

温度勾配のある狭いチャンネル内の非線形音波の伝播 Propagation of nonlinear acoustic waves in a narrow channel subject to temperature gradient

関西大学・システム理工学部 杉 本 信 正
Nobumasa SUGIMOTO
Faculty of Engineering Science, Kansai University

1. はじめに

熱音響現象を利用した新奇なプライムムーバ（原動機）やヒートポンプ（冷凍機）の開発が関心を集めている [1-6]. 中でもプライムムーバは、温度勾配のある固体壁に接した気体中を定常的に流れる熱流が不安定化することにより、系の固有振動が励起される共振現象を利用している. 熱流から振動へのエネルギー変換はまさにプライムムーバの作用である. この熱機関の特徴は、まず構造が極めて簡単であり、空気やアルゴン、ヘリウム等の環境に優しい気体を用いることができ、熱源として太陽熱や地熱、低温廃熱などが利用でき、さらには熱効率が高いことが挙げられる.

エネルギー変換を起こさせる熱機関のコアとなる部品が、スタックや再生器と呼ばれるものである. スタックとはセラミックなどの母材に孔が規則正しく貫通したものを指し、再生器とは細かい金網等を重ねたものであり、その中の流路はスタックの場合とは違い曲がりくねっている. スタックや再生器に温度勾配を適当に与えると、中の気体の粘性や熱伝導性による拡散作用によって攪乱が不安定化する. 攪乱の不安定化は、ポワズユ流れなどの質量流れの場合の粘性による不安定化に例えると理解しやすいかもしれない [1,2]. 不安定化した攪乱は次第に成長し気体全体を振動させるが、あるレベルに成長すると飽和し気体は一定の振幅で自励振動する [3]. このとき超過圧の平均圧に対する比は実に 10%程度にも達し、この振動は非線形振動である.

スタックと再生器は流路の幾何形状の違いや気体が固体壁と接触する面積の違いで区別されているようであるが、本質的な違いはむしろ流路幅と拡散層の厚さにある. スタックでは流路幅が拡散層と同程度か大きい場合であり、再生器では流路幅が極めて小さい場合である. 流路幅が拡散層より十分大きい場合には、拡散層は壁面の境界層として取り扱うことができ、非線形な場合への拡張も研究されてきた [7, 8]. しかし、拡散層が厚い場合の気体の振る舞いについてはこれまで研究されておらず、攪乱が大きい場合の非線形挙動については理論的には全く未知である.

そこで本報告では、流路幅が拡散層の厚さに比べて十分小さい再生器内の気体を想定し、圧力攪乱の大きさは微小であるが有限であるとした場合について調べる. 流路が曲がりくねっていると解析は絶望的に難しいが、二つの平行な平面壁で囲まれたチャンネルでは解析は可能である. 理想気体とニュートン・ストークス流体を仮定した熱流体力学の基礎方程式に基づき、拡散層厚さに対するチャンネル幅を微小パラメータとする漸近理論を展開する. これにより基礎方程式系が比較的簡単な超過圧に対する非線形拡散・波動（移流）方程式に帰着できることを示す. この導出に伴い、流れ場および温度場を漸近的に求めることができる. 講究録には方程式の導出だけに留め、その方程式を用いて時間周期解を想定した場合の質量流束やエネルギー流束の時間平均量である音響流や熱音響流についての議論はページ数の制約のため別の機会に譲る [9].

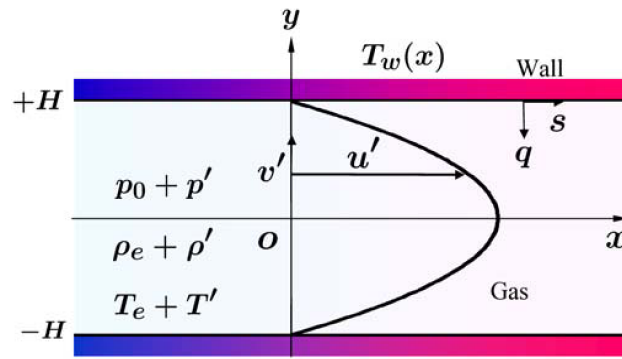


図 1: 平行な固体壁の間のチャンネルと座標軸の幾何学的な配置. チャンネルには理想気体が満たされており, 固体壁の温度 T_w がチャンネル長手方向に緩やかに変化している. 各量に対して添え字 e は静止状態での値を表し, プライムは静止状態からの攪乱を表す. また q と s は, 壁面での気体に作用するせん断応力と気体に流れ込む熱流を表す.

