

α -行列式で生成される $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の表現*

松本 詔 (九州大学大学院数理学府)

Sho Matsumoto
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 序章

1.1

α を複素数とする. $n \times n$ 行列 $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ の α 行列式とは,

$$\det_{\alpha}(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$$

で定義される量のことである. ここで $\nu(\sigma)$ は, 置換 σ のサイクル分解におけるサイクルの個数である. $\det_{\alpha}(X)$ は $\alpha = 1$ のときにパーマネントを与え, $\alpha = -1$ のときに通常の行列式を与え, さらに $\alpha = 0$ で X の対角成分の積を与える.

$$\det_1(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}, \quad \det_{-1}(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}, \quad \det_0(X) = x_{11}x_{22} \cdots x_{nn}.$$

この行列式の拡張である α 行列式に対して, 今回はその表現論的な意味について考える. なお, 本文章の内容は九州大学の若山正人氏との共同研究である.

1.2

行列式はリー群 $SL_n(\mathbb{C})$ の不変式である. リー環 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の言葉でそれを記述しよう. $\mathcal{P}(\text{Mat}_{n \times n})$ を $\{x_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ を変数とする多項式環とする. $U(\mathfrak{g})$ をリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の普遍包絡環とする. $U(\mathfrak{g})$ の $\mathcal{P}(\text{Mat}_{n \times n})$ 上の表現 ρ を次で定める.

$$(1.1) \quad \rho(E_{ij})f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \frac{\partial}{\partial x_{jk}} f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}) \quad (f \in \mathcal{P}(\text{Mat}_{n \times n})).$$

*研究集会「群の表現論と調和解析の広がり」, 京都大学数理解析研究所, 2005 年 7 月 25 日 ~ 28 日

ここで, $\{E_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ は $\mathfrak{g}$ の標準基底である. この表現において, 行列式 $\det(X)$ は明らかに次を満たす.

$$(1.2) \quad \rho(E_{ii}) \det(X) = \det(X), \quad \rho(E_{ij}) \det(X) = 0 \quad (i \neq j).$$

特に, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の任意の元 U に対し, $\rho(U) \det(X) = 0$ を満たす.

α 行列式で同様のことを考えてみよう. (1.2) の第一式は $\det(X)$ を $\det_\alpha(X)$ に置き換えても成り立つが, 第二式の方はそうはいかない. つまり, $\rho(E_{ij}) \det_\alpha(X)$ ($i \neq j$) は一般には零ではない. では表現を変えて, すなわち α に依存した表現 $\rho^{(\alpha)}$ があって $\rho^{(\alpha)}(E_{ij}) \det_\alpha(X) = 0$ という風にできるかというところ, そのような表現の構成は難しそうである.

一方, (1.2) から次がいえる.

$$(1.3) \quad U(\mathfrak{gl}_n) \det(X) = \mathbb{C} \cdot \det(X).$$

すなわち, 行列式から生成される $U(\mathfrak{gl}_n)$ 巡回加群は, 一次元である. そこで,

$$V_n^{(\alpha)} = U(\mathfrak{gl}_n) \det_\alpha(X)$$

を考える. $\alpha = -1$ のときは (1.3) となるのだが, 一般の α では一次元表現とはならない. ここではこの $V_n^{(\alpha)}$ の既約分解を各複素数 α に対して具体的に与えることを目標とする.

1.3

以降の内容とは直接関係は無いが, α 行列式についてここで少し補足を入れておこう. α 行列式は, α パーマネントと呼ばれることもある ([V]). 3 次の α 行列式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \det_\alpha((x_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}) &= x_{11}x_{22}x_{33} + \alpha(x_{12}x_{21}x_{33} + x_{13}x_{22}x_{31} + x_{11}x_{23}x_{32}) \\ &\quad + \alpha^2(x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32}). \end{aligned}$$

α 行列式に関して, 次が基本的な定理である.

