に属する固有ベクトルとして,
 次の性質で特徴づけられる。

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \text{ の成分はすべて自然数} \\ \tilde{\rho} \text{ の或る成分は } = 1 \end{cases}$$

次に $2\tilde{d}_j = \sum_i \tilde{d}_i C_{ij}$ に, $\tilde{d}_j = e_j d_j$, $\tilde{d}_i = e_i d_i$ を代入
 して定理 5.2 を用いれば

$$2\rho = \rho^t C$$

を得る。但し $\rho = (d_1, \dots, d_n) > 0$ 。 ρ は ${}^t C$ の固有値 2
 に属する固有ベクトルであって, 次の性質で特徴づけられる
 ものである:

$$\begin{cases} \rho \text{ の成分はすべて自然数} \\ \rho \text{ の或る成分は } = 1 \end{cases}$$

以上より次のことがわかった:

定理 5.3. 体 K が有限群 G の表現体で, ρ が K 上の G の n 次の自己反傾的な忠実表現とする。組 (G, K, ρ) の定められた行列 C (又は表現グラフ) は次の性質をもつ。

- (α) C の成分 C_{ij} はすべて非負整数にある。
- (β) $C_{ij} > 0 \iff C_{ji} > 0$
- (γ) C は分解不能, かつ C の Frobenius 根 $= 2$
- (δ) 自然数を成分とする行ベクトル

$$\tilde{p} = (\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n), \quad p = (d_1, \dots, d_n)$$

が存在して次を満たす:

$$\begin{cases} 2\tilde{p} = \tilde{p}C, & 2p = pC \\ \text{Min}\{\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n\} = \text{Min}\{d_1, \dots, d_n\} = 1 \end{cases}$$

(かかる $\tilde{p}, p$ が一意的なことは (γ) からわかる。)

- (ε) $d_i \mid \tilde{d}_i \quad (1 \leq i \leq n)$ が成り立つ。

定義 定理 5.3 の (α), (β), (γ) を満たす行列 C (又はそのグラフ) を 一般ユークリッド型 であるという。さらに

$$C_{11} = C_{22} = \dots = C_{nn} = 0$$

をも満たす C (又はそのグラフ) を ユークリッド型 であるという。

ユークリッド型の行列の分類はよく知られている (例えば [3] 参照)。よってユークリッド型ではないような一般ユ

ユークリッド型の行列の分類を述べよう。(以下[2]の結果を別の方法で導ぶ。)

定理 5.4. 一般ユークリッド型だがユークリッド型ではない行列(又はグラフ)は次で与えられる。

$$\tilde{L}_0^* : 1 \text{ (loop) }$$

$$\tilde{L}_\ell : \text{ (graph with } \ell \text{ vertices and } \ell \text{ edges, each vertex has a loop) } \quad (\text{頂点数} = \text{添字数} + 1)$$

$$\tilde{BL}_\ell : \text{ (graph with } \ell \text{ vertices and } \ell \text{ edges, each vertex has a loop, and each edge has a weight of 1) }$$

$$\tilde{CL}_\ell : \text{ (graph with } \ell \text{ vertices and } \ell \text{ edges, each vertex has a loop, and each edge has a weight of 2) }$$

$$\tilde{DL}_\ell : \text{ (graph with } \ell \text{ vertices and } \ell \text{ edges, each vertex has a loop, and each edge has a weight of 2, with an additional weight of 1 on the first edge) }$$

(証明) [6] にいう正量記入法により, 上の各グラフの Frobenius 根が与えられることが確かめられる。(各頂点に正の実数値を適当に記入して, その2倍が隣接頂点に記入された量の, 線分の重複度も考慮に入れた和に等しくなるようにすること Frobenius 根に対する正量記入法という。ループは自己隣接と見做すのである。) 正量 $\tilde{\alpha}$ が上図に記入してある。よって上図はすべて一般ユークリッド型である。しかしどれにもループがあるから, $\exists c_{ii} > 0$ となり, どれもユークリッド型ではない。

