

On the Reconstruction of a Graph

東海大 理 恵羅 博

上智大 理工 齊藤 友克

ここで考えるグラフはすべて有限単純グラフ，すなわち，ループ，多重線を持たず，向き付けを考えない有限グラフとする。グラフ G の頂点集合を V_G ，線集合を E_G で表す。任意の $v \in V_G$ に対して， v 及び v に隣接するすべての線を G から取り除いて得られる G の部分グラフを G_v で表す。

P. J. Kelly [6] と S. M. Ulam [12] によって次のような問題が提起された。

問題 1. すべての $v \in V_G$ に対して G_v が与えられたときこれらのグラフの集まりから G は決定可能か？

表現を変えてもう少し正確に述べれば次のようになる。

G と H を 2 つのグラフとし，それらの頂点集合の間に 1 対 1 写像 $\sigma: V_G \rightarrow V_H$ が存在して次の条件を満たしているとする。「任意の $v \in V_G$ に対して $G_v = H_{\sigma(v)}$ 」このとき G と H との関係を $G \sim H$ で表す。

問題 1.' $G \simeq H$ ならば $G = H$ か？

特に G が *tree* の場合については Kelly [6] によって肯定的に解決された。更に広い範囲のグラフについても、いくつかの肯定的な結果が得られているが、一般のグラフに対しては未だ解決されていない。一方、与えられる部分グラフの条件を変えることによって、いくつかの異なる決定問題も提起されている。ここでは、これらの問題を整理して紹介する。

グラフ G に対して、 G の全体の集まりを $\mathcal{D}_1$ で表し、問題 1. の意味で決定可能なグラフを $\mathcal{D}_1$ -reconstructible であるという。(注. $\mathcal{D}_1$ には、一般に、同型のグラフも重複して含まれる。) 任意の $e \in EG$ に対して、 G から e を取り除いて得られる G の部分グラフを G^e で表す。グラフ G に対して、 G^e 全体の集まりを $\mathcal{D}_1'$ で表す。問題 1 と同様に次のような問題が考えられる。

問題 2. $\mathcal{D}_1'$ が与えられたとき、 G は決定可能か。[F. Harary 4]

問題 1. と問題 2. との間には次のような関係が知られている。

命題 [R. L. Hemminger 5] G が $\mathcal{D}_1'$ -reconstructible であることの必要十分条件は、 G の線グラフ $L(G)$ が $\mathcal{D}_1$ -reconstructible であることである。

命題 [D. L. Greenwell 2] グラフ G の $\mathcal{D}_1'$ が与えられれば, $\mathcal{D}_1$ は一意に決定される。

したがって問題 2 は問題 1 の特別な場合とみることが出来る。

次の問題は Harary [4] による。

問題 3. $\mathcal{D}_0 = \{G_v \mid v \in V G\}$ とするとき, 任意のグラフ G は $\mathcal{D}_0$ -reconstructible である。

(注. $\mathcal{D}_0$ は, $\mathcal{D}_1$ に含まれる部分グラフのうち, 同型でないものを 1 つずつ集めたものになる。)

問題 1., 3. について未解決なグラフは次の 2 つの類に大別できる。

- 1) non-separable グラフ, すなわち, 連結で cut-point を持たないグラフ。
- 2) 連結で, 次数 1 の葉を持ち, uni-cyclic (cycle を 2 つ以上含む) でないグラフ。

これらのグラフの更に有効な類別を考えることが問題解決に役立つと考えられる。上の 1), 2) に属さないグラフ, 例えば, 非連結グラフ, cut-point を持ち end-point を持たないグラフ, uni-cyclic グラフ等は $\mathcal{D}_1$ -reconstructible である。[例えば 3. を見よ] 1) のクラスでも, 構造に著しい特徴のあるいくつかのグラフに関しては若干の結果が得られ

ている。

命題 [B. Manvel 10] 極大 outer-planar グラフは,
 $\mathcal{D}_0$ -reconstructible である。

命題 G を 2-connected で以下の条件をみたすグラフとする。

(1) G の 2 つの誘導部分グラフ H, K は 3-connected
 で, $VG = VH \cup VK$

(2) 任意の点 $v \in VH, u \in VK$ に対して,

$$|E\langle \{v\}, K \rangle| + 1 \leq |EK|$$

$$|E\langle \{u\}, H \rangle| + 1 \leq |EH|$$

(ただし, $\langle \{v\}, K \rangle, \langle \{u\}, H \rangle$ はそれぞれ, v, K, u, H
 で生成される誘導部分グラフ)

このとき, グラフ G' に対して, G と G' の $\mathcal{D}_1$ が等しければ,
 G' の部分グラフで, 上の (1), (2) の条件をみたす H', K'
 が存在し, $H' \cong H, K' \cong K$.

