

## 可換な縮小作用素の集まりの同時ユニタリ伸張

山形大学理学部 岡安隆照 (Takateru Okayasu)

1.  $T_1, \dots, T_n$  をヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の可換な縮小作用素とする. もしも  $\mathcal{H}$  を含むヒルベルト空間  $\mathcal{K}$  と  $\mathcal{K}$  上の可換なユニタリ作用素  $U_1, \dots, U_n$  が存在して任意の整数  $k_1, \dots, k_n \geq 0$  に対して

$$T_1^{k_1} \dots T_n^{k_n} = P U_1^{k_1} \dots U_n^{k_n} |_{\mathcal{H}}$$

を満たすならば,  $T_1, \dots, T_n$  は同時ユニタリ伸張  $U_1, \dots, U_n$  をもつという. また, 任意の整数  $m$  と,  $m^2$  個の任意の  $p_{11}, \dots, p_{mm} \in \mathcal{P}^n$  に対して不等式

$$\left\| \begin{pmatrix} p_{11}(T_1, \dots, T_n) & \dots & p_{1m}(T_1, \dots, T_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1}(T_1, \dots, T_n) & \dots & p_{mm}(T_1, \dots, T_n) \end{pmatrix} \right\|$$

$$\leq \sup_{z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{T}} \left\| \begin{pmatrix} p_{11}(z_1, z_2, \dots, z_n) & \dots & p_{1m}(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1}(z_1, z_2, \dots, z_n) & \dots & p_{mm}(z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix} \right\|$$

を満たすならば,  $T_1, \dots, T_n$  は von Neumann の不等式を満たすという;  $\mathcal{P}^n$  は  $n$  変数の多項式の全体,  $\mathbf{T}$  は平面  $\mathbb{C}$  上の単位円周である.

これらの概念は, 次の定理が述べる通り, 別のものではない:

**定理 1** (cf. [5]).  $T_1, \dots, T_n$  が同時ユニタリ伸張をもつことと von Neumann の不等式を満たすことは互いに同値である.

## 2. 任意の縮小作用素 $T$ が任意の $p \in \mathcal{P}^1$ に対して不等式

$$\|p(T)\| \leq \sup_{z \in \mathbf{T}} \|p(z)\|$$

を満たすことは von Neumann による古典的な結果である; それがユニタリ伸張をもつことは Sz.-Nagy による [9]. 安藤 [1] は任意の2個の可換な縮小作用素が同時ユニタリ伸張をもつことを示した. Parrott は同時ユニタリ伸張をもたない3個の可換な縮小作用素の例をあげた [7], cf. [10].

一方, 任意有限個の可換な等距離作用素が同時ユニタリ伸張をもつこと, 任意有限個の複可換な縮小作用素が同時ユニタリ伸張をもつこと, など, が知られている [9]; ここに作用素  $S$  が  $T$  と複可換であるとは  $ST = TS$  と共に  $T^*S = ST^*$  が成り立つときにいう.

## 3. 次の事実が成り立つ [6], cf. [5]:

**定理 2.** 可換な縮小作用素  $S_1, \dots, S_m$ , 可換な縮小作用素  $T_1, \dots, T_n$  は共に同時ユニタリ伸張をもち,  $S_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) と  $T_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) が複可換であるとする. このとき,  $T_1, \dots, T_n$  が単射的な von Neumann 環 (または単射的な  $C^*$  環) を生成するならば,  $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n$  は同時ユニタリ伸張をもつ.

単射的な  $C^*$  環, von Neumann 環については  $C^*$  環, von Neumann 環の文献を見て頂きたい.

$C^*$  環の部分空間から  $C^*$  環への線形写像  $\phi$  が完全縮小写像であるとは, 任意の整数  $m$  に対して写像  $\phi \otimes \text{id}_m$  が縮小写像であるときにいい, 単位をもつ  $C^*$  環の単位をもつ自己共役な部分空間から  $C^*$  環への線形写像  $\phi$  が完全正直写像であるとは, 任意の整数  $m$  に対して写像  $\phi \otimes \text{id}_m$  が正直写像であるときにいう; ここに  $\text{id}_m$  は  $m$  次の行列の全体  $M_m$  上の恒等写像である. 完全縮小写像と完全正直写像は互いに緊密な関係にある;  $T_1, \dots, T_n$  が von Neumann の不等式を満たすとは,

$$\phi(p) = p(T_1, \dots, T_n)$$

によって定義される写像  $\phi: \mathcal{P}^n \longrightarrow B(\mathcal{H})$  が完全縮小写像であることに他ならない [8].