2. 基礎方程式のまとめ

熱音響現象は理想気体で説明できるものとして, その運動を支配する方程式を最初に纏めておく. これらは, 連続の式, ナビエ・ストークス方程式, エネルギー式および理想気体の状態方程式からなり, 順次以下のようにかける:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[2\mu \left(\mathbf{e} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \nabla (\mu_v \nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (2.2)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi, \quad (2.3)$$

$$p = \mathcal{R} \rho T. \quad (2.4)$$

ここで, D/Dt はラグランジュ微分 $\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ を表し, t は時間, ρ , $\mathbf{v}$, p および T は, それぞれ密度, 速度ベクトル, 圧力および絶対温度を表す. 一方, μ , μ_v および k は, それぞれせん断粘性率, 体積粘性率, 熱伝導率を表し, c_p は定圧比熱, $\mathcal{R}$ は気体定数である; $\mathbf{e}$ と $\mathbf{I}$ は, ひずみ速度テンソルと単位テンソルを表す. 一方, 粘性応力テンソルを $\boldsymbol{\sigma}$ とおくと, Φ は

$$\Phi = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}) = 2\mu \text{tr}(\mathbf{e} \mathbf{e}) + (\mu_v - 2\mu/3) [\text{tr}(\mathbf{e})]^2 \quad (2.5)$$

で与えられる粘性散逸関数である. 粘性率と熱伝導率の温度依存性を考慮して, それらが温度に関する次のべき則で表されるものとする:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\mu_v}{\mu_{v0}} = \frac{k}{k_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^\beta. \quad (2.6)$$

ここで、添え字 0 をつけた量はある参照温度での値で、 β は正の定数である。空気では β は 0.5 から 0.6 の間の値をとる。

チャンネルが軸方向には十分長いと仮定して両端の影響を無視し、壁面上の境界条件のみ考える。図 1 に示すように、チャンネルに沿って x 軸をとり、それに垂直に紙面内に y 軸をとる。座標の原点はチャンネルの中央にとり、上下の壁面を $y = \pm H$ とする。紙面に垂直な方向には現象は一樣であるとする。固体壁の熱容量が十分大きく温度変化が無視できるとして、壁面上 $y = \pm H$ 上で次の境界条件を課す：

$$v = 0 \quad \text{および} \quad T = T_w(x). \quad (2.7)$$

ここで、 T_w は壁面の温度である。等温条件は壁の熱容量が大きくないと成り立たず、そうでなければ固体の温度変化も考慮する必要がある。この場合には固体の熱伝導方程式を追加して、壁面で熱流束の連続を課すことになる。

3. 漸近理論

3.1 微小パラメータの導入

第 2 節で示した基礎方程式を漸近的に近似することによって簡単な方程式に帰着させることを考える。このために幾つかパラメータを導入する。

まず、チャンネルの幅に比べてチャンネルの代表長さや温度勾配の代表長さ L が十分に長いとする。気体が静止している場合には、壁の温度 T_w は次の条件を満足するものと仮定する：

$$\frac{H^2}{T_w} \left| \frac{d^2 T_w}{dx^2} \right| \ll \frac{H}{T_w} \left| \frac{dT_w}{dx} \right| \ll 1. \quad (3.1)$$

ここで、 $T_w |dT_w/dx|^{-1}$ は温度分布の代表長さを与え、中央の項の大きさは H/L の程度に小さく、左の項の大きさは $(H/L)^2$ とさらに小さくなる。以下に展開する理論では、 $(H/L)^2$ の小ささの項を全て無視する近似を用いる。この近似のもとでは、静止状態の気体の温度 T_e の y 方向の変化が無視でき、 T_e は T_w に等しいとおける [1]。

次に、粘性および温度拡散層の代表厚さは、角周波数を ω とすると、それぞれ $\sqrt{\nu/\omega}$, $\sqrt{\kappa/\omega}$ で見積もることができる。ここで、 ν および κ は、それぞれ動粘性率および温度拡散率である。両者の比はプラントル数 $Pr (= \nu/\kappa)$ であり、空気のような気体ではその値は 0.7 と、大体 1 程度の量である。このことから、拡散層の厚さを粘性拡散層の厚さで代表させる。チャンネルの幅が狭くなるに従い、攪乱の軸方向への伝播速度 ωL は小さくなる。そこで以下の 3 つの小さなパラメータを導入する：

$$\frac{H}{\sqrt{\nu/\omega}} \equiv \frac{1}{\delta} \ll 1, \quad \frac{\omega L}{a} \equiv \frac{1}{\chi} \ll 1 \quad \text{および} \quad \frac{\Delta p}{p_0} \equiv \varepsilon \ll 1. \quad (3.2)$$