問題 2 の場合も上と類似した結果が得られている。また,
 グラフの構造的特徴を争がかりとしない次のような結果もある。

$|VG| = n, |EG| = m$ とする。

定理 [L. Lovász 7] $m > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$ ならば G は $\mathcal{D}'_1$ -
 reconstructible である。

定理 [V. Müller 11] $m > n(\log_2 n - 1)$ ならば G は,
 $\mathcal{D}'_1$ -reconstructible である。

VG の部分集合 $S \subset VG$ に対して, S とそれらの奥に隣接する線をすべて G から取り除いて得られる G の部分グラフを G_S で表す。次の問題は [Kelly 6] による。

問題 4. 任意の正の整数 κ に対して, 次の条件を満たす正の整数 $D(\kappa)$ が存在する。

$\mathcal{D}_\kappa$ を G_S ; $S \subset VG$, $|S| = \kappa$ 全体の集まりとすると,
 $|VG| \geq D(\kappa)$ ならば G は $\mathcal{D}_\kappa$ -reconstructible である。

G が tree の場合, 次の結果が得られている。

定理 [W. B. Giles 1] tree は $\mathcal{D}_2$ -reconstructible である。

一般のグラフに関しては, ほとんど何も判っていない。

[例えば 8 を見よ]

グラフの invariants, グラフ作用素等の概念が上記の決定問題にどのような役割をもつかほとんど未知である。次のようないくつかの結果がある。

命題 [2] $\mathcal{D}_1$, $(\mathcal{D}'_1)$ はグラフの degree sequence を決定する。

命題 $\mathcal{D}_1$ は *arboricity* を決定する。

命題 任意のグラフ G の中間グラフ $M(G)$ は $\mathcal{D}_1$ -reconstructible である。

命題 $\mathcal{D}_1'$ は $\text{spec}(G)$ を決定する。

命題 $\mathcal{D}_1$ が $\mathcal{D}_0$ と一致するならば, G の自己同型群は, 単位群である。

ここで, グラフ G を rooted グラフ (G, R) とすると, 以下のことが示せる。

命題 $\mathcal{D}_1(R)$ は root R との距離が i の葉の個数を決定する。

命題 $\mathcal{D}_i(R)$ は $\alpha(v_i, R)$ を決定する。ここで v_i は $G - v_i = G_i$ となる葉。

REFERENCES

- [1] W.B. Giles Reconstructing trees from two points deleted subtrees
Discrete Math. 15 (1976) 325-332
- [2] S.I. Greenwell Reconstructing graphs
Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971) 431-432
- [3] S.I. Greenwell, R.L. Hamming Reconstructing graphs
The Many Facets of Graph Theory L.N.M. 110 Springer '69
- [4] F. Harary On the reconstructions of a graph from a collection of
subgraphs

Czechoslovak Academy of Sciences, Prague / Academic Press
New York (1965) 47-52

- [5] R.L. Hemminger On reconstructing a graph
Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 185-187
- [6] P.J. Kelly A congruence theorem for trees
Pacific J. Math. 7 (1957) 961-968
- [7] L. Lovász A note on the line reconstruction problem
J. Comb. Th. (B) 13 (1972) 309-310
- [8] B. Manvel Some basic observations on Kelly's Conjecture for
graphs
Discrete Math. 8 (1974) 181-185
- [9] B. Manvel On reconstructing graphs from their sets of
sub-graphs
J. Comb. Th. (B) 21 (1976) 156-165
- [10] B. Manvel Reconstruction of maximal outerplanar graphs
Discrete Math. 2 (1972) 269-278
- [11] V. Müller The edge reconstruction hypothesis is true for
graphs with more than $n \log_2 n$ edges
J. Comb. Th. (B) 22 (1977) 281-283
- [12] S.M. Ulam A collection of mathematical problems
New York, Wiley-Intersciences P29 (1960)