定理 1.1 ([V, ST]). $\|\alpha z X\| < 1$ を満たす複素数 α, z と $n \times n$ 複素行列 X に対して次が成り立つ.

$$(1.4) \quad \det(I - \alpha z X)^{-1/\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \det_\alpha(X_{i_1 \dots i_k}).$$

ここで, $X_{i_1 \dots i_k}$ は $k \times k$ 行列 $(x_{i_p i_q})_{1 \leq p, q \leq k}$. □

式 (1.4) において, $-1/\alpha$ が自然数のときは左辺は z に関して多項式なので, 右辺は有限和となり条件 $\|\alpha z X\| < 1$ は不要である. 特に $\alpha = -1$ のときは, (1.4) は特性行列式の展開式

$$\det(I + zX) = \sum_{k=0}^n z^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det(X_{i_1 \dots i_k})$$

に他ならない. $\alpha = 1$ のときは特性多項式の逆数の展開式であるが, この場合の (1.4) は MacMahon's Master Theorem と呼ばれ, 定理 1.1 はその α 類似と位置づけることができる. また行列のサイズが 1 次の場合は定理 1.1 は一般二項定理に他ならない. [M] では α パフィアンが定義され, 定理 1.1 のパフィアンへの拡張がなされている.

2 巡回加群 $V_n^{(\alpha)}$

2.1

式 (1.1) で定まる表現 ρ を考え, $V_n^{(\alpha)} = \rho(U(\mathfrak{gl}_n)) \det_\alpha(X)$ とおく. 以下 ρ を省略して記述する. $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ とおく. 列 $(i_1, \dots, i_n) \in [n]$ に対して,

$$D^{(\alpha)}(i_1, i_2, \dots, i_n) = \det_\alpha \begin{pmatrix} x_{i_1 1} & x_{i_1 2} & \dots & x_{i_1 n} \\ x_{i_2 1} & x_{i_2 2} & \dots & x_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_n 1} & x_{i_n 2} & \dots & x_{i_n n} \end{pmatrix}$$

とおく. 特に, $\det_\alpha(X) = D^{(\alpha)}(1, 2, \dots, n)$ である. 次の補題が示すように, $\det_\alpha(X)$ への $U(\mathfrak{gl}_n)$ の作用はまた α 行列式の線型結合で書ける.

補題 2.1.

$$E_{pq} \cdot D^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_n) = \sum_{k=1}^n \delta_{i_k, q} D^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_{k-1}, p, i_{k+1}, \dots, i_n).$$

証明. 直接計算で示せる.

$$\begin{aligned} E_{pq} \cdot D^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_n) &= \sum_{j=1}^n x_{pj} \frac{\partial}{\partial x_{qj}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} x_{i_1 \sigma(1)} \cdots x_{i_n \sigma(n)} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \sum_{k=1}^n x_{pj} \delta_{i_k, q} \delta_{\sigma(k), j} x_{i_1 \sigma(1)} \cdots \widehat{x_{i_k \sigma(k)}} \cdots x_{i_n \sigma(n)} \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{i_k, q} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} x_{p \sigma(k)} x_{i_1 \sigma(1)} \cdots \widehat{x_{i_k \sigma(k)}} \cdots x_{i_n \sigma(n)} \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{i_k, q} D^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_{k-1}, p, i_{k+1}, \dots, i_n). \end{aligned}$$

ここで $\widehat{x_{kl}}$ は x_{kl} を除くことを意味する. □

このように E_{pq} の $D^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_n)$ への作用は, $i_1, \dots, i_n$ の中に q に等しいものがあれば, それを (一つずつ) p に置き換えろ, という形になっている.

例 2.1.

$$\begin{aligned} E_{21} \cdot D^{(\alpha)}(4, 1, 2, 1) &= D^{(\alpha)}(4, 2, 2, 1) + D^{(\alpha)}(4, 1, 2, 2), \\ E_{11} \cdot D^{(\alpha)}(4, 1, 2, 1) &= 2D^{(\alpha)}(4, 1, 2, 1), \\ E_{43} \cdot D^{(\alpha)}(4, 1, 2, 1) &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

次の補題は、すべての $D^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_n)$ が $V_n^{(\alpha)}$ に含まれることを意味する.