ここで、 a および Δp はそれぞれ、断熱線形音速と超過圧 $p' (= p - p_0)$ の最大値を表す。

3.2 最低次近似

方程式系 (2.1) から (2.4) においてパラメータ $1/\delta$ と ε が十分小さいと見なすと、(2.1) の最低次の項から以下の関係式が得られる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho'}{\rho_e} \right) - \frac{u'}{T_e} \frac{dT_e}{dx} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (3.3)$$

ここで、プライム'によって静止状態からの攪乱を表すとして、 $\mathbf{v}' [= (u', v')]$ とおき、 $\rho_e^{-1} d\rho_e/dx = -T_e^{-1} dT_e/dx$ を用いた。なぜならば $\rho_e T_e$ は x によらず定数であるからである。式 (3.3) から、 v' は u' より H/L だけ小さいと見積もられる。

次に運動方程式 (2.2) の x および y 成分はそれぞれ以下のように近似される：

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial u'}{\partial y} \right), \quad (3.4)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial y}. \quad (3.5)$$

式 (3.5) より、 p' はチャンネル断面にわたって一様であることが分かる。この結果を用いると、 u' が (3.4) より

$$u' = -\frac{1}{2\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} (H^2 - y^2) \quad (3.6)$$

と求まる。この速度分布はポワズユ流のそれに他ならない。

次にエネルギー式 (2.3) を考える。チャンネル幅が狭いので気体の温度は各位置での壁面温度に等しくなり、それからの変化は無視できると予想される。しかし、かりに温度変化 T' があるとして状態方程式 (2.4) を近似すると $p'/p_0 = \rho'/\rho_e + T'/T_e$ となる。このとき (2.3) は以下のように近似される：

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(k_e \frac{\partial T'}{\partial y} \right). \quad (3.7)$$

この式を導くときに、 $\rho c_p \partial T / \partial t$ および $\partial p / \partial t$ はそれぞれ、 $1/\delta^2$ の程度に小さく、残る項は (3.7) に比べて $(H/L)^2$ の程度小さいので無視している。壁面上での境界条件を課すと $T' = 0$ となり、予想どおり温度攪乱は無視できることが分かる。これより、圧力変化は局所等温過程によって近似される：

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_e}. \quad (3.8)$$

ここで各量の大きさを見積もる。式 (3.3) から、 u' は $\varepsilon \omega L$ の程度である。一方 (3.4) より、 u' は $H^2 p' / \mu L$ の程度の大きさである。したがって以下の関係が成立する：

$$\frac{H^2 p_0}{\mu \omega L^2} \sim \frac{a^2 H^2}{\gamma \nu \omega L^2} \sim \frac{\chi^2}{\delta^2} \sim O(1). \quad (3.9)$$

ここで、 $\sim$ は大きさの程度が等しいことを示す。これより χ の大きさが δ の大きさと同程度であることが分かる。

式 (3.6) および (3.8) を (3.3) に代入すると v' が求まる。この前に、(3.3) をチャンネル断面にわたって積分し境界条件を用いると

$$\frac{\partial \bar{p}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e \bar{u}') = 0 \quad (3.10)$$

となる。ここで $\overline{(\dots)}$ はチャンネル幅に亘る平均、例えば u' に対しては

$$\overline{u'} \equiv \frac{1}{2H} \int_{-H}^H u' dy \quad (3.11)$$

によって定義される。式 (3.6) と (3.8) を用いると、 p' は次の拡散・波動（移流）方程式で記述される：

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \quad (3.12)$$

ここで、 α_e はチャンネル内の気体の拡散率であり、次式で与えられる：

$$\alpha_e = \frac{a_e^2 H^2}{3\gamma\nu_e} = \frac{p_0 H^2}{3\mu_e}. \quad (3.13)$$

せん断粘性率が温度に依存しないと仮定すると ($\beta = 0$)、 α_e は温度に依存しない定数である。

パラメータの関係 $\chi \sim \delta$ から、(3.12) の第 1 項と第 2 項目がバランスしている。穏やかな温度勾配下では、第 3 項も同じ程度である。方程式 (3.12) から、温度勾配がない場合には p' は伝播できずに拡散することが分かる。しかし、温度勾配があれば第 3 項によりその向きに伝播または移流することが分かる。その速度は $(\alpha_e/T_e)dT_e/dx$ で与えられる。

最後に、 y 方向の速度成分 v' は (3.3) から以下のように求まる：

$$v' = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p'}{p_0} \right) y + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{\mu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \right] \frac{(3H^2 - y^2)y}{6}. \quad (3.14)$$