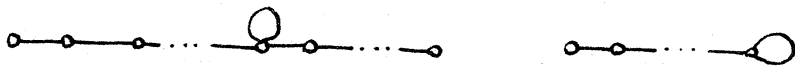
よって, ループをもつ一般ユークリッド型のグラフが上図のどれかと一致することを示せばよい。一般にグラフから頂点や何本かの辺を取り除くと Frobenius 根は減小するとい

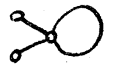
う性質がある (証明は [6] 参照)。よって上図 5 個の何れか
を真に含むグラフの Frobenius 根は > 2 であり, 5 個の何
れかに真に含まれるグラフの Frobenius 根は < 2 である。
よってそれらは何れも一般ユークリッド型ではない。さて場
合をわけて考えよう。

(1) $\exists c_{ii} \geq 2$ の時。グラフは $\tilde{\mathcal{L}}_0^*$ を含むから $\tilde{\mathcal{L}}_0^*$ になる。

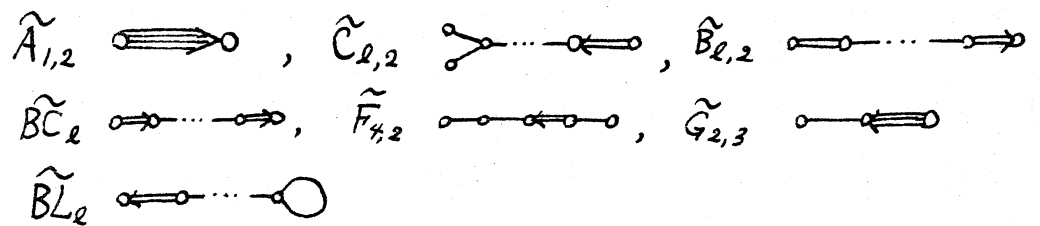
(2) $\forall c_{ii} \leq 1$ の時。ループの個数が ≥ 2 ならグラフの連結
性により, グラフは $\tilde{\mathcal{L}}_2$ を含む。よって $\tilde{\mathcal{L}}_2$ に一致する。

(3) $\forall c_{ii} \leq 1$ かつループの個数が $= 1$ の時。 $m = \max_{i \neq j} c_{ij}$
と置く。もし $m \geq 3$ ならグラフの連結性により $B\tilde{\mathcal{L}}_2$ 又は
 $C\tilde{\mathcal{L}}_2$ が真に含まれ矛盾。 $\therefore m \leq 2$ 。 $m = 2$ ならば, やはり
 $B\tilde{\mathcal{L}}_2$ か $C\tilde{\mathcal{L}}_2$ を含むからどちらかと一致する。よって $m = 1$
とする。グラフが分岐点 (ループ以外の) をもてば, 再びグ
ラフの連結性により $D\tilde{\mathcal{L}}_2$ を含むから $D\tilde{\mathcal{L}}_2$ 型となる。もし
グラフに分岐点がないなら, グラフは次の何れかである。



前者は $D\tilde{\mathcal{L}}_2$:  を含むから実は $D\tilde{\mathcal{L}}_2$ に一致する。後
者は $\tilde{\mathcal{L}}_2$ に真に含まれるから Frobenius 根は < 2 (証明終)

さて一般ユークリッド型の行列 C は定理 5.3 の (δ) を満た
すことが検証される。(ε) の検証を試みると次のグラフが
失格することがわかる。



(転置行列に対応するグラフは重線の向きを反対にして得られることに注意すれば検証は容易である。)

残留したグラフについて, $\tilde{d}_i, d_i, e_i = \tilde{d}_i/d_i$ を書き上げて見ると恒に $e_i \leq 3$ がわかる。よって

定理 5.5 体 k が有限群 G の表現体ならば, 群環 kG の単純成分 $\mathcal{O}_i = M_{d_i}(E_i)$ は $\dim_k E_i \leq 3$ を満たす。従って歪体 E_i は皆可換体である。(実は後で $\forall \dim_k E_i \leq 2$ を示す。)

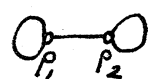
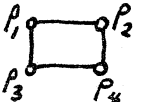
系. G' を G の交換子群とすれば $[G:G'] = \sum_{d_i=1} e_i$ 。従って G がアーベル群 $\Leftrightarrow \forall d_i = 1$ 。