補題 2.2. $V_n^{(\alpha)}$ は, $\{D^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_n) \mid i_1, \dots, i_n \in [n]\}$ から生成されるベクトル空間に一致する. $\square$

2.2

普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の n 階テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} = \mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^n$ への作用は

$$E_{pq} \cdot (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) = \sum_{k=1}^n e_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{pq} e_{i_k} \otimes \dots \otimes e_{i_n} = \sum_{k=1}^n \delta_{i_k, q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_p \otimes \dots \otimes e_{i_n}$$

で定まる. ここで, $\{e_k\}_{k=1}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底. 補題 2.1 と補題 2.2 から次が言える.

命題 2.3. $\Phi_n^{(\alpha)}$ を以下で定まる $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ から $V_n^{(\alpha)}$ への線型写像とする.

$$\Phi_n^{(\alpha)}(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) = D^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_n), \quad i_1, \dots, i_n \in [n].$$

このとき $\Phi_n^{(\alpha)}$ は $U(\mathfrak{g})$ 加群準同型である. 特に $V_n^{(\alpha)}$ は, 商空間 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} / \text{Ker } \Phi_n^{(\alpha)}$ と同型. $\square$

$\alpha = 0$ の場合, $\Phi_n^{(0)}(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) = D^{(0)}(i_1, \dots, i_n) = x_{i_1 1} \dots x_{i_n n}$ は明らかに全単射. したがって, $V_n^{(0)} \cong (\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$. よって $\alpha = 0$ の場合の既約分解を得る.

$$(2.1) \quad V_n^{(0)} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}.$$

ただしここで, E^λ はウエイト $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対応する $U(\mathfrak{gl}_n)$ のシェーア加群であり, f^λ は型が λ の標準ヤング盤の個数である.

2.3

ここでは, $V_n^{(\alpha)}$ の既約分解を与えるため, 関数 $\mathfrak{S}_n \in \sigma \mapsto \alpha^{n-\nu(\sigma)}$ に関連したある公式を求める. n の分割 $\lambda \vdash n$ が与えられたとき, λ のヤング図形の箱全体から集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ への全単射を型 λ のナンバリングと呼ぶ. 幾何的に, 例えば, $\lambda = (3, 3, 1)$ のナンバリングの一つとして

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 7 \\ \hline 1 & 6 & 4 \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

のように表示する. ナンバリング T に対して, $R(T)$ でその行固定群とする. 例えば, 先の例で挙げた T に対しては, $R(T)$ は, $\{2, 3, 7\}$ に作用する対称群 $\mathfrak{S}_3$ と $\{1, 4, 6\}$ に作用する $\mathfrak{S}_3$ と $\{5\}$ に作用する (自明な) $\mathfrak{S}_1$ の直積群である. 同様に, 列に対して $C(T)$ も定義する.

分割 λ のフロベニウス座標 $(a_1, \dots, a_d | b_1, \dots, b_d)$ を思い出そう. ここで, $a_i = \lambda_i - i \geq 0, b_i = \lambda'_i - i \geq 0$ ($1 \leq i \leq d$) である. ただし, $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$ は λ の共役な分割, すなわち, λ' のヤング図形は λ の転置である. λ のコンテンツ多項式 $f_\lambda(\alpha)$ を次で定める ([Mac]).

$$(2.2) \quad f_\lambda(\alpha) = \prod_{i=1}^d \left\{ \prod_{j=1}^{a_i} (1+j\alpha) \cdot \prod_{j=1}^{b_i} (1-j\alpha) \right\} = \prod_{i \geq 1} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (1+(j-i)\alpha).$$

等式 $f_\lambda(\alpha) = f_{\lambda'}(-\alpha)$ が成り立つ.

