

マルコフ過程による三角形の内接円の動的作図について

明治大学・総合数理学部 阿原一志

Kazushi Ahara, School of Interdisciplinary Mathematical Sciences, Meiji University

1 前書きと主定理

1.1 マルコフ過程を用いた動的な作図問題

著者は PointLine という平面幾何作図ソフトウェアを作成した [1]。このソフトウェアでは、作図要素はすべてマルコフ過程により与えられ、マルコフ過程を繰り返し適用することで、作図したい図へ収束することを目指す。この収束の極限として図を得ることを、**動的に作図する**と呼ぶことにする。

PointLine の中で用いられる作図要素の種類としては「中点」「点が直線上にある」「円と直線が接する」「円と円が接する」などがあり、ソフトウェアのユーザインターフェースとしては、GeoGebra などの作図ソフトウェアと同等であるが、図を成立させるための原理がまったく異なる。作図要素に対応するマルコフ過程（およびそれを動かす仕組み）をモジュールと呼ぶことにする。

著者は前著 [2] において、中点のモジュールのみを用いて作図できる、三角形のみつどもえ作図を題材に取り、マルコフ過程が収束するための条件を検証した。本論文では、固定された三角形に対して、「直線と円が接する」というモジュールのみを用いて、自由に与えられた円を初期状態として内接円または傍接円に収束するかどうかを検証し、収束する場合の漸近挙動について決定できたのでそのことを報告する。

1.2 安島＝マルファッティ円の作図問題

この問題を考えるきっかけである「安島＝マルファッティ円」について説明する。三角形の内接円の作図は基本的な作図であり、動的な作図問題を考えるうえで、真っ先に扱うべきといえる。一方で、著者には別のモチベーションもあった。それが安島＝マルファッティ円の（通常の意味での）作図問題である。筆者は与えられた三角形に互いに外接しながら三角形に接するような 3 つの円を描く問題、通称安島＝マルファッティ円 (図 1) の作図を動的に作図できるかどうかを考察することが目標であった。実際に、PointLine では、たやすくこの図の動的作図をすることが可能である。しかし、一方で安島＝マルファッティ円を（通常の意味で作図する方法を発見するのは難しいという前提で）動的な作図が数理的に保障されているのかという疑問も持ち続けてきた。その第一段階として内接円を扱った次第である。

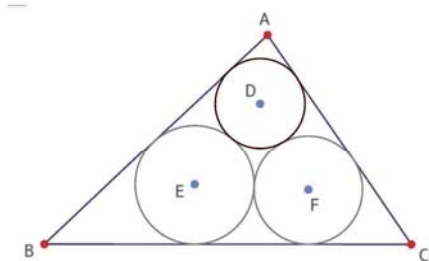


図 1: 安島＝マルファッティ円

1.3 PointLine の LC モジュールについて

ソフトウェア PointLine において、「円と直線が接する」モジュールのことを LC モジュールと呼ぶことにする。LC モジュールは図 2 のような「線分と円に関するマルコフ過程」である。

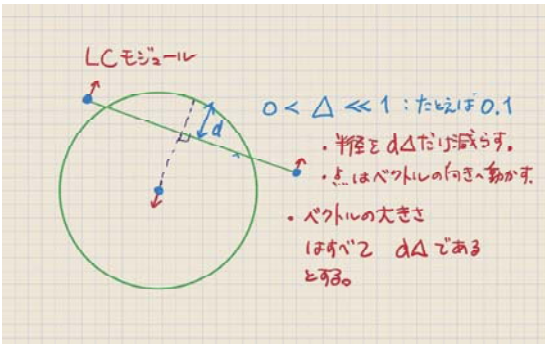


図 2: LC モジュール

直線は平面上の異なる 2 点により定まるものとし、円は中心と半径により定まるものとする。正で十分に小さいパラメータ $0 < \Delta \leq 1$ を固定する。直線と円の間の符号付き距離を d とする。図 2 のように、円と直線が交差しているときには d は正の値であるとし、円と直線との共有点がないときには d は負の値であるとする。

d が正の場合（円と直線が交差している場合）には、直線を定める 2 点は、直線の法線方向、円の中心から離れる方向に、 $d\Delta$ だけ移動する。そして、円の中心は直線の法線方向、直線から離れる方向に $d\Delta$ だけ移動する。そして、円の半径は $d\Delta$ 大きくなる。このような「図形に関する定常マルコフ過程」を考えたものを LC モジュールと呼ぶ。