(証明) G/G' の k 上の既約表現は, G の既約表現 ρ_i のうちで, $\text{Ker } \rho_i \supset G'$ なるものとして特徴づけられる。そのとき $\rho_i(k[G/G']) = \rho_i(kG) \cong \mathcal{O}_i \cong M_{d_i}(E_i)$ である。よって

$\text{Ker } \rho_i \supset G' \Leftrightarrow \rho_i(G)$ が可換群 $\Leftrightarrow \rho_i(kG) \cong M_{d_i}(E_i)$ が可換環 $\Leftrightarrow d_i = 1$ (E_i が可換体だから)。よって $k[G/G'] \cong \bigoplus_{d_i=1} \mathcal{O}_i$ $\therefore [G:G'] = \sum_{d_i=1} \dim_k E_i = \sum_{d_i=1} e_i$ (証明終)

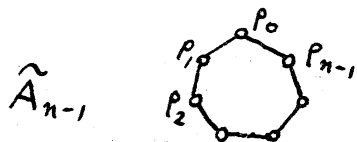
§ 6. アーベル群の場合

定理 3.1 により表現体 k をもつ有限アーベル群 G は

$G = \mathbb{Z}_n$ 又は $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ である。 $G = \mathbb{Z}$ なら体 k 上の 2 次の自己反傾的な忠実表現 ρ — 以下かかる ρ を簡単のため G の実現ということにする — は $\rho = 1_G \oplus 1_G$ (1_G は G の単位表現となり, G の表現グラフは $\tilde{L}_0^*$: ) となる。 $G = \mathbb{Z}_2 = \langle \sigma \rangle$ なら, G の k 上の既約表現は $\rho_1 = 1_G$, $\rho_2 = \varepsilon$ ($\varepsilon(\sigma) = -1$) で, G の実現 ρ は $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ 又は $\rho = 2\rho_2$ である。夫々に応じて G の表現グラフは $\tilde{L}_1$:  か $\rho_1 \xrightarrow{(2,2)} \rho_2$ となる。 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ なら G の実現は本質的には一通りで, 表現グラフは必ず $\tilde{A}_3$:  となることは容易にわかる。 $G = \mathbb{Z}_n = \langle \sigma \rangle$, $n \geq 3$ とする。 G の実現 ρ をとり, 行列 $\rho(\sigma)$ の固有値を α, β とすれば, α, β は 1 の原始 n 乗根であるが, ρ の自己反傾性により $\alpha\beta = 1$ となる。いま $\alpha = \theta = \zeta_n$, $\beta = \theta^{-1}$ とおき, 場合をわけて考える。

(イ) $\theta \in k$ の時.

G の k 上の既約表現は ρ_i ($0 \leq i \leq n-1$), $\rho_i(\sigma) = \theta^i$, $\rho_i = \rho$ で与えられる。 $\rho \otimes \rho_j = \rho_{j+1} \oplus \rho_{j-1}$ ($\rho_n = \rho_0$ とする) だから表現グラフは



となる。

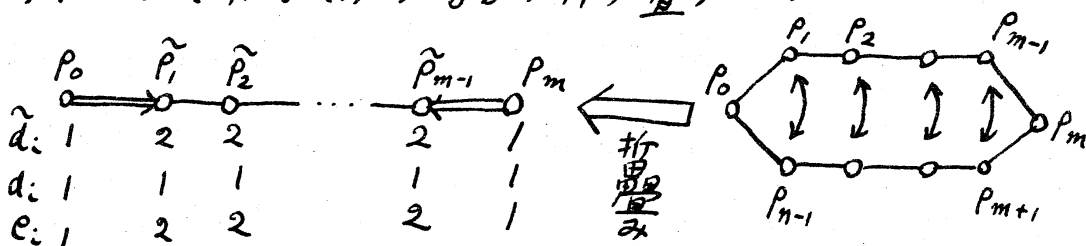
(ロ) $\theta \notin k$, $n = \text{偶数} = 2m$ の時.