命題 2.4. T を型が $\lambda \vdash n$ のナンバリングとする. このとき,

$$(2.3) \quad \sum_{q \in C(T)} \text{sgn}(q) \sum_{p \in R(T)} \alpha^{n-\nu(pq\sigma)} \\ = \begin{cases} \text{sgn}(q_0) f_\lambda(\alpha) & \text{ある } q_0 \in C(T) \text{ と } p_0 \in R(T) \text{ に対し } \sigma = q_0 p_0 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

証明. フロベニウスの指標公式を思い出そう.

$$p_\sigma = \sum_{\mu \vdash n} \chi^\mu(\sigma) s_\mu.$$

ここで, p_σ は $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ のサイクルタイプが $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots)$ のときに $p_\sigma = p_{\rho_1} p_{\rho_2} \cdots$, $p_k = x_1^k + x_2^k + \cdots$ で, s_μ はシューア関数, χ^μ は μ に対応した $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の指標である. 対称関数の特殊化 $p_k \mapsto \alpha$ ($k \geq 1$) を行くと,

$$\alpha^{\nu(\sigma)} = \sum_{\mu \vdash n} \chi^\mu(\sigma) \frac{f^\mu}{n!} \prod_{i \geq 1} \prod_{j=1}^{\mu_i} (\alpha + (j-i))$$

を得る ([Mac, I-7, Example 17]). よって

$$(2.4) \quad \alpha^{n-\nu(\sigma)} = \sum_{\mu \vdash n} \frac{f^\mu}{n!} f_\mu(\alpha) \chi^\mu(\sigma).$$

ナンバリング T に対して, c_T をヤング対称子とする.

$$c_T = \sum_{q \in C(T)} \text{sgn}(q) \sum_{p \in R(T)} qp.$$

次はよく知られた公式である (例えば [FH]).

$$(2.5) \quad \chi^\mu \cdot c_T = \delta_{\lambda, \mu} \frac{n!}{f^\mu} c_T, \quad \mu \vdash n$$

ϕ_α を $\phi_\alpha = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ と定める. (2.4) より

$$\phi_\alpha = \sum_{\mu \vdash n} \frac{f^\mu}{n!} f_\mu(\alpha) \chi^\mu$$

だから, (2.5) より

$$\phi_\alpha \cdot c_T = \sum_{\mu \vdash n} \frac{f^\mu}{n!} f_\mu(\alpha) \delta_{\lambda, \mu} \frac{n!}{f_\mu} c_T = f_\lambda(\alpha) c_T.$$

言い換えると,

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) \sum_{p \in R(T)} \alpha^{n-\nu(pq\sigma)} \sigma = f_\lambda(\alpha) \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) \sum_{p \in R(T)} qp.$$

これは命題の主張を表している. $\square$

注意 2.1. 命題 2.4 の証明は, 対称群の表現論に頼らなくとも, 初等的な手法で証明できる ([MW] の version 1 参照). $\square$

例 2.2. $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ に対して

$$\sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) \sum_{p \in R(T)} \alpha^{3-\nu(pq\sigma)} = \begin{cases} (1+\alpha)(1-\alpha) & \sigma = (1) \text{ または } (12) \text{ のとき,} \\ -(1+\alpha)(1-\alpha) & \sigma = (13) \text{ または } (123) \text{ のとき,} \\ 0 & \sigma = (23) \text{ または } (132) \text{ のとき.} \end{cases} \quad \square$$

例 2.3. 1 行だけからなる標準ヤング盤 $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$ に対しては命題 2.4 は

$$(2.6) \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} = \prod_{j=1}^{n-1} (1 + j\alpha)$$

となる. $\square$

2.4

$V_n^{(\alpha)}$ の基底 (の候補) を構成しよう. 列 $(i_1, \dots, i_n) \in [n]^n$ とナンバリング T に対し, $V_n^{(\alpha)}$ の元 $v_T^{(\alpha)}$ を

$$(2.7) \quad v_T^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_n) = \sum_{q \in C(T)} \operatorname{sgn}(q) \sum_{p \in R(T)} D^{(\alpha)}(i_{qp(1)}, \dots, i_{qp(n)})$$

と定める. 次の命題は $v_T^{(\alpha)}$ が $v_T^{(0)}$ の定数倍であることを述べていて, 命題 2.4 から得られる.