ここで (3.12) を用いると、この式は

$$v' = \frac{1}{2p_0 H^2} \frac{\partial p'}{\partial t} (H^2 - y^2)y, \quad (3.15)$$

と書き直すことができ、境界条件を満たしていることも分かる。これより、 v' は y の奇関数であり、 $|v'|$ は最大値を $y = \pm H/\sqrt{3}$ とる。速度の x 成分は非圧縮性流体のポワズユ流れと同じプロフィールをもつが、ここでは圧縮性のために y 成分が出現することが明らかになった。

以上の最低次の関係から、流れの音響マッハ数 Ma を求めると

$$\text{Ma} = \frac{u'}{a_e} \sim \frac{\varepsilon\omega L}{a_e} \sim \frac{\varepsilon}{\chi} \ll 1 \quad (3.16)$$

となり、1 より十分小さいことが分かる。ここで、 a_e は局所断熱線形音速である。一方、レイノルズ数 Re は軸方向の代表速度 $\varepsilon\omega L$ とチャンネル幅、さらに局所と動粘性率 ν_e から

$$\text{Re} = \frac{\varepsilon\omega LH}{\nu_e} = \frac{\varepsilon}{\delta^2} \frac{L}{H} \quad (3.17)$$

によって定義できる。この値は 3 つのパラメータ $1/\delta$, ε および H/L によって決定される。

最後にひずみ速度テンソルの成分を示す：

$$e_{xx} \equiv \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{3}{2p_0 H^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) (H^2 - y^2) \sim \varepsilon \omega, \quad (3.18)$$

$$e_{yy} \equiv \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{1}{2p_0 H^2} \frac{\partial p'}{\partial t} (H^2 - 3y^2) \sim \varepsilon \omega, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} e_{xy} = e_{yx} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2p_0 H^2} \left[3\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} (H^2 - y^2) \right] y \sim \frac{L}{H} \varepsilon \omega. \end{aligned} \quad (3.20)$$

これから、せん断成分 e_{xy} と e_{yx} が突出して大きく、速度ベクトルの発散に等しく体積変化を表す $e_{xx} + e_{yy}$ はせん断成分に比べて H/L だけ小さいことが

$$e_{xx} + e_{yy} = -\frac{1}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{2\mu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} (H^2 - y^2) \quad (3.21)$$

より分かる。

3.3 第1高次近似

次に、3つのパラメータが小さいが有限の値をとるとして、その効果を取り込む高次近似を展開する。運動方程式の y 成分は

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = \mu_e \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{d\mu_e}{dx} \frac{\partial u'}{\partial y} + \left(\frac{\mu_e}{3} + \mu_{ve} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right), \quad (3.22)$$

となる。ここで、慣性項 $\rho_e \partial v' / \partial t$ は無視した。これは右辺第1項より $1/\delta^2$ だけ小さく、非線形項はさらに ε/δ^2 だけ小さい。また、 μ や μ_v は温度 T_e の周りに次のように展開されるが、

$$\mu = \mu_e \left(1 + \frac{\beta T'}{T_e} + \dots \right) \quad \text{および} \quad \mu_v = \mu_{ve} \left(1 + \frac{\beta T'}{T_e} + \dots \right), \quad (3.23)$$

T' は最低次ではゼロである。

式(3.22)の右辺を最低次近似を用いて評価し、 p' について解いてその解を p'_2 とおくと、

$$p'_2 = p' - \frac{3\mu_e}{p_0 H^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{y^2}{2} + \left(\frac{1}{3} + \beta + \frac{\mu_{ve}}{\mu_e} \right) \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{y^2}{2} \quad (3.24)$$

となる。ここで、 $p'(x, t)$ は積分定数であるが、最低次近似に相当している。この解から、圧力は断面にわたってもはや一様でなく放物分布することが分かる。しかし、右辺第2項は p' に比べて

$$\frac{3\mu_e}{p_0 H^2 p'} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{y^2}{2} \sim \frac{\nu_e \omega}{a_e^2} \sim \frac{\nu/\omega}{H^2} \left(\frac{\omega L}{a} \right)^2 \left(\frac{H}{L} \right)^2 \sim \frac{\delta^2}{\chi^2} \left(\frac{H}{L} \right)^2 \quad (3.25)$$

となり、 $(H/L)^2$ の程度に小さいことが分かる。また、第3項も明らかに $(H/L)^2$ だけ小さい。このことから、 $(H/L)^2$ の程度に小さい項を無視する近似の範囲においては、第2項、第3項目は p' に比べて無視できるので、圧力が断面内で一様である近似は $(H/L)^2$ を無視する限り高次近似においても成立する。