定理 2 の証明の概略は次の通りである. 仮定から

$$\phi(p) = p(S_1, \dots, S_m), \quad \psi(q) = q(T_1, \dots, T_n)$$

によって定義される写像  $\phi: \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $\psi: \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  は単位を保存する完全縮小写像である. 従って

$$\tilde{\phi}(\bar{p}_1 + p_2) = p_1(S_1, \dots, S_m)^* + p_2(S_1, \dots, S_m),$$

$$\tilde{\psi}(\bar{q}_1 + q_2) = q_1(T_1, \dots, T_n)^* + q_2(T_1, \dots, T_n)$$

によって定義される写像  $\tilde{\phi}: \mathcal{S}_1 = (\mathcal{P}^m)^- + \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,  $\tilde{\psi}: \mathcal{S}_2 = (\mathcal{P}^n)^- + \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  は完全正直写像である. 仮定から  $\tilde{\psi}$  による  $\mathcal{S}_2$  の像  $\tilde{\psi}(\mathcal{S}_2)$  は  $T_1, \dots, T_n$  によって生成される単射的な von Neumann 環  $\mathcal{R}$  に含まれるから,  $\tilde{\psi}$  は完全正直写像  $\Psi: C(\mathbf{T}^n) \rightarrow \mathcal{R}$  に拡張される.  $\tilde{\phi}(\mathcal{S}_1)$  と  $\mathcal{R}$  は可換だから

$$\Theta(f \otimes g) = \tilde{\phi}(f)\Psi(g), \quad f \in \mathcal{S}_1, \quad g \in C(\mathbf{T}^n)$$

によって定義される写像  $\Theta: \mathcal{S}_1 \otimes_{\max} C(\mathbf{T}^n) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  は完全正直写像である.  $\mathcal{S}_1 \otimes_{\max} C(\mathbf{T}^n)$  が整合的に  $C(\mathbf{T}^{m+n})$  に埋め込まれることから ([8], Exercises 10.6),  $\Theta$  の  $\mathcal{P}^{n+m}$  への制限  $\theta: \mathcal{P}^{n+m} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  は完全縮小写像である. そして,

$$\theta(r) = r(S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n)$$

が成り立つ. このことは  $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n$  が同時ユニタリ伸張をもつことを意味している.

$T_1, \dots, T_n$  が単射的な  $C^*$  環を生成するとしても議論は同様である.

次の系が得られる:

系 1. 可換な縮小作用素  $S_1, \dots, S_m$  は同時ユニタリ伸張をもち,  $T_1, \dots, T_n$  は GCR 縮小作用素で,  $T_i$  と  $T_j$  が複可換 ( $i \neq j$ ),  $S_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) と  $T_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) が複可換であるとする. このとき,  $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n$  は同時ユニタリ伸張をもつ.

ここに, GCR 縮小作用素とは GCR 環を生成する縮小作用素である [4].

系 2. 可換な縮小作用素  $S_1, \dots, S_m$ , 可換なコンパクト縮小作用素  $T_1, \dots, T_n$  は共に同時ユニタリ伸張をもち,  $S_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) と  $T_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) は複可換であるとする. このとき,  $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n$  は同時ユニタリ伸張をもつ.

4. 定理 2 の改良を図りたい.

定理 3. ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の可換な縮小作用素  $S_1, \dots, S_m$ , 可換な縮小作用素  $T_1, \dots, T_n$  は共に同時ユニタリ伸張をもち,  $S_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) と  $T_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) は複可換であるとする.  $\mathcal{K}$  を  $T_1, \dots, T_n$  の極小の同時ユニタリ伸張  $U_1, \dots, U_n$  が作用するヒルベルト空間,  $\mathcal{A}$  を  $U_1, \dots, U_n$  が  $\mathcal{K}$  上の恒等作用素と共に生成する  $C^*$  環,  $V$  を  $\mathcal{H}$  の  $\mathcal{K}$  への埋め込みとすると,  $S_1, \dots, S_m$  が任意の  $V^*AV$  ( $A \in \mathcal{A}$ ) と可換ならば,  $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n$  は同時ユニタリ伸張をもつ.