命題 2.5. $\lambda \vdash n$ とする. 各 $(i_1, \dots, i_n) \in [n]^n$ と型 λ のナンバリング T に対し,

$$(2.8) \quad v_T^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_n) = f_\lambda(\alpha) v_T^{(0)}(i_1, \dots, i_n). \quad \square$$

例 2.4. 標準ヤング盤 $T = \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}$ に対しては

$$\begin{aligned} v_T^{(\alpha)}(1, 2, 1) &= 2D^{(\alpha)}(1, 2, 1) - D^{(\alpha)}(2, 1, 1) - D^{(\alpha)}(1, 1, 2) \\ &= (1 + \alpha)(1 - \alpha)(2x_{11}x_{22}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{13} - x_{11}x_{12}x_{23}). \quad \square \end{aligned}$$

例 2.5. 標準ヤング盤 $T = \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{smallmatrix}$ に対して,

$$\begin{aligned} v_T^{(\alpha)}(1, 2, 2, 4) &= D^{(\alpha)}(1, 2, 2, 4) + D^{(\alpha)}(1, 2, 4, 2) - 2D^{(\alpha)}(1, 4, 2, 2) + D^{(\alpha)}(2, 1, 2, 4) \\ &\quad + D^{(\alpha)}(2, 1, 4, 2) - 2D^{(\alpha)}(2, 2, 1, 4) - 2D^{(\alpha)}(2, 2, 4, 1) + D^{(\alpha)}(2, 4, 1, 2) \\ &\quad + D^{(\alpha)}(2, 4, 2, 1) - 2D^{(\alpha)}(4, 1, 2, 2) + D^{(\alpha)}(4, 2, 1, 2) + D^{(\alpha)}(4, 2, 2, 1) \\ &= (1 + \alpha)(1 - \alpha)(x_{11}x_{22}x_{23}x_{44} + x_{11}x_{22}x_{43}x_{24} - 2x_{11}x_{42}x_{23}x_{24} + x_{21}x_{12}x_{23}x_{44} \\ &\quad + x_{21}x_{12}x_{43}x_{24} - 2x_{21}x_{22}x_{13}x_{44} - 2x_{21}x_{22}x_{43}x_{14} + x_{21}x_{42}x_{13}x_{24} \\ &\quad + x_{21}x_{42}x_{23}x_{14} - 2x_{41}x_{12}x_{23}x_{24} + x_{41}x_{22}x_{13}x_{24} + x_{41}x_{22}x_{23}x_{14}). \quad \square \end{aligned}$$

同じ型の半標準ヤング盤 S と標準ヤング盤 T に対して, 列 $\mathbf{i}^{(S,T)} = (i_1^{(S,T)}, \dots, i_n^{(S,T)})$ を次のように定義する. 各 $k \in [n]$ に対し, $(i^{(k)}, j^{(k)})$ で, T の中で番号 k の入った箱とする. S の対応する箱 $(i^{(k)}, j^{(k)})$ に書かれている番号を $i_k^{(S,T)}$ と定める. 例えば,

$$S = \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{4} & \\ \boxed{4} & \boxed{6} & & \end{smallmatrix} \quad \text{と} \quad T = \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{9} & \\ \boxed{7} & \boxed{8} & & \end{smallmatrix}$$

に対しては $\mathbf{i}^{(S,T)} = (1, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 6, 4)$. そして

$$v_{S,T}^{(\alpha)} = v_T^{(\alpha)}(\mathbf{i}^{(S,T)}) = v_T^{(\alpha)}(i_1^{(S,T)}, \dots, i_n^{(S,T)})$$

とおく. この $v_{S,T}^{(\alpha)}$ たちが, $V_n^{(\alpha)}$ の “基底の候補” である.

