

Horseshoes, Symbolic dynamics.

北大 理学部 倉田雅弘

ここでは, Symbolic dynamics が 微分力学系 (の hyperbolic invariant set) にどのように関連するかを述べる。ひとつは, 無限個の periodic points をもつ微分同型の例として構成され Smale の horseshoe であり, もう一方は, Sinai や Bowen による Axiom A を満たす微分同型の non-wandering set の Markov partition から引き起こされる subshift との semi-conjugacy である。

§1. Shift.

はじめに Shift の定義を述べる。 S を有限集合とする。 X_S を $\mathbb{Z}$ から S への函数全体とする。ただし, $S, \mathbb{Z}$ には 離散トポロジ-が入っているものとし, X_S には Compact-open トポロジ-を入れる。map

$$p: X_S \longrightarrow X_S$$

を $p((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (a'_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X_S$ とし、 $a'_i = a_{i+1}$ とする。 X_S を symbol S 上の shift, p を shift transformation という。

X_S は距離づけ可能で、たとえば次のように距離が定義される。 $(a_n)_n, (b_n)_n \in X_S$ に対して、

$$d((a_n), (b_n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} \delta_{a_n b_n}$$

$$\text{ただし、} \delta_{a_n b_n} = \begin{cases} 0 & \text{if } a_n = b_n \\ 1 & \text{if } a_n \neq b_n. \end{cases}$$

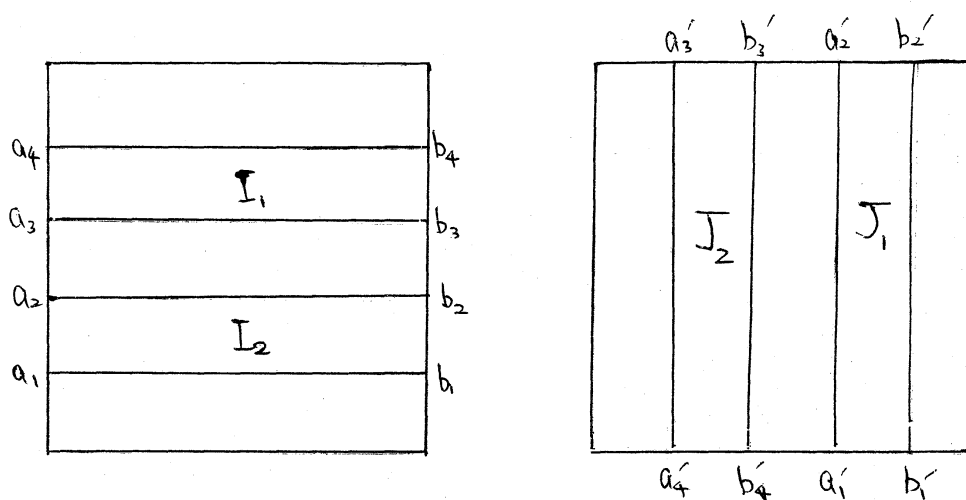
shift については 次が成り立つ。

- (1) p は位相同型
- (2) X_S は完全不連結 (i.e. 各点を含む連結成分は一点のみ)
- (3) p の周期点は X_S で稠密。従って $\Omega(p) = X_S$ 。周期点の個数を C_R とすると $C_R = N^R = 2^R$ $N = \#S$ 。

§2. Horseshoe ([6]).

$\mathbb{R}^2 \supset B_1 = [0, 1] \times [-1, 2], \quad B = [0, 1] \times [0, 1]$ とし、

$a_i, a'_i, b_i, b'_i, I_i, J_i$ を下図のとおりとする。



$f: B \longrightarrow B_1$ を次のようにする。

$$f(a_i) = a'_i, \quad f(b_i) = b'_i \quad (i=1, \dots, 4).$$

f は I_i を J_i に linear に写す。 ($i=1, 2$)

