

ブロック効果をもつ分解能 $(2l+1)^*$ の釣合型

一部実施 2^m 要因計画について

広島大・総合

栗田正秀

§1. 序

強 $2l$, 大玉 N , 因子数 m , 水準数 2 , 指標集合 $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2l}\}$ の均斉配列 $(BA(N, m, 2, 2l)\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2l}\})$ と分解能 $(2l+1)$ の釣合型一部実施 2^m 要因計画 (2^m-BFFD) の関係は, 山本, 白倉, 栗田 [4] によって求められた。また三角型多次元部分釣合型 $(TM-DPB)$ アソシエーションスキームとその代数を用いて, 分解能 $(2l+1)$ の 2^m-BFFD に基く情報行列の固有項式が, 高々 $(l+1)$ 次の行列式の積で求められた [5]。現在, 奇数あるいは偶数分解能の $BFFD$ についての多くの研究がなされている。

本稿では, 計画 T が $T' = [T'_1; \dots; T'_r]$ である場合について考える。ただし, T_k ($k=1, 2, \dots, r$) は $BA(N_k, m, 2, 2l)\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{2l}^{(k)}\}$ であり, A' は行列 A の転置を示す。

§2. ブロック効果をもつ 2^m-BFFD

N 個の処理組合せをもつ計画 T を $T' = [T'_1; \dots; T'_r]$ とする。ただし, T_k ($k=1, 2, \dots, r$) は $BA(N_k, m, 2, 2l)\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{2l}^{(k)}\}$

である。このとき T は明らかに $BA(N, m, 2, 2\ell) \{ \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2\ell} \}$ となる。ただし, $N = \sum_{k=1}^r N_k$, $\mu_i = \sum_{k=1}^r \mu_i^{(k)}$ ($i = 0, 1, \dots, 2\ell$) である。

T に基づくモデルを考える:

$$(2.1) \quad y(T) = E_T \underline{\theta} + \Xi \underline{b} + \underline{\varepsilon}_T,$$

ただし, $y(T)' = (y(T_1)', \dots, y(T_r)'), E_T' = [E_1'; \dots; E_r'], \underline{\theta}' = (\theta_\phi; \{\theta_t\}; \dots; \{\theta_{t_1}, \dots, t_\ell\}) (= (\theta_\phi, \underline{\theta}'))$, $\Xi = \text{diag} [I_{N_1}; \dots; I_{N_r}]$, $\underline{b}' = (b_1, \dots, b_r)$, $\underline{\varepsilon}_T' = (\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_r')$ である。ここで, $y(T_k), E_k, b_k, \varepsilon_k$ ($k=1, 2, \dots, r$) は各々 T_k に基づく $N_k \times 1$ の観測値ベクトル, $N_k \times \nu_k$ の計画行列, ブロック効果, $N_k \times 1$ の誤差ベクトル, $\nu_k = 1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{\ell}$ である。さらに誤差ベクトル $\underline{\varepsilon}_T$ について, $E[\underline{\varepsilon}_T] = \underline{0}$, $\text{Var}[\underline{\varepsilon}_T] = \sigma^2 \times \text{diag} [(1/\tau_1)I_{N_1}; \dots; (1/\tau_r)I_{N_r}] (= \sigma^2 D_T^{-1})$ で, σ^2 は未知であるが, $\tau_k (> 0)$ は既知と仮定する。

定義 $\underline{\theta}^*$ が推定可能な計画を分解能 $(2\ell+1)^*$ という。

ブロック効果を除きし得られる $\underline{\theta}^*$ を推定するための正規方程式は

$$(2.2) \quad \begin{bmatrix} 0 & \underline{0}' \\ \underline{0} & M_T^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_\phi \\ \underline{\theta}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y^*(T) \end{bmatrix}$$

で与えられる。ただし

$$M_T^* = E_T^{*'} D_T^{-1/2} \{ I_N - \Xi (\Xi' \Xi)^{-1} \Xi' \} D_T^{-1/2} E_T^*$$