例 2.6.

$$\begin{aligned} (S, T) = \left(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix} \right) : & \quad v_{S,T}^{(\alpha)} = 2D^{(\alpha)}(1, 2, 1) - D^{(\alpha)}(2, 1, 1) - D^{(\alpha)}(1, 1, 2), \\ (S, T) = \left(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix} \right) : & \quad v_{S,T}^{(\alpha)} = D^{(\alpha)}(1, 3, 2) - D^{(\alpha)}(3, 1, 2) + D^{(\alpha)}(2, 3, 1) - D^{(\alpha)}(2, 1, 3), \\ (S, T) = \left(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix} \right) : & \quad v_{S,T}^{(\alpha)} = D^{(\alpha)}(1, 2, 3) - D^{(\alpha)}(2, 1, 3) + D^{(\alpha)}(3, 2, 1) - D^{(\alpha)}(3, 1, 2). \quad \square \end{aligned}$$

例 2.7. 1 列のみからなるヤング盤

$$S = T = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$$

に対しては, $v_{S,T}^{(\alpha)}$ は行列式でかける. $v_{S,T}^{(\alpha)} = \sum_{q \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(q) D^{(\alpha)}(q(1), \dots, q(n)) = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - j\alpha) \det(X)$. $\square$

2.5

$V_n^{(\alpha)}$ の既約分解と基底を与えよう. ナンバリング T に対して, $W_T^{(\alpha)}$ を $v_T^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_n)$ の形の元全体で生成されるベクトル空間とする.

定理 2.6. $V_n^{(\alpha)}$ の既約分解は以下のように与えられる.

$$V_n^{(\alpha)} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \bigoplus_T W_T^{(\alpha)}.$$

ここで, T は型が λ の標準ヤング盤全体を走る. そして,

$$W_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \{0\}, & \alpha \in \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{\lambda_1-1}, -1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{\lambda_1-1}\}, \\ E^\lambda, & \text{その他の } \alpha. \end{cases}$$

$W_T^{(\alpha)} \neq \{0\}$ のとき,

$$\{v_{S,T}^{(\alpha)} = f_\lambda(\alpha) v_{S,T}^{(\alpha)} \mid S \text{ は } [n] \text{ の要素を成分にもつ, } T \text{ と同じ型の半標準ヤング盤}\}$$

はその基底をなす. さらに, S_H を第 r 行の成分がすべて r であるような半標準ヤング盤とし, S_L を第 r 列の成分が上から $n - \lambda'_r + 1, \dots, n - 1, n$ であるような半標準ヤング盤とする. このとき, $v_{S_H,T}, v_{S_L,T}$ はそれぞれ $W_T^{(\alpha)}$ の最高ウェイトベクトルと最低ウェイトベクトルである. $\square$

定理の主張は命題 2.5 と Weyl's construction からほぼ明らかである. $W_T^{(\alpha)} = \{0\}$ となる必要十分条件は, $f_\lambda(\alpha) = 0$ となるときである. また, 既約分解だけもう少し分かりやすく述べると次のように書ける.

系 2.7. $k = 1, 2, \dots, n - 1$ に対し,

$$V_n^{(\frac{1}{k})} \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n, \\ \lambda'_1 \leq k}} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda} \quad V_n^{(-\frac{1}{k})} \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n, \\ \lambda_1 \leq k}} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}.$$

その他の $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{n-1}\}$ に対して,

$$V_n^{(\alpha)} \cong (\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}. \quad \square$$

例 2.8. $n = 3$ のとき $V_n^{(\alpha)}$ の各 α における既約分解は,

$$V_3^{(\alpha)} \cong \begin{cases} E^{(3)} & \alpha = 1, \\ E^{(3)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(2,1)} & \alpha = \frac{1}{2}, \\ E^{(1,1,1)} & \alpha = -1, \\ E^{(2,1)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(1,1,1)} & \alpha = -\frac{1}{2}, \\ E^{(3)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(1,1,1)} & \text{その他の } \alpha. \end{cases}$$

また $V_3^{(\frac{1}{2})} = E^{(3)} \oplus E^{(2,1)} \oplus E^{(2,1)}$ の基底として, 次の組 (S, T) 対応した $v_{S,T}^{(\frac{1}{2})}$ 全体がとれる.

$$(S, T) = (\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}) \quad \text{または} \quad (S, T) \in \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} \times \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$$

特に, $\dim V_3^{(\frac{1}{2})} = 1 + 6 \times 2 = 13$. □

3 補足

最後に関連した幾つかの注意を与えておく.