上の (イ) の表現 ρ_j と ρ_{n-j} とを一緒にして折り畳んでみ

る。即ち直和 $p_j \oplus p_{n-j}$ を作り, $\tilde{p}_j = p_j \oplus p_{n-j}$ ($1 \leq j \leq m-1$) とおくと, G の k 上の 2 次既約表現 $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{m-1}$ が生ずる。
 ($\theta + \theta^{-1} \in k$ 故, $\theta^i + \theta^{-i} \in k$ がわかる。 $\tilde{p}_i(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \theta^i + \theta^{-i} \end{pmatrix}$ で $\tilde{p}_i$ が作れるから, $\tilde{p}_i$ は k 上の表現で, $k(\theta)$ 上では $p_j \oplus p_{m-j}$ と同値となる。) $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{m-1}$ が互いに同値でないことは,

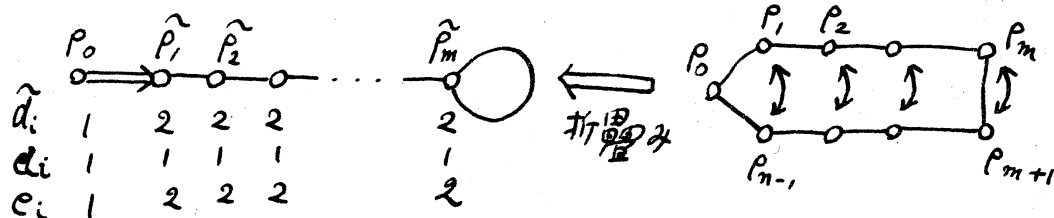
$$1 \leq i < j \leq m-1 \Rightarrow \theta^i + \theta^{-i} \neq \theta^j + \theta^{-j}$$

からわかる。これに (1) の p_0, p_m を加えると, 次数の計算により, G の k 上の既約表現の完全代表示 $p_0, p_m, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{m-1}$ が得られたとわかる。あとは簡単な計算で表現グラフが得られる。これは (1) の場合の折り畳みである。



(1) $\theta \notin k$, $n = \text{奇数} = 2m+1$ の時。

上の (ロ) と同様に, (1) の折り畳み $\tilde{p}_j = p_j \oplus p_{n-j}$ ($1 \leq j \leq m$) と p_0 と k 上の 2 次既約表現が得られ, 表現グラフは



となる。

すると残留グラフのうち $\forall d_i = 1$ である $\tilde{L}_\ell$ は $\ell \geq 2$ なら

は表現グラフとしては失格することがわかる。

§7. $G = \mathcal{A}_{2n} = (2, 2, n)$ ($n \geq 3$) の場合。

(1) $n = \text{偶数} = 2m$ の時。

$G = \langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^n = PQR = 1 \rangle = \langle Q, R \mid Q^2 = R^n = 1, QRQ^{-1} = R^{-1} \rangle$ より, G の 1 次表現は次の 4 つの χ_i ($1 \leq i \leq 4$) である。

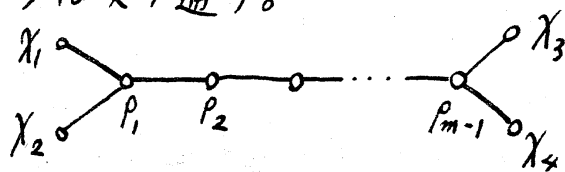
	Q	R
χ_1	1	1
χ_2	-1	1
χ_3	1	-1
χ_4	-1	-1

$m-1$ 個の G の表現体 K_j 上の表現 ρ_j を

$$\rho_j(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_j(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \theta^j + \theta^{-j} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq m-1)$$

で定義する。ただし, $\theta = \zeta_n$ 。(基本関係の保存の検証は容易である。)すると次の諸事が見証できる:

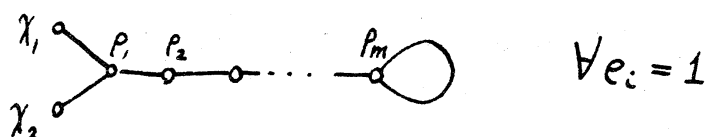
1. $\rho_1, \dots, \rho_{m-1}$ は絶対既約, かつ互いに非同値
 2. $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_1, \dots, \rho_{m-1}$ が G の全既約表現をなす
- これより, 実現としては $\rho = \rho_1$ をとったとしてよいから, 表現グラフは次の通り。