$K_1 = [0, 1] \times [-1, 0]$, $K_2 = [0, 1] \times [1, 2]$ とすると, f を B_1 から B_1 の中への map に 次のように拡張する。

$$f(K_i) \subset K_i \quad (i=1, 2)$$

$f|_{K_1}$ は $\mathbb{R}^2$ の fixed point p_1 をもち

他に non-wandering point をもたない。

これを改めて f とおく。

$S^2 \supset B_1$ とし、 f を次のように S^2 上の微分同型に拡張する。(これをあらためて f とする。)

$$f|_{S^2 - B_1} \text{ は } E \text{ 上}$$

1 つの fixed point p_0 をもち、他に non-wandering point をもたない。

すると、

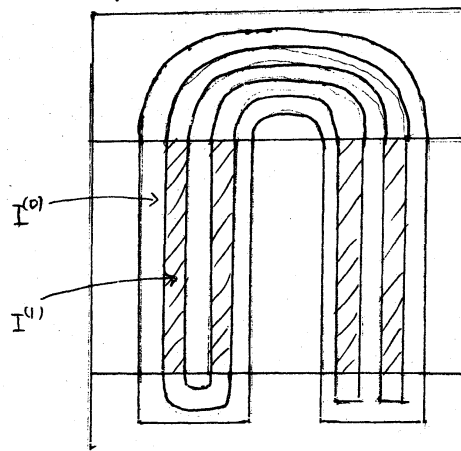
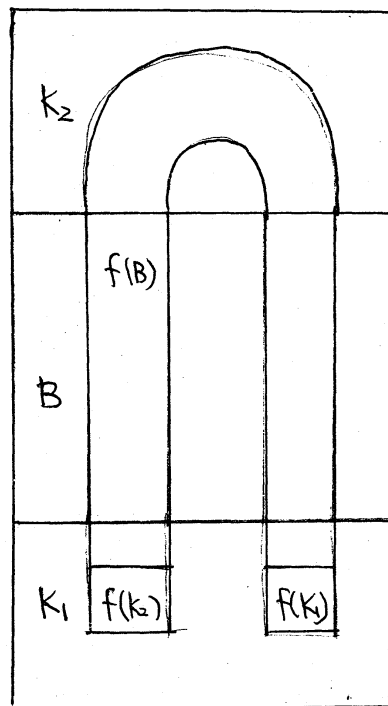
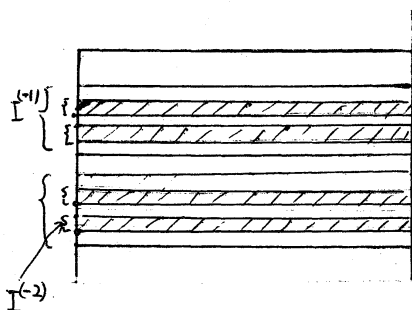
$$\Omega(f) = p_0 \cup p_1 \cup \Omega(f|_B).$$

$\Omega(f|_B)$ を考える。

$$I^{(-1)} = I_1 \cup I_2$$

$$I^{(i)} = \begin{cases} f(I^{(i-1)}) \cap B & \text{for } i \geq 0 \\ f^{-1}(I^{(i+1)}) \cap B & \text{for } i < -1 \end{cases}$$

とする。



$\bigcap_{i \geq 0} I^{(i)}$ (resp. $\bigcap_{i < 0} I^{(i)}$) は Cantor set $\times [0, 1]$ (resp. $[0, 1] \times$ Cantor set) と ぼっている。

$\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} I^{(i)}$ とする。 $S = \{1, 2\}$, X_S を S 上の shift とすると、

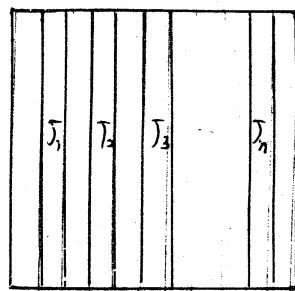
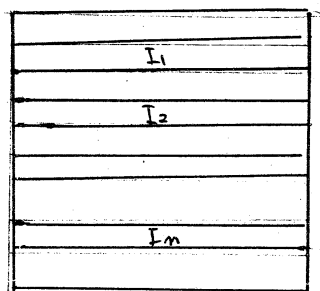
Prop 1 $f|_{\Lambda}$ は X_S と topologically conjugate である。つまり、homeomorphism $\pi: \Lambda \rightarrow X_S$ があって、 $p\pi = \pi f$ となる。