3.1

行列式の 2 乗を, α 行列式から書くことができる. 一般論から $\dim(E^\lambda \otimes (E^\lambda)^*)^{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})} = 1$ だから ([W]), 定理 2.6 から次を得られる.

命題 3.1. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{k} \mid 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}\}$ と仮定する. このとき次を満たすような $\lambda \vdash n$ が存在する. $f_\lambda(\alpha) \neq 0$ であって, 型 λ の任意の標準ヤング盤 T に対して, ある $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ -包絡作用素 $A^{(\alpha)} : (W_T^{(\alpha)})^* \rightarrow W_T^{(\alpha)}$ が存在して, $A^{(\alpha)}((v_{T,T}^{(\alpha)})^*) = v_{T,T}^{(\alpha)}$ かつ, (V 上の多項式環での式として)

$$(3.1) \quad \det(X)^2 = f_\lambda(\alpha)^{-2} \sum_S v_{S,T}^{(\alpha)} \cdot A^{(\alpha)}((v_{S,T}^{(\alpha)})^*).$$

ここで和は型 λ の半標準ヤング盤 S 全体を走り, $(v_{S,T}^{(\alpha)})^*$ は $(v_{S,T}^{(\alpha)})^*(v_{S',T}^{(\alpha)}) = \delta_{S,S'}$ で定まる. 特に, n が偶数のときは $\lambda = (2^{\frac{n}{2}})$, 奇数のときは $\lambda = (1^2 2^{\frac{n-1}{2}})$ とすれば, それは条件を満たす. □

例 3.1. $T = \overline{1|2}$ とし, $\alpha \neq -1$ とする. 加群 $W_T^{(\alpha)}$ は定理 2.6 より次からなる基底をもつ:
 $v_+ = v_{\overline{1|1}, \overline{1|2}}^{(\alpha)} = 2D^{(\alpha)}(1, 1)$, $v = v_{\overline{1|2}, \overline{1|2}}^{(\alpha)} = D^{(\alpha)}(1, 2) + D^{(\alpha)}(2, 1)$, $v_- = v_{\overline{2|2}, \overline{1|2}}^{(\alpha)} = 2D^{(\alpha)}(2, 2)$.
 $(W_T^{(\alpha)})^*$ から $W_T^{(\alpha)}$ への線型写像 A :

$$A(v_+^*) = -\frac{1}{2}v_-, \quad A(v^*) = v, \quad A(v_-^*) = -\frac{1}{2}v_+$$

は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の包絡作用素である. よって

$$\begin{aligned} (1+\alpha)^2 \det(X)^2 &= v_+ \cdot A(v_+^*) + v \cdot A(v^*) + v_- \cdot A(v_-^*) = v^2 - v_+ \cdot v_- \\ &= (D^{(\alpha)}(1, 2) + D^{(\alpha)}(2, 1))^2 - 4D^{(\alpha)}(1, 1)D^{(\alpha)}(2, 2). \quad \square \end{aligned}$$

3.2

各 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $V_n^{(\alpha)}$ の既約分解を得たが, $\alpha = \infty$ のときを考えてみよう. もちろん単に $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \det_\alpha(X)$ としても意味を成さないので, “正規化” しよう. $\det_\alpha(X)$ は α の多項式としてみると $n-1$ 次式であるから,

$$\det_\infty(X) := \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \alpha^{1-n} \det_\alpha(X) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \nu_n(\sigma)=1}} x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

と定める. 例えば,

$$\det_\infty \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23}.$$

そして $V_n^{(\infty)}$ を巡回加群 $U(\mathfrak{gl}_n) \det_\infty(X)$ で定める. すると

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{1-n} f_\lambda(\alpha) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ はフック}$$

であるから定理 2.6 より次を得る.