注意を一つ述べておくと、LC モジュールにおいて直線を平行移動するときのパラメータ Δ と円の中心と半径を変化させるときのパラメータ Δ とは同じ値である必要はない。しかし、この論文においては Δ を共通の値として話を進める。

1.4 問題設定

まず、問題を単純化するために、三角形 ABC を平面上に固定する。三角形の形は任意でよいが、面積が正であることは仮定する。つぎに、同じ平面上に任意の円 C_0 を設定し、これをマルコフ過程の初期状態であるとする。以下で定義されるマルコフ過程 M を考える。

実際には、平面上に任意に与えられた円 C に対して、円 C と線分 AB に関する LC モジュール、円 C と線分 BC に関する LC モジュール、円 C と線分 CA に関する LC モジュールを同時に適用するような定常マルコフ過程を M をする。ただし、三角形 ABC は固定しているので、この LC モジュールでは円の中心座標と円の半径を LC モジュールのルールにしたがって変化させるものとする。

円 C_0 にマルコフ過程 M を n 回適用させた円を C_n とする。問題は、 C_n の中心を $\mathbf{p}_n$ 、半径を r_n としたとき、これらが収束するための Δ の条件を求めることである。

注意を述べる。前著のみつどもえの動的作図のときには、3つの中点モジュールを「順次適用」するような過程を考えていた。本論文では「同時適用」によりマルコフ過程を定義することにする。

1.5 主定理

主定理を述べるために、いくつかの準備を行う。三角形 ABC の三つの辺 AB, BC, CA をそれぞれ辺 $E_i (i = 1, 2, 3)$ と呼ぶことにして、 $\mathbf{n}_i$ は辺 E_i の内向き法線単位ベクトルであるとする。

3次正方行列 M を

$$M = \left(1 + (\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_i) \right)_{(i,j)}$$

によって定める。ただしここで、 $(\cdot, \cdot)$ はベクトルの通常の内積であるとする。行列 M は対称行列であることから、固有値はすべて実数であり、 a_1, a_2, a_3 を M の固有値であるとし、 $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ であるとする。

損失関数 L_n を次の式で定義する。辺 E_i と円の中心との距離を $r_n^{(i)} (i = 1, 2, 3)$ とする。 $r_n^{(i)}$ と円の半径との差分を $d_n^{(i)} = r_n - r_n^{(i)} (i = 1, 2, 3)$ とする。このとき、損失関数 L_n を $L_n = |d_n^{(1)}| + |d_n^{(2)}| + |d_n^{(3)}|$ によって定める。

定理 1. 任意に固定された三角形 ABC を考える。円の初期条件として、円の中心は三角形の内側にあるものと仮定する。一般の場合、円に関する上記のマルコフ過程 M は $0 < \Delta < \frac{2}{a_3}$ の条件下で収束し、三角形 ABC の内接円または傍接円に収束する。また、損失関数 L_n は漸近的に等比的に減衰し、その漸近公比は $1 - a_1\Delta, 1 - a_2\Delta, 1 - a_3\Delta$ のいずれかである。

2 定理1の証明

円 $\mathcal{C}_n$ の半径を r_n とする。パラメータ Δ を用いて、新しい円 $\mathcal{C}_{n+1}$ の半径 r_{n+1} は

$$r_{n+1} = r_n - \Delta(d_n^{(1)} + d_n^{(2)} + d_n^{(3)})$$

で得られる。円 $\mathcal{C}_n$ の中心の位置ベクトルを $\mathbf{p}_n$ としたとき、新しい円 $\mathcal{C}_{n+1}$ の中心の位置ベクトル $\mathbf{p}_{n+1}$ は