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad &= \sum_{k=1}^r [\tau_k E_k^{*'} \{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} E_k^*], \\
 \hat{\theta}^*(T) &= E_T^{*'} D_T^{1/2} \{I_N - \Xi(\Xi' \Xi)^{-1} \Xi'\} D_T^{1/2} \hat{\theta}(T) \\
 &= \sum_{k=1}^r [\tau_k E_k^{*'} \{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} \hat{\theta}(T_k)]
 \end{aligned}$$

である。ここに $D_T^{1/2} = \text{diag} [\sqrt{\tau_1} I_{N_1}; \dots; \sqrt{\tau_r} I_{N_r}]$ で、 E_T^* , E_k^* は各々 E_T , E_k の第 1 列を取り除いた $N \times (N-1)$, $N_k \times (N_k-1)$ の行列である。

(2.2) において、 M_T^* が正則であるならば、 θ^* の推定値 $\hat{\theta}^*$ は

$$(2.4) \quad \hat{\theta}^* = V_T^* \hat{\theta}^*(T)$$

で与えられる。ただし、 $V_T^* = (M_T^*)^{-1}$ である。

定理 2.1. $T' = [T_1'; \dots; T_r']$ を分解能 $(2\ell+1)^*$ の 2^m -BF FFD とある。ただし T_k ($k=1, 2, \dots, r$) は $BA(N_k, m, 2, 2\ell)$ $\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{2\ell}^{(k)}\}$ である。このとき、 θ^* の推定値 $\hat{\theta}^*$ について

$$E[\hat{\theta}^*] = \theta^*, \quad \text{Var}[\hat{\theta}^*] = \sigma^2 V_T^*$$

となる。

証明. $\{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} \hat{\theta}_{N_k} = 0$ なるので、

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\theta}^*] &= V_T^* \left[\sum_{k=1}^r \tau_k E_k^{*'} \{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} \{E[\hat{\theta}(T_k)]\} \right] \\
 &= V_T^* \left[\sum_{k=1}^r \tau_k E_k^{*'} \{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} \{[\hat{\theta}_{N_k}; E_k^*] \begin{bmatrix} \theta_\phi \\ \theta^* \end{bmatrix} + b_k \hat{\theta}_{N_k} \} \right] \\
 &= V_T^* \left[\sum_{k=1}^r \tau_k E_k^{*'} \{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} E_k^* \right] \theta^* \\
 &= \theta^*
 \end{aligned}$$

となる。また $\{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\}$ は中等行列なので

$$\begin{aligned}
 & \text{Var}[\hat{\theta}^*] \\
 &= V_T^* \text{Var}[\eta^*(T)] V_T^* \\
 &= V_T^* [E_T^{*'} D_T^{-1/2} \{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\} D_T^{-1/2}] \text{Var}[\eta(T)] \\
 &\quad \times [D_T^{-1/2} \{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\} D_T^{-1/2} E_T^*] V_T^* \\
 &= \sigma^2 V_T^* [E_T^{*'} D_T^{-1/2} \{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\} D_T^{-1/2} D_T^{-1} D_T^{-1/2} \\
 &\quad \times \{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\} D_T^{-1/2} E_T^*] V_T^* \\
 &= \sigma^2 V_T^* [E_T^{*'} D_T^{-1/2} \{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\} D_T^{-1/2} E_T^*] V_T^* \\
 &= \sigma^2 V_T^*
 \end{aligned}$$

となる。

系 定理 2.1 の計画 T について 2, $\tau_1 = \dots = \tau_r (=1)$ となる

ならば

$$\text{Var}[\hat{\theta}^*] = \sigma^2 \left[\sum_{k=1}^r E_k^{*'} \{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} E_k^* \right]^{-1}$$

がある。

§3. 共分散行列の固有多項式

この章では、計画 T に基く θ^* の推定値 $\hat{\theta}^*$ の共分散行列の固有多項式を求める。

補題 3.1. 計画 T_k ($k=1, 2, \dots, r$) $\in BA(N_k, m, 2, 2\varrho) \{ \mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{2\varrho}^{(k)} \}$ とする。このとき

$$L^* [E_k^{*'} \{I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k}\} E_k^*] L^*$$

$$= \text{diag} [K_0^*(k); \underbrace{K_1^*(k), \dots, K_1^*(k)}_{\Phi_1}; \dots; \underbrace{K_\ell^*(k), \dots, K_\ell^*(k)}_{\Phi_\ell}]$$