次に運動方程式の x 成分を考える. 式 (3.4) の右辺に加えるべき高次項を取り入れると, 方程式は以下ようになる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial u'}{\partial y} \right) &= \frac{\partial p'}{\partial x} + \rho_e \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho' \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho_e u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \rho_e v' \frac{\partial u'}{\partial y} \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial u'}{\partial x} \right) + \frac{d\mu_e}{dx} \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\mu_e}{3} + \mu_{ve} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

右辺は第1項を除き全て最低次の項を用いて評価することができる. しかし第2行目の項はそれらに比べて $(H/L)^2$ だけ小さいことが分かる. これより体積粘性率の影響は小さく無視できることが分かる. 右辺の第1行目の非線形項は考慮するのに対し, 第2行目の項は全て無視するということは

$$\delta^2 \left(\frac{H}{L} \right)^2 \sim \chi^2 \left(\frac{H}{L} \right)^2 \ll \varepsilon. \quad (3.27)$$

を意味する. この条件は現実の熱機関では満足されている. 実際そのとき, ε は 10^{-2} から 10^{-1} の程度であり, 一方 H/L は 10^{-2} から 10^{-3} の程度であり, δ は 10 から 10^2 位の大きさである.

この近似の下に (3.26) を u' に対して解いて, 境界条件を用いると以下のように u' が求まる:

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} \phi_2 + \frac{1}{\rho_e \nu_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \phi_4 \\ &+ \frac{1}{\rho_e \nu_e^2} \left[\frac{p'}{p_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \phi_4 - \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \phi_6 - \frac{1}{p_0 H^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \phi_{64} \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

ただし, ϕ_i ($i = 2, 4, 6$) はそれぞれ

$$\phi_2(y) = \frac{1}{2}(H^2 - y^2), \quad (3.29)$$

$$\phi_4(y) = \frac{1}{24}(5H^2 - y^2)(H^2 - y^2), \quad (3.30)$$

$$\phi_6(y) = \frac{1}{120}(11H^4 - 4H^2 y^2 + y^4)(H^2 - y^2), \quad (3.31)$$

によって与えられ, $d^2 \phi_i / dy^2 = -\phi_2^{i/2-1}$ と $\phi_i(\pm H) = 0$ を満たすものとする. 一方, ϕ_{64} は $H^2 \phi_4 - 2\phi_6$ で与えられ

$$\phi_{64}(y) = \frac{1}{120}(3H^4 + 3H^2 y^2 - 2y^4)(H^2 - y^2) \quad (3.32)$$

によって定義される. これは $d^2 \phi_{64} / dy^2 = -(H^2 - y^2)y^2/2$ と $\phi_{64}(\pm H) = 0$ を満たす関数である.

式 (3.28) の各項の大きさを第1項と比べる. 第1行目の第2項は慣性項によるものであり $1/\delta^2$ の程度の大きさである. この線形項はチャンネル幅の有限効果を現す. 第2行目の非線形項は全て慣性項の移流項から生じたものであり, ε/δ^2 か $\varepsilon\chi^2/\delta^4$ の程度の大きさである. これから非線形項の影響はチャンネル幅の有限性による影響より小さいことが分かる. この結果は重要な事柄を示唆している. 非線形項の精度が不十分で, 正しく評価するには次の高次項に進まなければならない

ない。分かり易く言えば、最低次の項を第ゼロ近似とすれば、ここで求めた第2項は第1高次近似になり、非線形項は第2高次近似になる。このため、第1高次近似を正しく求めておいて、次に非線形項を新たに求め直す必要が起きる。この修正については後に考える。

次にエネルギー式を考える。温度の攪乱 T' は最低次近似ではゼロとおけたが、その高次項を求める。式 (3.7) において無視した項を復活させると

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k_e \frac{\partial T'}{\partial y} \right) = \rho_e c_p u' \frac{dT_e}{dx} + c_p \rho' u' \frac{dT_e}{dx} - \frac{\partial p'}{\partial t} - u' \frac{\partial p'}{\partial x} - \Phi \quad (3.33)$$