$\forall e_i = 1$ ($\because$ 絶対既約性より)

(ロ) $n = \text{奇数} = 2m+1$ の時。

G の 1 次表現は上の記号で χ_1, χ_2 のみ。 $p_1, \dots, p_m$ が絶対既約な 2 次表現で, かつ互いに非同値となることが検証される。そして $\chi_1, \chi_2, p_1, \dots, p_m$ が全既約表現となる。表現グラフは



§ 8. $G = \langle 2, 2, n \rangle$ ($n \geq 2$) の場合。

(イ) $n = \text{偶数} = 2m$ の場合。

$$G = \langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^n = PQR \rangle = \langle Q, R \mid Q^2 = R^n, QRQ^{-1} = R^{-1} \rangle$$

より, G の 1 次表現は次の 4 つの χ_i ($1 \leq i \leq 4$) である。

	Q	R
χ_1	1	1
χ_2	-1	1
χ_3	1	-1
χ_4	-1	-1

$\theta = \zeta_{2n}$, $S = \theta + \theta^{-1}$, $S_j = \theta^j + \theta^{-j}$ ($j = 1, 2, \dots$) とおく。 G の表現体 k は $S_j \in k$ に満たす ($\because$ 定理 4.3)。 G の実現 ρ は

$$\rho(Q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \rho(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & S \end{pmatrix}$$

であるといふ。すると $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha + \delta = 0$ と基本関係とみら

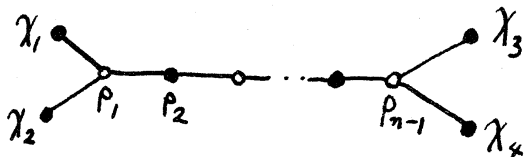
$$(\star) \quad \alpha^2 + S\alpha\gamma + \gamma^2 = -1$$

を得る。すると各 j に対し, $x, y \in k$ が存在して

$$(*) \quad x^2 + s_j xy + y^2 = (-1)^j$$

となる。実際もし $\theta \in k$ なら $x = \theta^{n_j}, y = 0$ とおけばよい。
もし $\theta \notin k$ なら, $k(\theta)/k$ は 2 次ガロア拡大で, ガロア群は $\{1, \varphi\}$, $\varphi(\theta) = \theta^{-1}$ となる ($\because S \in k$)。そして $1 \leq j \leq n-1$
 $\Rightarrow \theta^j \notin k$ (もし $\theta^j \in k$ なら $\varphi(\theta^j) = \theta^j \therefore \theta^{2j} = 1 \therefore$
 $2n \mid 2j \therefore n \leq j$)。よって $k(\theta) = k(\theta^j) (=K$ とおく)。

1 ルム写像 $K \rightarrow k \in N$ と書くと, $(*)$ は $(-1)^j \in N(K)$ を意味する。一方 $(*)$ より $-1 \in N(K)$ 。よって $(*)$ の解 $x, y \in k$ の存在がわかる。すると適当な $a_j, b_j, c_j, d_j \in k$ が存在して, $\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} = p_j(Q), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s_j \end{pmatrix} = p_j(R)$ が Q, R 周の基本関係を満たすことがわかる。(★を得たのと逆の計算を辿ればよい。) かくして G の表現 $p_1, \dots, p_{n-1}$ を得るが, これらが k 上の絶対既約表現となり, かつ互いに非同値であることが検証される。そして $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, p_1, \dots, p_{n-1}$ が G の全既約表現を与え, 表現グラフは次の通り: $p = p_1$



$$\forall \blacksquare e_i = 1$$

黒丸の頂点 $\chi_i, p_{2\nu}$ の意味は, これらの表現は実は G の商群 $G/\langle \Sigma \rangle = (2, 2, n) = \Omega_{2n}$ ($\Sigma = PQR$) の表現をひきおこしている意である。