なる $(\nu_\ell - 1) \times (\nu_\ell - 1)$ の直交行列 L^* が存在する。ただし, $K_0^*(k)$
 $= \| \kappa_0^{*i,j}(k) \| \quad (\ell \times \ell), \quad K_\gamma^*(k) = \| \kappa_\gamma^{*u,v}(k) \| \quad (\ell - \gamma + 1) \times (\ell - \gamma + 1) Z''$

$$\kappa_0^{*i,j}(k) = \sum_{\alpha=0}^i \gamma_{j-i+2\alpha}^{(k)} Z_{0\alpha}^{(i,j)} - \sqrt{\binom{m}{i} \binom{m}{j}} \gamma_i^{(k)} \gamma_j^{(k)} / \gamma_0^{(k)}$$

(3.1)

$$(1 \leq i \leq j \leq \ell),$$

$$\kappa_\gamma^{*u,v}(k) = \sum_{\alpha=0}^{\gamma+u} \gamma_{v-u+2\alpha}^{(k)} Z_{\gamma\alpha}^{(\gamma+u, \gamma+v)}$$

$$(0 \leq u \leq v \leq \ell - \gamma; \gamma = 1, 2, \dots, \ell).$$

2) あり

$$\gamma_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{2\ell} \sum_{p=0}^i (-1)^p \binom{i}{p} \binom{2\ell-i}{j-i+p} \mu_j^{(k)} \quad (i=0, 1, \dots, 2\ell),$$

$$Z_{\beta\alpha}^{(u,v)} = \sum_{b=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-b} \frac{\binom{u-p}{b} \binom{u-b}{u-\alpha} \binom{m-u-p+b}{b} \{ \binom{m-u-p}{v-u} \binom{v-p}{v-u} \}^{1/2}}{\binom{v-u+b}{b}}$$

(3.2)

$$(0 \leq \alpha, \beta \leq u \leq v \leq \ell),$$

$$\Phi_p = \binom{m}{p} - \binom{m}{p-1} \quad (p=0, 1, \dots, \ell)$$

2) ある。

証明. 一般平均効果を除いた ℓ -因子交互作用まで 2) の要因効果の間に定義される TMD PB アソシエーショニコ代数を用いて容易に証明できる。

定理 3.1. 分解能 $(2\ell+1)^*$ の 2^m -BF 代数, $T' = [T'_1; \dots; T'_\ell]$ に基く $V_{T'}^*$ の固有多項式 $\psi(x)$ は

$$(3.3) \quad \psi(x) = [\det \{ (K_0^*)^T - x I_\ell \}] \prod_{i=1}^{\ell} [\det \{ (K_i^*)^T - x I_{\ell-i+1} \}]^{\Phi_i}$$

で与えられる。ただし, T_k は $BA(N_k, m, 2, 2\ell) \{ \mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{i\ell}^{(k)} \}$

で, $K_p^* = \sum_{k=1}^r \{\tau_k K_p^*(k)\}$ ($p=0, 1, \dots, l$) である.

証明. (2.3) と補題 3.1 より容易に求まる.

系. 定理 3.1 の計画 T について, $\tau_1 = \dots = \tau_r (=1)$ ならば, V_T^* の固有項式 $\chi(x)$ は

$$\chi(x) = [\det \{(K_0^{**})^{-1} - x I_{l_0}\}] \prod_{i=1}^l [\det \{(K_i^{**})^{-1} - x I_{l_i - \gamma_i + 1}\}]^{\phi_i}$$

で与えられる. ただし, $K_p^{**} = \sum_{k=1}^r K_p^*(k)$ ($p=0, 1, \dots, l$) である.

定理 3.2. 定理 3.1 の計画 T に対し,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tau(V_T^*) &= \sum_{p=0}^l \phi_p [\tau \{(K_p^*)^{-1}\}], \\ \det(V_T^*) &= \prod_{p=0}^l [\det \{(K_p^*)^{-1}\}]^{\phi_p} \end{aligned}$$

である.

