

一般射影極限による平面へ埋め込み不可能な 一次元連続体の簡単な構成法について

早稲田大学 基幹理工学研究科 今村隼人

Hayato IMAMURA

Faculty of Science and Engineering, Waseda University

閉区間上の連続写像で構成された射影系の極限は, 退化でないならば平面へ埋め込み可能な一次元連続体となることが知られている. 一方で, 任意の $n = 1, 2, \dots, \infty$ について, 閉区間上の上半連続関数の列で構成された一般射影系の極限による, 次元 n を持つ連続体の構成が知られている. 本稿では, 閉区間上の上半連続関数からなる一般射影極限が平面に埋め込み不可能な一次元連続体となる十分条件について, 得られた結果 ([2]) を紹介する.

1 一般射影極限

コンパクト距離空間上の連続写像からなる射影系の極限は, 連続体の位相的性質を解析する基本的な道具である. 2004 年に Mahavier ([6]) によって, 簡単な因子空間の射影極限の形式でより多くの複雑な連続体を表現する試みがなされ, 単位閉区間 $[0, 1]$ を因子空間とした一般射影極限の概念が導入された. また, 2006 年に Ingram, Mahavier ([4]) によって, 一般のコンパクト距離空間を因子空間とした一般射影極限が, 次のように定義された.

定義 1.1. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, X_n をコンパクト距離空間, 2^{X_n} を X_n 上の空でない閉集合とし, $f_n : X_{n+1} \rightarrow 2^{X_n}$ を集合値関数とする. このとき, 列 $\{X_n, f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を一般射影系 (*generalized inverse sequence*) と呼び, その一般射影極限 (*generalized inverse limit*) $\varprojlim \{X_n, f_n\}$ を次で定義する.

$$\varprojlim \{X_n, f_n\} := \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid x_n \in f_n(x_{n+1}) \text{ for any } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\varprojlim \{X_n, f_n\}$ は, 積位相を導入した $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ の部分空間とする.

特に, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $X_n = X$ かつ $f_n = f$ であるとき, 一般射影極限を $\varprojlim \{X, f\}$ と表記することにする.

2 平面に埋め込み不可能な一次元連続体

本稿では因子空間を閉区間 $\mathbb{I}$ とした一般射影極限について扱う. 閉区間上の連続写像による射影極限は, 平面に埋め込み可能かつ, 次元が高々1であることが知られている. 一方で, 任意の $n = 1, 2, \dots, \infty$ に対して, 次元 n を持つ連続体となるような, 閉区間の一般射影極限の構成が知られている. よって, 一次元連続体となるような極限を生成する一般射影系は, 連続写像による射影系とよく似たものであると言ってよいであろう. 一般射影極限が一次元連続体となるような射影系を構成する上半連続関数の例として次のような例がある.

例 2.1. $([1, 3])$ 上半連続関数 $f: [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ を, 次で定義する.

$$f(x) := \begin{cases} [0, 1] & \text{if } x = 0 \\ \{1 - x\} & \text{if } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

例 2.1 における写像 f は, テント写像のグラフへ微小に変化させたものと考えることができる ([1]). 具体的には, $c \in (0, 1)$ をとる. $[0, 1]$ から自身への連続写像について, 写像のグラフが $[0, 1]^2$ において $(0, 0)$, $(c, 1)$ を結ぶ直線と, $(c, 1)$, $(1, 0)$ を結ぶ直線の和と一致するとき, これをテント写像と呼び T_c と書く. ここで, 例 2.1 における f は $c = 0$ としたテント写像 T_0 と考えることができる. テント写像 T_c について, c が开区間 $(0, 1)$ のどの点であったとしても $\varprojlim \{[0, 1], T_c\}$ は BJK horseshoe と呼ばれる, 平面に埋め込み可能な一次元連続体と同相であることが知られている. その一方で, $\varprojlim \{[0, 1], f\}$ は一次元連続体であるものの, 平面に埋め込み不可能であることが知られている ([3]).