となる。右辺において一番大きな項は $\rho_e c_p u' dT_e/dx$ と $-\partial p'/\partial t$ である。一方、無視した $\rho_e c_p \partial T'/\partial t$ は、左辺に比べて $1/\delta^2$ だけ小さい。また、 $(d/dx)(k_e dT_e/dx)$ や $(\partial/\partial x)(k_e \partial T'/\partial x)$ も $(H/L)^2$ だけ小さい。非線形項は温度勾配の下、密度変化による項 $c_p \rho' u' dT_e/dx$ 、圧力の移流項 $u' \partial p'/\partial x$ および粘性散逸関数 Φ から現れる。後の二つは温度勾配に影響されない。散逸関数 Φ には e_{xy} と e_{yx} の寄与が大きく、次のように与えられる：

$$\Phi \approx 2\mu_e(e_{xy}^2 + e_{yx}^2) \approx \mu_e \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{\mu_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 y^2. \quad (3.34)$$

高次近似 (3.33) から T' を求めると以下のようになる：

$$T' = \frac{1}{k_e} \frac{\partial p'}{\partial t} \phi_2 + \frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \phi_4 + \frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \phi_4 - \frac{1}{2k_e \mu_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \phi_2^2. \quad (3.35)$$

ここで、 $\rho_e c_p/k_e \mu_e = \text{Pr}/\rho_e \nu_e^2$ であり、プラントル数 $\text{Pr} = \nu_e/\kappa_e$ である。

こうして求めた T' の T_e に対する大きさを調べる。まず第1項は

$$\frac{1}{k_e T_e} \frac{\partial p'}{\partial t} \phi_2 \sim \frac{(\gamma-1)\text{Pr}}{a_e^2 \mu_e} \omega p' H^2 \sim \frac{(\gamma-1)\text{Pr}}{\gamma \delta^2} \frac{p'}{p_0} \sim \frac{\varepsilon}{\delta^2}. \quad (3.36)$$

ここで、 $1/k_e T_e = (\gamma-1)\text{Pr}/a_e^2 \mu_e = [(\gamma-1)\text{Pr}/\gamma]/\nu_e p_0$ である。一方、第2項は

$$\frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2 T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \phi_4 \sim \frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2 L} \frac{p'}{L} H^4 \sim \frac{\varepsilon \chi^2}{\delta^4} \quad (3.37)$$

と見積もることができる。関係 $\delta \sim \chi$ より、第2項は第1項と同じ程度の大きさである。同じようにして、第3項と第4項の程度は $\varepsilon^2 \chi^2/\delta^4$ である。かくして T'/T_e は ε/δ^2 の程度の大きさであることが分かる。また温度攪乱は断面にわたって放物分布する。

分布 (3.35) の第3項は (3.33) の第2項から生じ、最後の項は第3、第4項から生じている。最後の項 $-\Phi$ は温度勾配には無関係であり常に負である。散逸関数は常に正で温度攪乱は壁面でゼロであることから、 $-\Phi$ は温度分布を上に出、すなわち正にするが、一方圧力の移流項 $u' \partial p'/\partial x$ は常に負であり、これが正の Φ を打ち消し T' を負にするのである。分布 (3.35) の第3項の正負は不明であるが、非線形項は最初の2つの項よりも高次である。その精度については後ほど議論する。

速度や温度の攪乱における非線形項の精度を明らかにするために、ここで各量の大きさを纏めておく。圧力攪乱の大きさ p'/p_0 を ε として、以下のような関係が得られる：

$$\frac{p'}{p_0} \sim \frac{\rho'}{\rho_e} \sim \frac{u'}{\omega L} \sim \varepsilon, \quad \frac{v'}{\omega L} \sim \frac{u'}{\omega L} \frac{H}{L} \sim \varepsilon \frac{H}{L} \quad \text{および} \quad \frac{T'}{T_e} \sim \frac{\varepsilon}{\delta^2} \sim \frac{\varepsilon \chi^2}{\delta^4}. \quad (3.38)$$

3.4 第2高次近似

温度攪乱が求まったので、再度 (3.28) および (3.35) において非線形項に落ちこぼれないかを確認する。温度攪乱に対して粘性の温度依存性による影響が現れる。このため (3.26) の左辺は

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial u'}{\partial y} + \beta \mu_e \frac{T'}{T_e} \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \quad (3.39)$$

のように修正が必要である。第2項は移流項と同程度の大きさである。この項を (3.6) および (3.35) を用いて評価する。さらに、(3.26) の線形項にも第1高次項による修正が加わり (3.28) を用いると、(3.28) は2次の高次項まで含んで以下のように求まる：

$$\begin{aligned} u' = & -\frac{1}{\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} \phi_2 + \frac{1}{\rho_e \nu_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \phi_4 - \frac{1}{\rho_e \nu_e^3} \frac{\partial^3 p'}{\partial t^2 \partial x} \phi_{60} \\ & + \frac{1}{\rho_e \nu_e^2} \left[\frac{p'}{p_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \phi_4 - \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \phi_6 - \frac{1}{p_0 H^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \phi_{64} \right] \\ & + \frac{\beta}{\mu_e} \left[\frac{1}{k_e T_e} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\phi_2^2}{2} + \frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2 T_e} \frac{dT_e}{dx} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \phi_{62} \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