$\pi: \Lambda \rightarrow X_S$ は次のように与えられる。 $\pi(x) = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ $\in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, $x_i = \alpha$ if $f^{-i}(a) \in I_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$)。

$$\text{Prop } \Omega(f|_B) = \Lambda, \quad \overline{\text{Per}(f|_B)} = \Omega(f).$$

何故なら、 $x \in B$ かつ $f^n(x) \notin I_1 \cup I_2$ ならば、 $f^m(a) \rightarrow p_1$ ($m \rightarrow +\infty$), $f^n(x) \rightarrow p_0$ ($m \rightarrow -\infty$)。

以上のことは、次のように一般化できる。 $B \supset I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_m$ とし、 I_i は J_j のどちらかに linear に写す。



このとき non-wandering set は $S = \{f^n \cdot \dots \cdot n\}$ 上の shift と top. conjugate とする。

§3. homoclinic point

$x \in M$ が 微分同型 $f: M \rightarrow M$ の homoclinic point とは $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$, $p \neq x$, p は hyperbolic periodic point とすることである。更に $T_x W^s(p) + T_x W^u(p) = T_x M$ のとき x を transversal homoclinic point という。例えば上の horseshoe の Λ には transversal homoclinic point は稠密にある。

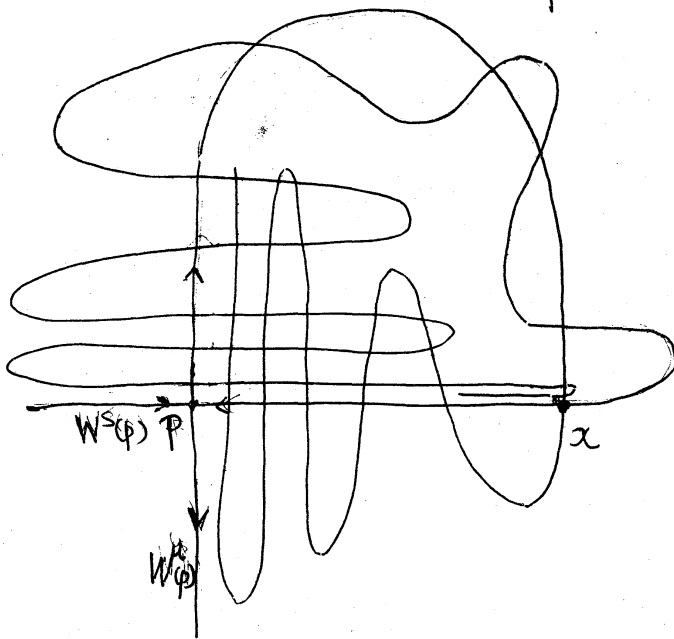
Prop ([6])

$x \in M$ が f の transversal homoclinic point ならば Cantor set $\Lambda \subset M$ がある。

(1) $x \in \Lambda$

(2) $f^m \Lambda = \Lambda$ for some m .

(3) Λ は shift と top. conjugate.



例 2. transversal homoclinic point は periodic points の closure に含まれる。

§4. Axiom A を満たす微分同型の non-wandering set
微分同型 $f: M \rightarrow M$ が

- 1) non-wandering set $\Omega(f)$ は hyperbolic
- 2) $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$

のとき Axiom A を満たすという。以下のように $\Omega(f)$ と subshift とが対応がある。

$\Omega(f)$ の basic set (i.e. indecomposable closed subset) の subset A は 次のとき rectangle という。

1. $\text{diam } A$ が充分小さい。
2. $A = \overline{\text{int } A}$
- 3) $x, y \in A$ ならば $W_{\text{loc}}^s(x) \cap W_{\text{loc}}^u(y) \in A$ 。