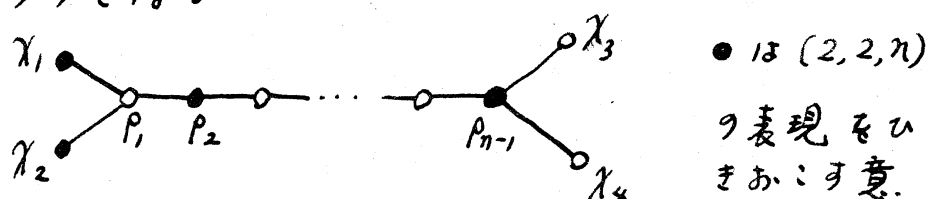
(ロ) $n = \text{奇数} = 2m+1$, $S_x \in \mathcal{L}$ の場合。

G は次の 4 個の 1 次表現 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ をもつ。

	Q	R
χ_1	1	1
χ_2	-1	1
χ_3	i	-1
χ_4	-i	-1

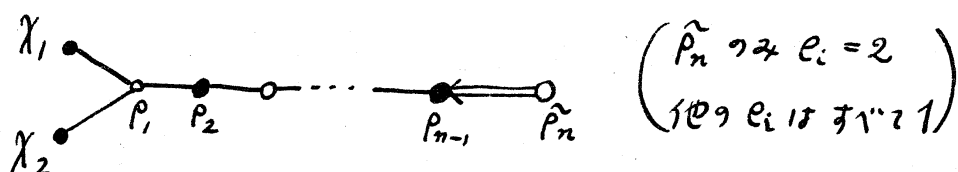
($i = S_x$ とおく)

すると 2 次の絶対既約表現 $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ を (イ) と同様に定め、次の表現グラフを得る：



(ハ) $n = \text{奇数} = 2m+1$, $S_x \notin \mathcal{L}$ の場合。

G の 1 次表現は χ_1, χ_2 のみである。(ロ) の χ_3 と χ_4 とを折り畳んで $\tilde{\rho}_n = \chi_1 \oplus \chi_2$ を作ると, $S_x + S_x^{-1} = 0 \in \mathcal{L}$ 故 $\tilde{\rho}_n$ は G の $\mathcal{L}$ 上の 2 次既約表現で, 次の表現グラフを得る：



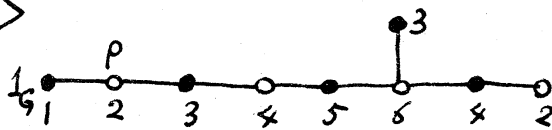
以上の結果から, $\tilde{G}_{2,1}$ は表現グラフとしては失格するにちがひある。何故なら, これを表現グラフにもつ群 G は $|G| = 8$, $[G : G'] = 4$ となる筈 (定理 5.5, 系)

で、従って $G = \langle 2, 2, 2 \rangle$ 又は $G = (2, 2, 4)$ である。しかしこれらの表現グラフは上述の通りで、 $\tilde{G}_{2,1}$ 型ではない。また $\tilde{G}_{2,1}$ の時のみ $e_i = 3$ が現われるから、定理 5.5 中の主張 $\dim_k E_i \leq 2$ が恒に成り立つこともわかる。

§9. $G = \langle 2, 3, n \rangle$ ($3 \leq n \leq 5$) の場合。

これらの群は、体 k ($\text{char } k \nmid |G|$) の代数的閉包 $\bar{k}$ 上で次数 > 2 の既約表現をもつことが知られている。 $(k = \mathbb{C}$ の場合と同様である。) よって、 k 上の既約表現の次数の最大値は > 2 となる。 $(k$ 上の既約表現は $\bar{k}$ で分解し得るから。) 一方、 $\S 3$ と上述により、 $\max \tilde{d}_j > 2$ なる一般ユークリッド型のグラフは $\tilde{F}_{4,1}$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ のみが残留している。 $|G|$ を比べて $\langle 2, 3, 3 \rangle$ の表現グラフは $\tilde{F}_{4,1}$, $\tilde{E}_6$; $\langle 2, 3, 4 \rangle$ の表現グラフは $\tilde{E}_7$; $\langle 2, 3, 5 \rangle$ の表現グラフは $\tilde{E}_8$ とならざるを得ない。従って

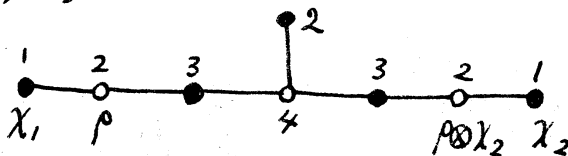
$\langle 2, 3, 5 \rangle$



$\left(\begin{array}{l} \forall i, e_i = 1 \\ \text{数字は } \tilde{d}_i = d_i \text{ を示す} \end{array} \right)$