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n + \Delta(d_n^{(1)}\mathbf{n}_1 + d_n^{(2)}\mathbf{n}_2 + d_n^{(3)}\mathbf{n}_3)$$

で得られる。以上が問題設定で述べたマルコフ過程 $\mathcal{M}$ の具体的な表現である。このとき、新しい円の中心から辺 E_i までの距離を $r_n^{(i)}$ とすると

$$r_{n+1}^{(i)} = r_n^{(i)} + \Delta(d_n^{(1)}\mathbf{n}_1 + d_n^{(2)}\mathbf{n}_2 + d_n^{(3)}\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_i)$$

と計算される。ここで、 r_{n+1} と $r_{n+1}^{(i)}$ との差分を $d_{n+1}^{(i)} = r_{n+1} - r_{n+1}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) とおくと

$$d_{n+1}^{(i)} = d_n^{(i)} - \Delta \left\{ \sum_j (1 + (\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_i)) d_n^{(j)} \right\}$$

であることから、

$$\begin{pmatrix} d_{n+1}^{(1)} \\ d_{n+1}^{(2)} \\ d_{n+1}^{(3)} \end{pmatrix} = (I - \Delta M) \begin{pmatrix} d_n^{(1)} \\ d_n^{(2)} \\ d_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

が得られる。行列 M に関して次の補題が成立する。

Lemma 1. 行列 M は正定値である。

Proof. 行列 M は対称行列なので対角化可能である。 M の主座小行列式を計算することを目指す。 $m_{ij} = 1 + (\mathbf{n}_j, \mathbf{n}_i)$ とするとき、 $m_{11} = 2$ は正である。次に、 $\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = 4 - (1 + (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2))^2$ であるが、 $0 < 1 + (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) < 2$ なので、この行列式の値は正の数である。最後に、行列 M の行列式 $|M|$ の符号を調べたいが、 $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \cos \theta_{12}$ 、 $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3) = \cos \theta_{13}$ とおくと、 $(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \cos(\theta_{13} - \theta_{12})$ であることを利用して、 $(\theta_{12}, \theta_{13}) \mapsto |M|$ を

$$\{(\theta_{12}, \theta_{13}) \mid 0 < \theta_{12} < 2\pi, 0 < \theta_{13} < 2\pi, \theta_{12} < \theta_{13}\}$$

を定義域とする関数とみなすことにする。このとき、定義域の境界では $|M| = 0$ であって、極大値は $(\theta_{12}, \theta_{13}) = (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ の1か所であって他の臨界点はないことが計算によりわかる。このことから、行列式 $|M|$ は正であることが示された。(具体的な計算は省略するが、 $\frac{\partial |M|}{\partial \theta_{12}}$ を計算することにより、確かめることができる。)

以上より、行列 M の主座小行列式はすべて正であることが確認できた。対称行列のシルベスターの判定法を適用すると、 M が正定値であることが示される。□

M の固有値を $a_k (k = 1, 2, 3)$ とすると、行列 $I - \Delta M$ の固有値は $1 - a_k \Delta (k = 1, 2, 3)$ である。このことから、正の定数 Δ に対して、行列のべき $(I - \Delta M)^n$ が零行列に収束するための必要十分条件は、 $-1 < 1 - a_k \Delta < 1 (k = 1, 2, 3)$ が同時に成り立つことである。このことは $0 < \Delta < \frac{2}{a_3}$ (ただし、 a_3 は最大固有値) と同値である。

$\mathbf{d}_k = \begin{pmatrix} d_{k0}^{(1)} \\ d_{k0}^{(2)} \\ d_{k0}^{(3)} \end{pmatrix}$ が固有値 $a_k (k = 1, 2, 3)$ をもつ M の固有ベクトルであるとする。(M は

正定値なので $a_k > 0$ である。) $0 < \Delta < \frac{2}{a_k}$ をみたすとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - \Delta M)^n \begin{pmatrix} d_{k0}^{(1)} \\ d_{k0}^{(2)} \\ d_{k0}^{(3)} \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \Delta a_k)^n \begin{pmatrix} d_{k0}^{(1)} \\ d_{k0}^{(2)} \\ d_{k0}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

