

学位審査報告書

氏名	福島 竜輝
学位（専攻分野）	博士（理学）
学位記番号	理博第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科 数学・数理解析専攻
（学位論文題目） Replica overlap and covering time for the Wiener sausages among Poissonian obstacles （ポアソン配置された障害物中におけるウィナーソーセージの重なり の体積と被覆時間の評価）	
論文調査委員	主査 吉田 伸生 准教授 熊谷 隆 教授 穴倉 光広 教授

(論文内容の要旨)

主論文: “Replica overlap and covering time for the Wiener sausages among Poissonian obstacles” は Poisson 点過程に従って配置された障害物を避けるように条件付けられた Brown 運動に対し、その軌道に少し幅を付けたいわゆる Wiener sausage の体積の長時間漸近挙動を議論した論文である。これは、Tauber 型定理を通じ、ランダムポテンシャルをもつ Schrödinger 作用素のスペクトルの問題 (Lifshitz tail など) に応用されるなど、広汎な応用を持つ研究課題である。一方、この問題の研究には確率論、解析学にわたる幅広く高度な技術が要求される。

申請者は参考論文の一つにおいて Wiener sausage の体積の精密な長時間漸近評価を与えた。その際、上からの評価で鍵となるのは Poisson 点過程を障害物とする Brown 運動が、時刻 t まで原点付近の比較的狭い球状領域 (半径のオーダーが、通常の $t^{1/2}$ より小さい $t^{\frac{1}{d+2}}$) に閉じ込められていることを示す評価である。これは “confinement property” と呼ばれる評価で、A.-S. Sznitman, T. Povel 及び申請者によるものであるが、証明には “method of enlargement of obstacles” と呼ばれる巧妙な粗視化の手法に加え、Laplacian のスペクトル、容量など、ポテンシャル論に関係した高度な解析的技法が駆使される。申請者は更に、モーメント生成関数を用いた独自の手法で下からの評価を行い、体積の漸近評価を完成させた。

以上のような背景の下、本論文では Wiener sausage の体積の長時間挙動について二つの方向への一般化を議論した。一つ目は、二つの独立な Brown 運動に関する Wiener sausage 達の和と交差がどのような漸近挙動を示すかという問題である。これは、元々独立な二つの粒子の運動が障害物の影響によってどのように変化するかをその軌道の重なり具合から調べようとするものであり、ランダム媒質の研究ではスピングラスの平均場理論などにおいても類似の議論が見られる。二つ目は単独の Wiener sausage による局在領域の被覆時間の評価である。局在球内には「殆んど障害物がない」ことから、領域の被覆にかかる時間は局在球の体積と同じオーダーであると予想される。これを厳密に証明することが二つ目の問題である。

上述の問題について、申請者は以下のような結果を得た。まず一つ目の問題に関して

「二つの独立な Brown 運動に関する Wiener sausage 達の和と交差の体積が漸近的に等しい」

ことを示した。この結果は元は独立な二つの粒子の軌道がほとんど一致していることを示すもので、媒質の影響が粒子の運動に対して支配的であることを意味してい

る。その際、Wiener sausage 達の和の体積の上からの評価は、前述した “confinement property” を二粒子に拡張することにより得られる。更にそれぞれの Wiener sausage 達の体積を個々に漸近評価することで、所期の結果を得るが、これは申請者が参考文献中で用いたモーメント生成関数の方法を二粒子の場合に拡張することにより得られる。

次に二つ目の問題に対しても、

「領域の被覆にかかる時間は局在球の体積と同じオーダーである」

ことを証明した。この際の技術的困難は、次元が3以上の場合、局在球の中にも依然、障害物が存在しうる点である。申請者は、局在球を、もう少し扱いやすい集合 (Laplacian の基底状態が「あまり小さくない」領域) で巧妙に近似した上で、ポテンシャル論の技法を駆使することによりこの困難を克服した。

(論文審査の結果の要旨)

申請者、福島竜輝の申請論文：

Replica overlap and covering time for the Wiener sausage among Poissonian obstacles

の主題は、ランダム媒質中の確率過程という観点から極めて自然で興味深い問題である。また、この問題はランダムポテンシャルをもつ Schrödinger 作用素のスペクトルの問題 (Lifshitz tail など) に応用されるなど、広汎な応用を持つ一方、確率論、解析学にわたる幅広く高度な技術が要求される。

申請論文は、「Poisson 点過程を障害物とする Brown 運動」という研究テーマの中に新たな研究方向を開拓している。その一つが「独立な Brown 運動に関する Wiener sausage 達の交差」を調べることである。これは、元々独立な二つの粒子の運動が、障害物の影響によってどのように変化するかをその軌道の重なり具合から調べようとするものであり、ランダム媒質の研究ではスピングラスの平均場理論などにおいても類似の議論が見られる。しかし、「Poisson 点過程を障害物とする Brown 運動」という枠組みにおいては、先行研究がない新たな方向性である。また、申請論文の中で開拓されたもうひとつの研究方向は「局在領域の被覆時間の評価」である。一般に「有限領域の被覆時間の評価」はブラウン運動やランダムウォークなどで研究されているが、これも「Poisson 点過程を障害物とする Brown 運動」という枠組みにおいては、先行研究がなく、新たな方向性である。

また、申請論文では“method of enlargement of obstacles” と呼ばれる巧妙な粗視化の手法に加え、Laplacian のスペクトル、容量など、ポテンシャル論に関係した高度な解析的技法が駆使されるなかで、申請者独自のアイデアも随所で発揮されている。この点において、申請論文はランダム媒質中の確率過程という研究領域において、新たな方向性の開拓のみならず、技術面での深化も与えた。

申請者は、申請論文の内容を中心に日本数学会、国際研究集会等で研究発表を行った結果、その研究成果は国内だけでなく、海外の研究者達にも既に高い評価を得ている。

上記のように、申請論文は、「Poisson 点過程を障害物とする Brown 運動」、更に一般に「ランダム媒質中の確率過程」という学術領域に全く新しい知見を与えるものである。申請者は大学院在学5年未満ではあるが、特例として博士（理学）の学位を授与するに十分なものであると考え、合格と判定した。