• は商群 $(2, 3, 5) \cong 2L_5$ の既約表現の意。

$\langle 2, 3, 4 \rangle$



$\left(\begin{array}{l} \forall i, e_i = 1 \\ \text{数字は } \tilde{d}_i = d_i \text{ を示す} \end{array} \right)$

- 1 は商群 $(2, 3, 4) \cong \tilde{S}_4$ の既約表現の意である。また χ_1, χ_2 は次の 1 次表現である。

	P	Q	R
χ_1	1	1	1
χ_2	-1	1	-1

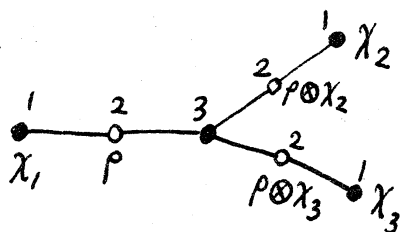
$\langle 2, 3, 3 \rangle$: これは次の二つの場合に分かれる :

(1) $\omega = \zeta_3 \in k$ の場合。

$G = \langle 2, 3, 3 \rangle$ は次の 3 個の 1 次表現をもつ。

	P	Q	R
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

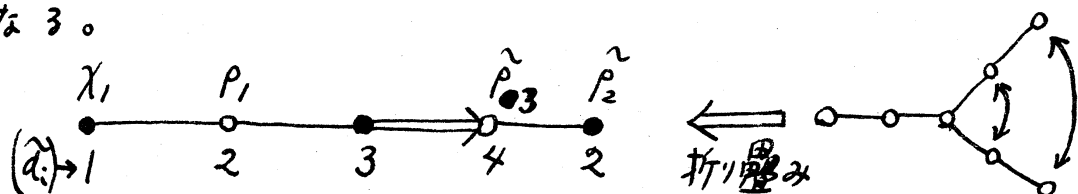
すると表現グラフは次の如く $\tilde{E}_6$ 型にならざるを得ない。



($\forall e_i = 1$; 数字は $\tilde{d}_i = d_i$ を示す。• は商群 $(2, 3, 3) = \tilde{S}_4$ の既約表現の意。

(2) $\omega = \zeta_3 \notin k$ の場合。

折り畳み $\chi_2 \oplus \chi_3 = \tilde{\rho}_2$, $(\rho \oplus \chi_2) \oplus (\rho \oplus \chi_3) = \tilde{\rho}_3$ が k 上の既約表現として登場し, 表現グラフは $\tilde{E}_6$ を得ず $\tilde{F}_4$ 型になる。



参考文献

- [1] D. Forst - J. McKay: Representations and Coxeter Graphs, preprint 1979 ; 尚 J. McKay: Affine Diagrams and character tables, 1979 (Santa Cruz 報告) もある。
- [2] D. Happel - U. Preiser - C.M. Ringel, Binary polyhedral groups and Euclidean diagrams, preprint, 1979
- [3] 岩堀長慶: McKay Observation について, 群論六甲シンポジウム報告集, 1980, 三月
- [4] H.S.M. Coxeter - W.O.J. Moser, Generators and relations for discrete groups, Springer, 2nd ed. 1965
- [5] N. Iwahori, On a property of a finite group, Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 11, 47-64, 1964
- [6] 岩堀長慶: 線型不等式とその応用 (岩波講座・基礎数学) 第6章

付記: F. Klein の本: The icosahedron and the solution of equations of the fifth degree (2nd ed. Dover, New York 1956) の 52 頁, 下から 12 行目のあたりに, binary polyhedral group の相対不変式 F_1, F_2, F_3 について, $F_1^{1/2}, F_2^{1/2}, F_3^{1/2}$ は同じ weight をもつ: と云 Case by Case の計算でわかる——と書いてあるが, 上述の 1 次表現の表から直ぐ検証され, $\langle 2, 3, n \rangle, \langle 2, 2, 2m \rangle$ なら $F_i^{1/2}$ = 絶対不変式——となる。