ここで ϕ_{60} は $d^2 \phi_{60}/dy^2 = -\phi_4$ および $\phi_{60}(\pm H) = 0$ を満たし、一方 ϕ_{62} は $(d/dy)(\phi_4 d\phi_2/dy) = d^2 \phi_{62}/dy^2$ および $\phi_{62}(\pm H) = 0$ を満たす。これより

$$\phi_{60}(y) = \frac{1}{720} (61H^4 - 14H^2 y^2 + y^4)(H^2 - y^2), \quad (3.41)$$

$$\phi_{62}(y) = \frac{1}{144} (7H^2 - y^2)(H^2 - y^2)^2 \quad (3.42)$$

となる。式 (3.40) の3行目は粘性の温度依存性から生じた項である。

同様にエネルギー式における熱伝導率の温度依存性の影響を調べると、温度攪乱が最低次でゼロであることからこの影響は小さいことがわかり無視できる。しかし線形項からの寄与が加わり、(3.35) は以下ようになる：

$$\begin{aligned} T' = & \frac{1}{k_e} \frac{\partial p'}{\partial t} \phi_2 + \frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \phi_4 + \frac{\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \phi_4 - \frac{1}{2k_e \mu_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \phi_2^2 \\ & - \frac{\text{Pr}}{k_e \nu_e} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \phi_4 - \frac{(1+\text{Pr})\text{Pr}}{\rho_e \nu_e^3} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \phi_{60}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

4. 非線形拡散・波動（移流）方程式

速度と温度の高次項が求まったので残る連続の式を考える。密度のラグランジュ微分を状態方程式を用いることによって圧力と温度のラグランジュ微分で表すと、次のように書ける：

$$\frac{1}{(p_0 + p')} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + u' \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{(T_e + T')} \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{dT_e}{dx} \right) + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

ここで $1/(p_0 + p')$ および $1/(T_e + T')$ を攪乱に関して展開し、チャンネル断面にわたって平均すると攪乱の2次の範囲では

$$\frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \overline{u'} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{p'}{p_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{T_e} \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \overline{u'} \frac{dT_e}{dx} \right) + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

となる。ここで、 $(u'/p_0)\partial p'/\partial x$ と $(p'/p_0^2)\partial p'/\partial t$ は同程度の大きさの最低次の非線形項であるが、 $(T'/T_e^2)u'dT_e/dx$ や $(T'/T_e^2)\partial T'/\partial t$ はそれらに比べてそれぞれ $1/\delta^2$, $1/\delta^4$ だけ小さいので無視する。

この方程式を p' に対して閉じさせるためには $\overline{u'}$ および $\overline{T'}$ が必要である。そこで以下の平均値： $\overline{\phi_2} = H^2/3$, $\overline{\phi_4} = 2H^4/15$, $\overline{\phi_2^2} = 2H^4/15$, $\overline{\phi_6} = 2H^6/35$, $\overline{\phi_{64}} = 2H^6/105$, $\overline{\phi_{60}} = 17H^6/315$ および $\overline{\phi_{62}} = 8H^6/315$ を用いると、

$$\begin{aligned} \overline{u'} = & -\frac{H^2}{3\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{2}{15} \frac{H^4}{\rho_e \nu_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} - \frac{17}{315} \frac{H^6}{\rho_e \nu_e^3} \frac{\partial^3 p'}{\partial t^2 \partial x} \\ & + \frac{H^4}{105 \rho_e \nu_e^2 p_0} \left[14 p' \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} - 18 \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\beta \text{Pr} H^4}{105 \rho_e \nu_e^2 p_0} \left[\frac{7(\gamma-1)}{\gamma} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{8\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

および

$$\begin{aligned} \overline{T'} = & \frac{H^2}{3k_e} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{2}{15} \frac{\text{Pr} H^4}{\rho_e \nu_e^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{2}{15} \frac{\text{Pr} H^4}{\rho_e \nu_e^2} \frac{dT_e}{dx} \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{H^4}{15 k_e \mu_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \\ & - \frac{2}{15} \frac{\text{Pr} H^4}{k_e \nu_e} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{17}{315} \frac{(1+\text{Pr}) \text{Pr} H^6}{\rho_e \nu_e^3} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる。これらを (4.2) に代入すると (3.12) に高次項を取り入れた次の非線形拡散・波動（移流）方程式が導かれる：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ & - \frac{(\gamma-1) \text{Pr} \alpha_e}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{2}{5} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_e H^2}{\nu_e} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right) - \frac{(1+\text{Pr}) \alpha_e H^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right] \\ & - \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\alpha_e}{p_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