命題 3.2.

$$V_n^{(\infty)} \cong \bigoplus_{\lambda: \text{フック}} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda} = \bigoplus_{k=1}^n \left(E^{(k, 1^{n-k})} \right)^{\oplus \binom{n-1}{k-1}},$$

ここで λ は n の分割でフックなもの全体を走る. □

例 3.2.

$$V_5^{(\infty)} \cong E^{(5)} \oplus (E^{(4,1)})^{\oplus 4} \oplus (E^{(3,1,1)})^{\oplus 6} \oplus (E^{(2,1,1,1)})^{\oplus 4} \oplus E^{(1,1,1,1,1)}. \quad \square$$

3.3

イマナントは, n の分割 λ に対して

$$\text{Imm}_\lambda(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$$

で定義される. このイマナントから生成される巡回加群についての既約分解は

$$U(\mathfrak{gl}_n)\text{Imm}_\lambda(X) \cong (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}$$

となる. 一般に類関数 $f: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられたとき, $d_f(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$ とおく. f を指標で分解したときに $f = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda(f) \chi^\lambda$ となるとすると,

$$U(\mathfrak{gl}_n)d_f(X) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n: c_\lambda(f) \neq 0} (E^\lambda)^{\oplus f^\lambda}$$

となる. 系 2.7 はこの $f(\sigma) = \alpha^{n-\nu(\sigma)}$ としたときの場合である.

3.4

任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $V_n^{(\alpha)} \subset V_n^{(0)}$ が成り立つ. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は $V_n^{(0)} \curvearrowright$

$$x_{i_1 1} x_{i_2 2} \cdots x_{i_n n} \cdot \sigma = x_{i_{\sigma(1)} 1} x_{i_{\sigma(2)} 2} \cdots x_{i_{\sigma(n)} n}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

で作用する. この作用は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の作用と可換である. $V_n^{(\alpha)}$ はこの作用で閉じているため $U(\mathfrak{gl}_n) \times \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の表現空間と思える. その既約分解は

$$V_n^{(\alpha)} = U(\mathfrak{gl}_n) \det_\alpha(X) \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n: f_\lambda(\alpha) \neq 0} E^\lambda \boxtimes S^\lambda$$

となる. ここで S^λ は λ に対応した $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 (Specht 加群) である.

$U(\mathfrak{gl}_n)$ の作用 (1.1) は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の左からの作用である. 同様に右からの作用を $\rho_R(E_{pq}) = \sum_{k=1}^n x_{ki} \frac{\partial}{\partial x_{kj}}$ で定める. これにより $U(\mathfrak{gl}_n)$ の両側からの作用における巡回加群 $U(\mathfrak{gl}_n) \det_\alpha(X) U(\mathfrak{gl}_n)$ を考えると, その既約分解は

$$U(\mathfrak{gl}_n) \det_\alpha(X) U(\mathfrak{gl}_n) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n: f_\lambda(\alpha) \neq 0} E^\lambda \boxtimes E^\lambda$$

となる.

参考文献

- [F] W. Fulton, “Young Tableaux, With Applications to Representation Theory and Geometry”, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press, 1997.
- [FH] W. Fulton and J. Harris, Representation theory, A first course, Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [KW] K. Kimoto and M. Wakayama, Quantum α -determinant cyclic modules of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$, in preparation.
- [Mac] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd Edition, Oxford, 1995.
- [M] S. Matsumoto, Alpha-pfaffian, pfaffian point process and shifted Schur measure, Linear Algebra Appl. **403** (2005), 369–398.
- [MW] S. Matsumoto and M. Wakayama, Alpha-determinant cyclic modules of $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, math.RT/0508523.
- [ST] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point processes, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.
- [V] D. Vere-Jones, A generalization of permanents and determinants, Linear Algebra Appl. **111** (1988), 119–124.
- [W] H. Weyl, The Classical Groups. Their invariants and representations, 2nd Edition, Princeton University Press, Princeton, 1946.