

Algebraic links の Alexander polynomials による分類

早大 理工 山本 慎

1. $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(0) = 0$, 原点を孤立特異点とする複素2変数の多項式とし, f は既約な成分 $f_1, \dots, f_r$ により, $f = f_1 \cdots f_r$ と分解されているとする. $V = f^{-1}(0)$ とすると, V と十分小さな3次元球面 S^3 との共通部分 $L = V \cap S^3$ は, $K_i = f_i^{-1}(0) \cap S^3$ ($1 \leq i \leq r$) を成分とする link となり, algebraic link とよばれる. f が既約なとき L は algebraic knot とよばれ, その knot type は, f の Puiseux characteristic pairs を $\{(n_k, m_k)\}_{k=1}^r$ とすると, type $\{(\lambda_k, m_k)\}_{k=1}^r$ の iterated torus knot になる. ただしここで

$$\lambda_1 = n_1$$

$$\lambda_k = n_k - m_k n_{k-1} + \lambda_{k-1} m_{k-1} m_k \quad 2 \leq k \leq r$$

である.

2. $X = S^3 - L$ とすると, $H_1(X; \mathbb{Z})$ は $\{t_i\}_{i=1}^r$ で生成される, free abelian group Gr となる. ここで, t_i は L の成分 K_i と linking number が δ_{ij} なるものとする. $\tilde{X}$, $\tilde{\pi}$ を

それぞれ, X の universal abelian covering, infinite cyclic covering とすると, $H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は Λ_r -module, $H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は Λ_1 -module となる. Λ_i は integral group ring $\mathbb{Z}G_i$ である. L の Alexander polynomial $\Delta(L; t_1, \dots, t_r)$, reduced Alexander polynomial $\Delta(L; t)$ は, それぞれ, $H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z})$, $H_1(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ の characteristic polynomial として定義される.

Algebraic links については, $r=1$ のとき Buraw [1] をはじめとしてその一般形が求められており, $r \geq 2$ のときは, Sumners - Woods [4] によりそれが与えられている.

3. 定理 (Le [2]) Algebraic knots K, K' の Alexander polynomial が等しければ, K, K' の knot type は等しい.

f が $f = f_1 \cdots f_r$ と既約分解されるとき, L の link type は各成分 K_i の knot type と $V_i = f_i^{-1}(0)$ の tangent cone により決定される.

4. 定理 (Zariski [6], Lejeune [3]) Algebraic link の link type は, 各成分の knot type とすべての成分の対の linking numbers により決定される.

Algebraic link L の各成分 k_i ($1 \leq i \leq r$) は type $\{(\lambda_{i,k}, m_{i,k})\}_{k=1}^{g_i}$ の iterated torus knot とする. L の Alexander polynomial $\Delta(L; t_1, \dots, t_r)$ で, $t_j = 1$ ($j \neq i$), $t_i = t$ としたもの $\Delta^i(L; t)$ とすると, Sumners - Woods [4] により $\Delta^i(L; t)$ は 1 の累乗根を根とする. 従って, $\Delta^i(L; t)$ は円周等分多項式として,

$$\Delta^i(L; t) = \prod_{\alpha \in A_i} (r_\alpha(t))^{\omega_\alpha}$$

と表わされる. ここで ω_α はある正の整数, $r_\alpha(t)$ は 1 の原始 α 乗根を根とする円周等分多項式, A は 1 の原始 α 乗根が $\Delta^i(L; t)$ の根となるような α すべての集合である. このとき次が成り立つ.

5.補題 $a_i = \max \{ \alpha \in A_i \}$, $a = \max \{ a_1, \dots, a_r \}$ とすると, ある i ($1 \leq i \leq r$) に対して

$$a = \lambda_{i, g_i} m_{i, g_i}$$

であり, さらに, ある j ($j \neq i$) に対して $a = a_j$ となるならば $a_j = \lambda_{j, g_j} m_{j, g_j}$ である.

次に, $\Delta^{ij}(L; t)$ を $\Delta(L; t_1, \dots, t_r)$ において $t_i = t_j = t$ とし, $t_k = 1$ ($k \neq i, j$) としたものとする. $\Delta^i(L; t)$ と同様 $\Delta^{ij}(L; t)$ も根は 1 の累乗根であり, 円周等分多項式として,

$$\Delta^{ij}(L; t) = \prod_{\beta \in B_{ij}} (r_{\beta}(t))^{\omega_{\beta}}$$

と表わされる。ただし、 B_{ij} は L の原始 β 乗根が $\Delta^{ij}(L; t)$ の根となるすべての β の集合である。 ($i \neq j$)

6. 補題 $a = a_i$ のとき、 $\beta_{ij} = \max \{ \beta \in B_{ij} \}$ ($i \neq j$) とすると、 L の成分 k_i, k_j の linking number l_{ij} は、

$$l_{ij} = \beta_{ij} - a_i$$

により与えられる。

さて、 l, l' を links $l = k_1 \cup \dots \cup k_r$ ($r \geq 2$), $l' = k_1 \cup \dots \cup k_{r-1}$ とし、 $\Delta(l; t_1, \dots, t_r)$, $\Delta(l'; t_1, \dots, t_{r-1})$ によりそれぞれの Alexander polynomials を表わすものとする、Torres により次が示されている。

7. 定理 (Torres [5]) $r = 2$ のとき $\Delta(l; t_1, 1) = \Delta(l'; t) (t^{l_{12}} - 1) / (t - 1)$, $|\Delta(l; 1, 1)| = |\Delta(l'; 1, 1)|$ であり、 $r \geq 3$ のとき $\Delta(l; t_1, \dots, t_{r-1}, 1) = \Delta(l'; t_1, \dots, t_{r-1}) (t_1^{l_{1r}} \dots t_{r-1}^{l_{r-1,r}} - 1)$ となる。 (l_{ij} は k_i と k_j の linking number である。)

補題 5, 6, 定理 7 により、algebraic link L の Alexander polynomial $\Delta(L; t_1, \dots, t_r)$ から、すべての i, j ($i \neq j, 1 \leq i, j \leq r$)

に対して, 成分 K_i, K_j の linking numbers l_{ij} および, 各成分 K_i ($1 \leq i \leq r$) の Alexander polynomial $\Delta(K_i; t)$ を一意的に求めることができる. 従って, 定理 3, 4 から, 次の定理を得る.

7. 定理 Algebraic links は Alexander polynomial's により分類される.

References

- [1] W. Burau : Kennzeichnung der Schlauchknoten. Abh. Math. Sem. Hamburg., 9, 125 - 133 (1932).
- [2] Lê Dũng Tráng : Sur les noeuds algebriques. Comp. Math., 25, 281 - 321 (1972).
- [3] M. Lejeune : Sur l'equivalence des singularites des courbes algebroides planes. Coefficients de Newton, Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, 1969.
- [4] D.W. Sumners and J.M. Woods : The monodromy of reducible plane curves. Inv. Math. 40, 107 - 141 (1977).
- [5] G. Torres : On the Alexander polynomial. Ann. Math. 57, 57-89 (1953).
- [6] O. Zariski : General theory of saturation and saturated local rings, II. Amer. J. Math., 93 (1971).