系. 定理 3.1 の計画 T について, $\tau_1 = \dots = \tau_r (=1)$ ならば

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \tau(V_T^*) &= \sum_{p=0}^l \phi_p [\tau \{(K_p^{**})^{-1}\}], \\ \det(V_T^*) &= \prod_{p=0}^l [\det \{(K_p^{**})^{-1}\}]^{\phi_p} \end{aligned}$$

である.

例). T_1 を $BA(9, 4, 2, 4)\{0, 1, 0, 1, 1\}$, T_2 を $BA(11, 4, 2, 4)\{1, 0, 1, 1, 0\}$ とする. この T_1, T_2 は各々分離能 IV, V の 2^4 -BF FD である (白倉 [1], Srivastava & Chopra [3]). (3.2) より $\gamma_0^{(1)} = 9, \gamma_1^{(1)} = \gamma_2^{(1)} = \gamma_3^{(1)} = 1, \gamma_4^{(1)} = -7, \gamma_0^{(2)} = 11, \gamma_1^{(2)} = 1, \gamma_2^{(2)} = -1, \gamma_3^{(2)} = -3, \gamma_4^{(2)} = 3$ となる. ここに $\tau_1 = \tau_2 = 1$ とすると

$$K_0^{**} = \begin{bmatrix} \frac{1900}{99} & -\frac{4\sqrt{6}}{99} \\ * & \frac{1464}{99} \end{bmatrix}, \quad K_1^{**} = \begin{bmatrix} 20 & 4\sqrt{2} \\ * & 24 \end{bmatrix}, \quad K_2^{**} = [16]$$

$$\text{よりの } 2^n, \quad (K_0^{**})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{366}{7024} & \frac{\sqrt{6}}{7024} \\ * & \frac{475}{7024} \end{bmatrix}, \quad (K_1^{**})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{112} & -\frac{\sqrt{2}}{112} \\ * & \frac{5}{112} \end{bmatrix}, \quad (K_2^{**})^{-1} = \left[\frac{1}{16}\right]$$

となる。よ、2 (3.5) より

$$\text{tr}(V_T^*) = \frac{39981}{77264} \doteq 0.51746$$

$$\det(V_T^*) = \frac{1355193}{(7024)^2 \times (11)^4} \doteq 0.96275 \times 10^{-13}$$

となる。

§ 4. 2^m -BFFD の存在条件.

T を $BA(N, m, 2, 2l) \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2l}\}$ とすると、分解能 $(2l+1)$ の 2^m -BFFD が存在するための必要条件は、白倉, 栗田 [2] によ、2 与えられている。ここでは分解能 $(2l+1)^*$ の 2^m -BFFD, $T' = [T'_1; \dots; T'_r]$ の存在条件を定める。

定理 4.1. $T' = [T'_1; \dots; T'_r]$ を $BA(N, m, 2, 2l) \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2l}\}$ とする。ただし, T_k は $BA(N_k, m, 2, 2l) \{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{2l}^{(k)}\}$ で, $N = \sum_{k=1}^r N_k$, $\mu_i = \sum_{k=1}^r \mu_i^{(k)}$ ($i=0, 1, \dots, 2l$) 2^n である。このとき計画 T が存在するための必要条件は, K_β^* ($\beta=0, 1, \dots, l$) が半正値行列になることである。

定理 4.2. 定理 4.1 の配列 T について, T が分解能 $(2l+1)^*$ になるための必要十分条件は, K_β^* ($\beta=0, 1, \dots, l$) が正値

行列になることである。

(3.1)と定理4.2より次の定理が成立つ(e.f., 白名, 栗田[2]):