一般の初期値 $\begin{pmatrix} d_0^{(1)} \\ d_0^{(2)} \\ d_0^{(3)} \end{pmatrix}$ は、 M の固有ベクトルの線形和で表されることから、最大固有

値 a_3 にたいして、 $0 < \Delta < \frac{2}{a_3}$ をみたすときに、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} d_n^{(1)} \\ d_n^{(2)} \\ d_n^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。このことは、極限をとることにより損失関数 $L_n = \sum_i |d_n^{(i)}|$ は 0 へ収束することを意味している。

次に、漸近挙動について考える。一般の初期値を M の固有ベクトルの和で $\sum_k a_k \mathbf{d}_k$ とあらわされているとき、 $a_2 = a_3 = 0$ であれば、損失関数の漸近挙動は $\mathbf{d}_1$ に従うので、公比 $1 - a_1 \Delta$ の等比数列になる。同様に、 $a_3 = 0$ であれば、損失関数の漸近挙動は $\mathbf{d}_2$ に従い、公比 $1 - a_2 \Delta$ の等比数列になる。そのいずれでもなければ、損失関数の漸近挙動は公比 $1 - a_3 \Delta$ の等比数列になる。

3 初期位置による漸近挙動の違いについての図形的な評価

漸近挙動における損失関数の公比は 3 種類あり、初期値に依存し、そのための十分条件はすべに述べたとおりであるが、この十分条件には図形的な意味合いもあるので、そのことについて述べる。

3.1 正三角形ではない2等辺三角形の場合

3辺を E_i として、 E_1 と E_3 の長さが等しく、 E_2 はほかの辺と長さが異なると仮定する。このとき、 M の固有ベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ であって、残りの固有ベクトルは $d^{(2)} = d^{(3)}$ を満たすようなベクトル $\begin{pmatrix} d^{(1)} \\ d^{(2)} \\ d^{(3)} \end{pmatrix}$ である。

このことの図形的意味がある。三角形に対象軸がある場合に、その対象軸の上に初期円の中心があるとする、辺長が等しい2辺との「辺と中心との距離」は一致したまま推移する。損失関数の漸近挙動やパラメータ Δ の範囲は、固有ベクトルが $d^{(2)} = d^{(3)}$ を満たすような固有値のみに限定されて算出される。

3.2 正三角形の場合

M の固有値は $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ である。固有値3の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であって、これは初期円の中心が正三角形の重心に場合に限られ、この場合には中心は動かずに半径のみ変化する。

固有値 $\frac{3}{2}$ の固有ベクトルは $d^{(1)} + d^{(2)} + d^{(3)} = 0$ を満たすようなベクトル $\begin{pmatrix} d^{(1)} \\ d^{(2)} \\ d^{(3)} \end{pmatrix}$ である。この式の図形的意味は見出しにくい、もし $d^{(1)} + d^{(2)} + d^{(3)} = 0$ を満たすような初期円に限定して考えるならば、固有値 $\frac{3}{2}$ に依存した議論が行われるだろう。

3.3 その他

今回では、円の初期位置（初期円）における円の中心を三角形の内部に限定した。この場合には、円の中心が三角形の内部にあるという状況に変化が起こらないため、かならず内接円へと収束することも示されている。一方で、初期円が三角形の外部にある場合には、内接円へ収束する場合と傍接円へ収束する場合の両方がある。実際に、初期円が「内角の対頂角内に中心があり、半径が十分に小さいとき」には円の中心が三角形の内部に移動する可能性がある。これらの事象については、今後の課題としておく。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 23K11375 の助成を受けている。

参考文献

- [1] 阿原一志: PointLine, 動的作図ソフトウェア
<https://aharalab.sakura.ne.jp/PointLine/>
- [2] 阿原一志: マルコフ過程を用いた動的幾何ソフトウェアについて（みつどもえ作図の収束について）, 京都大学数理解析研究所講究録 2301, pp.59–71, 2025
- [3] 足助太郎: 線形代数学, 東京大学出版会, 2012