証明の概略は次の通りである.  $\phi: \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  を

$$\phi(p) = p(S_1, \dots, S_m)$$

によって定義される完全縮小写像,  $\eta: (V^*AV)' \rightarrow \mathcal{A}' \cap \{VV^*\}$  を

$$VR = \eta(R)V, \quad R \in (V^*AV)'$$

を満たす\* 同型写像とする (Arveson [3], Theorem 1.3.1). このとき  $\eta \circ \phi: \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$  は完全縮小写像で,

$$(\eta \circ \phi)(p) = p(\eta(S_1), \dots, \eta(S_m))$$

を満たす. よって  $\eta(S_1), \dots, \eta(S_m)$  は同時ユニタリ伸張をもつ.  $\eta(S_1), \dots, \eta(S_m)$  と  $U_1, \dots, U_n$  は複可換で,  $U_1, \dots, U_n$  は可換な, 従って, 単射的な von Neumann 環を生成する. よって  $\eta(S_1), \dots, \eta(S_m), U_1, \dots, U_n$  は同時ユニタリ伸張をもつ. このことから  $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n$  は同時ユニタリ伸張をもつことがわかる.

$T$  が縮小作用素で, 閉単位円盤  $\mathbf{D}$  の近傍における解析関数  $f_i$  が

$$|f_i(z)| \leq 1, \quad z \in \mathbf{D}$$

を満たすとする ( $1 \leq i \leq n$ ). このとき, 縮小作用素  $T_1 = f_1(T), \dots, T_n = f_n(T)$  は同時ユニタリ伸張をもつことが示される. しかし更に次の定理が成り立つ. その証明は定理 3 の証明と本質的に同じである:

**定理 4.** 可換な縮小作用素  $S_1, \dots, S_m$  は同時ユニタリ伸張をもち, 縮小作用素  $T, T_1, \dots, T_n$  は今述べた通りのものとする. また,  $S_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) は  $T$  と複可換であるとする. このとき,  $S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n$  は同時ユニタリ伸張をもつ.

これから直ぐに次の系が得られる:

**系 3** (cf. [2]). 可換な縮小作用素  $S_1, \dots, S_m$  が同時ユニタリ伸張をもち, 各  $S_1, \dots, S_m$  が縮小作用素  $T$  と複可換であるとする. このとき,  $S_1, \dots, S_m, T$  は同時ユニタリ伸張をもつ.

## References

- [1] T. Andô, On a pair of commuting contractions, Acta Sci. Math. (Szeged) 24 (1963), 88-90.
- [2] T. Andô, Unitary dilations for a triple of commuting contractions, Bull. l'Acad. Polonaise Sci., Sér. Sci. Math., Astr. Phys. 24 (1976), 851-853
- [3] W. B. Arveson, Subalgebras of  $C^*$ -algebras, Acta Math. 123 (1969), 141-224.
- [4] T. Okayasu, On GCR-operators, Tôhoku Math. Journ. 21 (1969), 573-579.
- [5] T. Okayasu, The von Neumann inequality and dilation theorems for contractions, "Op. Theory and Complex Anal.", Sapporo, 1991, Op. Theory Adv. Appl. 59 (1992), 285-291.
- [6] T. Okayasu, On simultaneous unitary dilations for commuting contractions, To appear.
- [7] S. Parrott, Unitary dilations for commuting contractions, Pacif. J. Math. 34 (1970), 481-490.
- [8] V. I. Paulsen, Completely bounded maps and dilations, Pitman Res. Notes Math. Ser. 146, 1986.
- [9] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, 1970.
- [10] N. Th. Varopoulos, On an inequality of von Neumann and application of the metric theory of tensor products to operator theory, J. Funct. Anal. 16 (1974), 83-100.