定理4.3. Γ を定理4.1で与えられる配列とする。このとき, Γ が分解能 $(2l+1)^*$ の 2^m -BFFD になるための必要条件は次の不等式を満たすことである:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \mu_l^{(k)} &> 0, \\ \sum_{k=1}^r \tau_k \{ (m-2l+2)(\mu_{l-1}^{(k)} + \mu_{l+1}^{(k)}) - 2(m-2l)\mu_l^{(k)} \} &> 0 \quad (l \geq 2), \\ \sum_{k=1}^r \tau_k \{ (m-2l+4)(\mu_{l-2}^{(k)} + \mu_{l+2}^{(k)}) + 4(\mu_{l-1}^{(k)} + \mu_{l+1}^{(k)}) - 2(m-2l)\mu_l^{(k)} \} &> 0 \\ &\quad (l \geq 3), \\ \sum_{k=1}^r \tau_k \{ \binom{m-2l+4}{2}(\mu_{l-2}^{(k)} + \mu_{l+2}^{(k)}) - 2(m-2l)(m-2l+2)(\mu_{l-1}^{(k)} + \mu_{l+1}^{(k)}) \\ &\quad + \{ 3(m-2l)^2 + 5(m-2l) + 4 \} \mu_l^{(k)} \} > 0 \quad (l \geq 3), \\ \sum_{k=1}^r \tau_k \{ (m-2l+6)(\mu_{l-3}^{(k)} + \mu_{l+3}^{(k)}) + 2(m-2l+8)(\mu_{l-2}^{(k)} + \mu_{l+2}^{(k)}) \\ &\quad - (m-2l-10)(\mu_{l-1}^{(k)} + \mu_{l+1}^{(k)}) - 4(m-2l)\mu_l^{(k)} \} > 0 \quad (l \geq 4), \\ \sum_{k=1}^r \tau_k \{ 2\binom{m-2l+6}{2}(\mu_{l-3}^{(k)} + \mu_{l+3}^{(k)}) - 2(m-2l+5)(m-2l-2)(\mu_{l-2}^{(k)} + \mu_{l+2}^{(k)}) \\ &\quad - \{ (m-2l)^2 + 11(m-2l) - 2 \}(\mu_{l-1}^{(k)} + \mu_{l+1}^{(k)}) + 4\{ (m-2l)^2 + 3(m-2l) \\ &\quad + 6 \} \mu_l^{(k)} \} > 0 \quad (l \geq 4), \\ \sum_{k=1}^r \tau_k \{ 6\binom{m-2l+6}{3}(\mu_{l-3}^{(k)} + \mu_{l+3}^{(k)}) - 6(m-2l)(m-2l+4)(m-2l+5) \\ &\quad \times (\mu_{l-2}^{(k)} + \mu_{l+2}^{(k)}) + 3(m-2l+4)\{ 5(m-2l)^2 + 7(m-2l) + 6 \}(\mu_{l-1}^{(k)} + \mu_{l+1}^{(k)}) \\ &\quad - 4(m-2l)\{ 5(m-2l)^2 + 21(m-2l) + 28 \} \mu_l^{(k)} \} > 0 \quad (l \geq 4), \\ \sum_{k=1}^r \tau_k \left[\sum_{j=0}^{2l} \left\{ \sum_{\alpha=0}^i \sum_{p=0}^{2\alpha} (-1)^p N_k \left(\begin{matrix} 2\alpha \\ p \end{matrix} \right) \binom{2l-2\alpha}{j-2\alpha+p} \binom{i}{\alpha} \binom{m-i}{\alpha} \right\} \mu_j^{(k)} \right. \\ &\quad \left. - \binom{m}{i} \left\{ \sum_{j=0}^{2l} \sum_{p=0}^i (-1)^p \binom{i}{p} \binom{2l-i}{j-i+p} \mu_j^{(k)} \right\}^2 \right] > 0 \quad (1 \leq i \leq l). \end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] Shirakura, T. (1979). Optimal balanced fractional 2^m factorial designs of resolution IV derived from balanced arrays of strength four. *J. Japan Statist. Soc.* 9, 19-27.
- [2] Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Note on balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. *Ann. Inst. Statist. Math.* 27, 377-386.
- [3] Srivastava, J.N. and Chopra, D.V. (1971). Balanced optimal 2^m fractional factorial designs of resolution V, $m \leq 6$. *Technometrics* 13, 257-269.
- [4] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength 2ℓ and balanced fractional 2^m factorial designs. *Ann. Inst. Statist. Math.* 27, 143-157.
- [5] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1976). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher $(2\ell+1)$ resolution. "Essays in Probability and Statistics" (S. Ikeda et al., Eds.), birthday volume in honor of Professor J. Ogawa, Shinko Tsusho Co. Ltd., Tokyo, 73-94.