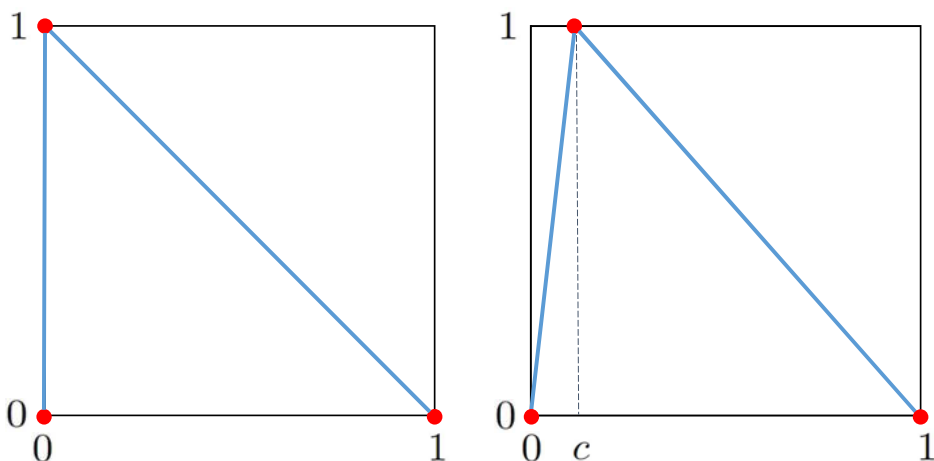


図 1: 例 2.1 の $f = T_0$ グラフ (左) とテント写像 T_c のグラフ (右)

以上を背景として, 上半連続関数が平面へ埋め込み不可能な一般射影極限を生成するための十分条件に関する次の結果を得た.

定理 2.2. ([2]) $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ をとる. $g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ を全射かつ区分的に狭義単調であるような連続写像とし, g が素周期 n の周期点 p を持つとする. L を $p, g(p) \in L$ を満たす閉区間とする. このとき, 集合値関数 $f: \mathbb{I} \rightarrow 2^{\mathbb{I}}$ について $G(g) \cup (\{p\} \times L) = G(f)$ ならば $\varprojlim \{\mathbb{I}, f\}$ は平面へ埋め込み不可能な一次元連続体である. ただし, $G(g) = \{(x, y) \mid y = g(x)\}, G(f) = \{(x, y) \mid y \in f(x)\}$ とする.

特に定理 2.2 における $\varprojlim \{\mathbb{I}, f\}$ の平面への埋め込み不可能性について, p が 2 以上の素周期を持った g の周期点であることに注意しながら, f による p の軌道を考えることで, $\varprojlim \{\mathbb{I}, f\}$ が互いに交わらない非可算の triodic な連続体を含むことが示される. また, Moore [5] によって示された, 平面は互いに交わらない非可算の triodic な連続体を包含できないという事実から結果を得る.

例 2.1 について, $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を $g(x) = 1 - x$, $p = 0$, $L = [0, 1]$ とおけば, f は定理 2.2 の仮定を満たすことがわかる.

参考文献

- [1] I. Banič, M. Črepnjak, M. Merhar, U. Milutinović, Towards the complete classification of generalized tent maps inverse limits, *Topology Appl.* **160** (2013), 63-73.
- [2] H. Imamura, A simple construction of non-planar one-dimensional continua as generalized inverse limits, submitted.
- [3] W. T. Ingram, An Introduction to Inverse Limits with Set-valued Functions, SpringerBriefs in Mathematics (2012).
- [4] W. T. Ingram and W. S. Mahavier, Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions, *Houston J. Math.* **32** (2006) 119 - 130.
- [5] R. L. Moore, Concerning triodic continua in the plane, *Fundamenta Math.* **13** (1929), 261-263.
- [6] W. S. Mahavier, Inverse limits with subsets of $[0, 1] \times [0, 1]$, *Topology Appl.* **141** (2004), 225-231.