更に、

$$\partial^s A = \{x \in A \mid x \notin \text{int } W^u(x, A) \text{ in } W_{\text{loc}}^u(x)\}$$

$\partial^u A$ も同様、 $\partial A = \partial^s A \cup \partial^u A$ とする。

$\Omega(f)$ の basic set Ω_s の有限被覆 $\mathcal{A} = \{A_i\}$ が 次のとき Markov partition という。各 A_i は rectangle で $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j \subset \partial A_i \cap \partial A_j$, 更に $x \in \text{int } A_i \cap f^{-1} \text{int } A_j$

のとき $fW^n(x, A_i) \supset W^n(fx, A_j)$ から $fW^s(x, A_i) \subset W^s(fx, A_j)$ となる。

定理 $f: M \longrightarrow M$ が Axiom A をみたすなら, Ω_s の Markov partition がある。 ([1])

Markov partition の存在から, 以下のように finite type の subshift への semi-conjugacy が成立する。 ([1])

X_s を symbol $S = \{A_1, \dots, A_n\}$ 上の shift とし, $n \times n$ 0-1 行列 $T = (t_{ij})$ に対して

$$\Sigma = \{(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X_s \mid a_i = A_{n_i} \text{ かつ } t_{n_i, n_{i+1}} = 1\}$$

を T によって決まる finite type の subshift とする。

Markov partition $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ に対して 行列 $T = (t_{ij})$ を

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } f(\text{int } B_i) \cap \text{int } B_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし, Σ を $\mathcal{A}$ を symbol とし T によって決まる finite type の subshift とする。

$$\pi: \Sigma \longrightarrow \Omega_s$$

を $\pi((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(a_i)$ とすると π は Ω_s の上への map であり $f\pi = \pi f$ となる (semi-conjugate であるという)。

このとき $N > 0$ があって $\#\pi^{-1}(x) < N$ for $\forall x \in \Omega_s$ となる ([2]) のことから,

1. $x \in \Sigma$ が periodic $\iff \pi(x)$ が periodic. ([2])

2. finite type の subshift の zeta 函数

$$S(z) = \exp \sum_m \frac{N_m}{m} z^m$$

(N_m は周期 m の periodic point の個数) は有理函数である
 ことより, Axiom A 微分同型の zeta 函数も有理函数. ([5])

3. Minimal set は 0 次元である. ([2])

§5. Hyperbolic invariant set の場合.

$\Lambda \subset M$ が f の closed hyperbolic invariant set Λ とき
 subshift Σ (finite type とは限らない) からの surjection

$\pi: \Sigma \longrightarrow \Lambda$ があって $f \circ \pi = \pi \circ P$ とする (もっと一般的

に, expansive map に対して 適当な subshift からの
 semi-conjugacy がある). ([3]) しかる, periodic point をか
 けえる場合は finite type の subshift が重要である。

Λ の近傍 U が与えられたとき $\Lambda \subset \Lambda' \subset U$ なる hyper-
 bolic inv set があって, 適当な finite type の subshift Σ

からの semi-conjugacy $\pi: \Sigma \longrightarrow \Lambda'$ がある。 ([4]) 従って

Anosov 微分同型 ($\Omega = M$ を仮定しない) に対して

finite type の subshift からの semi-conjugacy がある。

ただし, この場合, $K > 0$ があって $\#\pi^{-1}(x) < K$ for $\forall x \in \Lambda'$

と出来るかどうかは、わからぬ。

References.

- [1] R. Bowen; Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms. Amer. J. Math. 92 (1970) 725-745.
- [2] —————; Markov partitions and minimal sets for Axiom A diffeomorphism, Amer. J. Math. 92 (1970) 902-918
- [3] H.B. Keynes and J.B. Robertson; Generators for topological entropy and expansiveness. Math. Systems Theory 3 () 51-59
- [4] M. Kurata; Hartman's theorem for hyperbolic sets, to appear.
- [5] A. Manning; Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, Bull. London Math. Soc. 3 (1971) 215-220.
- [6] S. Smale; Differentiable dynamical systems. B.A.M.S. 73 (1967) 747-817.