第2行目がチャンネル幅の有限の効果を表し、第3行目が非線形性の影響を表している。非線形性は連続の式の密度変化から生じており、温度勾配にはあからさまには依存しないことが分かる。

最低次の近似を用いて高次項を同じ精度の下で違う形に表すことができる。式 (4.5) の第2行目の第2項を以下の関係を用いて書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha_e H^2}{\nu_e} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right) = \frac{H^2}{\nu_e} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\beta \alpha_e H^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \quad (4.6)$$

となり、(4.5) は次のように表すこともできる：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_e \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} + \left[\frac{6}{5} \gamma - (\gamma-1) \text{Pr} \right] \frac{\alpha_e}{a_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \\ & - \frac{2}{5} (1+\beta+\text{Pr}) \frac{\alpha_e H^2}{\nu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} - \frac{p'}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\alpha_e}{p_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

このように高次の関係式が得られたので、残る v' も高次項まで求めることができる。式 (4.1) を y で積分すると、 v' は

$$\begin{aligned} v' = & - \left(1 - \frac{p'}{p_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p'}{p_0} \right) y \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_e} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{\mu_e T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{k_e T_e} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu_e p_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{(3H^2 - y^2)y}{6} \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e \nu_e^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right) - \frac{(1 + \text{Pr})}{\rho_e \nu_e^2 T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right] \frac{(5H^2 - y^2)^2 y}{120} \end{aligned} \quad (4.8)$$

と求まる。ここで (4.5) を用いると、(4.8) は次のように纏めることができ、境界条件を満たしていることが分かる：

$$v' = \left(1 - \frac{p'}{p_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p'}{p_0} \right) \frac{\phi_2}{H^2} y - \frac{1}{\nu_e p_0} \left[\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - (1 + \beta + \text{Pr}) \frac{\alpha_e}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \right] \frac{\phi_2^2}{10H^2} y. \quad (4.9)$$

かくして高次項が第2近似まで求まったことになる。

5. おわりに

温度勾配のあるチャンネル内の気体に対してチャンネル幅が小さいとした漸近理論を展開し、その中を伝わる熱音響波動の振る舞いを記述する非線形拡散・波動（移流）方程式を導出した。この方程式は再生器の中の気体の挙動を記述するものであり、応用面では再生器の外側での挙動を記述する方程式と併せて解くべきものである。これにより自励振動に相当する周期解が得られることが期待される。

参考文献

- [1] 杉本 信正, “熱流の不安定性と熱音響現象 第1回 —導入編—,” *ながれ*, **33**(2) (2014) 181–194.
- [2] 杉本 信正, “熱流の不安定性と熱音響現象 第2回 —線形理論編—,” *ながれ*, **33**(3) (2014) 307–322.
- [3] 杉本 信正, “熱流の不安定性と熱音響現象 第3回 —非線形現象編—,” *ながれ*, **33**(4) (2014) 375–393.
- [4] Lycklama à Nijeholt, J. A. & Tijani, M. E. H., “Simulation of a traveling-wave thermoacoustic engine using computational fluid dynamics,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **118**(4) (2005) 2265–2270.
- [5] Tijani, M. E. H. & Spoelstra, S., “A high performance thermoacoustic engine,” *J. Appl. Phys.*, **110** (2011) 093519 1–6.
- [6] Scalo, C., Lele, S. K. & Hasselink, L., “Linear and nonlinear modelling of a theoretical travelling-wave thermoacoustic heat engine,” *J. Fluid Mech.*, **766** (2015) 368–404.
- [7] Sugimoto, N. & Shimizu, D., “Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube,” *Phys. Fluids*, **20**(10) (2008) 104102 1–11.
- [8] Shimizu, D. & Sugimoto, N., “Numerical study of thermoacoustic Taconis oscillations,” *J. Appl. Phys.*, **107**(3) (2010) 034910 1–11.
- [9] Sugimoto, N., “Nonlinear diffusion-wave equation for a gas in a regenerator subjected to temperature gradient,” in *Recent Developments in Nonlinear Acoustics*, (eds. Blanc-Benon, Ph., Sparrow, V. W. & Dragna, D.) AIP Conf. Proc. **1685** (2015) 060001 1–4.