

強制上昇流が局地降雨に与える影響に関する考察

大石 哲・木谷 有吾・中北 英一・池淵 周一・高橋 劭

NUMERICAL APPROACH TO EFFECT OF UPDRAFT ON LOCAL RAINFALL

By *Satoru OISHI, Yugo KITANI, Eiichi NAKAKITA,*
Shuichi Ikebuchi and Tsutomu TAKAHASHI

Synopsis

Cloud development is studied numerically in a deep, two-dimensional cloud model with detailed microphysics to examine effect of an updraft caused by topography on the cumulus cloud. It is found that the initial updraft makes much of steam of cumulus on the developing stage to condense, and it changes much latent heat to sensible heat through condensation process. The stronger initial updraft causes neither stronger nor more amount of rainfall, and it also does not make the cumulus cloud life longer. The strength and the amount of a rainfall is depended on the amount of cloud droplet produced. Finally, it is found that updraft has an effect on cumulus not dynamically but thermodynamically.

1. 緒 論

世界の四大文明がそれぞれ大河川の形成した沖積平野に位置しており、またその恩恵を受けつつ発展してきたのと同様に、日本人は河川が形成した沖積平野を稲作に利用することにより独特の農耕文化を育み、川魚を貴重な蛋白源として取得してきた。また文明が近代化すると共に、河川を、生活用水や工業用水といった水源として、水力発電等を通じて重要なエネルギー源として、そして水上交通によって人や荷物の経路としても活用してきた。更に自然の少なくなった今日の大都市においては、河川は人間にやすらぎを提供する空間として重要な役割を果たしている。

しかし、日本の河川は人類にかけがえのない恩恵を与えるとともに、土石流や洪水などの様々な災害を引き起こしその流域に存在する都市に大きな被害をもたらすこともある。このような災害の一つとしての洪水を考えた場合に、日本の河川の特徴である洪水到達時間が短いこと、築堤河川が多く流速も速いことに起因して、洪水の制御のためにそのインプットである降雨の予測は欠かすことができない。この場合の情報として特に重要になるのは30分～数時間のリードタイムを持つ降雨予測情報であり、これを行うのが短時間降雨予測である。

また、テレメータあるいはレーダー雨量計等によりとらえられた降雨から流出を計算するためには、観測された降雨情報を説明付けし観測されない降雨の情報を補完するために降雨の変換場（たとえば層雲、積乱雲）に関する知識が降雨予測情報と同様に必要となる。それは、一般的にいわれるように水蒸気を降雨に変換する機構に対して山岳地形や氷の層の形成が非常に強い影響を持ち、局地的に豪雨が集中して現象の把握を困難にしているだけでなく、そのような局地的な降雨が流域全体のインプットとして支配的になり、流出計算の遂行を困難にしているからである。

これらの問題へのアプローチの一つとして航空機やゾンデを用いた観測が考えられるが、積雲の寿命が数 10 分から数時間と短いことと、地理的スケールが数 km から数 10km と小さいことが問題となって十分なデータを得られていないのが現状である。そこで積雲による対流性降雨のメカニズムを掴むために計算機を用いて数値実験を行うことが非常に有効であるが、局地降雨の発生源となるような積雲を扱うための雲物理過程を導入したモデルは非常に少ない。

このような現状にたつて本研究では Takahasi らの開発した 2 次元対流雲モデルをベースとしたモデルにより数値実験を行う。このモデルの大きな特徴はパラメタリゼーションされていない詳細な雲の微物理過程を導入していること、雹、霰、氷晶という氷の相を持つ降水粒子を持つことである。この 2 点によって、Warm Rain だけでなく Cold Rain の生長、発達、消滅過程のシミュレーションを物理的根拠を持って行うことが可能であり、各過程での雹、霰、氷晶および雨、霧等の降水粒子の生産量を出力することが可能である。これらの特徴を活かして、観測によって解明することが困難である山岳地域における局地的対流性降雨のメカニズムを解明することが本研究の目的である。

地形が積雲の発達に与える影響を調査する第一段階として地形によって生じたとみなすことができる初期鉛直上昇流（下層収束：Updraft）を与え、これが積雲の発達に与える影響を調査する。具体的には、初期鉛直上昇流がある場合とない場合、ある場合についてはその大きさを変化させることによって積雲の生じ状況、成長のスピードとその継続時間、地表面での降雨強度、積雲内での鉛直上昇流の時系列に与える影響を調査する。

2. 計算の諸条件

2.1 2 次元対流雲モデルの概要

モデルに導入されている微物理過程は Fig. 1 に示すとおりであり、その解説は高橋・阿波田¹⁾および高橋²⁾に詳しい。ここで、Vali の凍結確率とは Vali³⁾ による凍結確率のことであり、氷点下での水滴のうち、凍結するものと過冷却水滴として存在するものの割合を表している。着氷過程とは水滴と氷晶（あるいは雹、霰）が衝突して、水滴が氷晶の大きさを増大させる過程のことである。大きな水滴と小さな氷晶の衝突により、大きな水滴は凍結して雹、霰を生成する。逆に小さな水滴と大きな氷晶の衝突により、氷晶は厚さを増加する。衝突併合過程とは氷晶同士の衝突過程であり、この過程により雪が形成される。観測によると直径 1.5cm の雪片にはおよそ直径 2 mm 程度の氷晶が 100 個ほど併合しているという。大気中の凝結核は雲の成長が早い大陸性大気を想定して、500 [個/cm³] であり、氷晶核は 1 [個/cm³] である。

モデル中の基礎式を付録に、式中の変数が意味する物理量を Table 1 に示す。基礎式中の運動方程式はコリオリ力を無視し浮力を考慮したものである。これらの数値的解法として、運動方程式、温位の保存式、水蒸気混合比の保存式、雲粒核の数密度の保存式、氷晶核の数密度の保存式、2 次氷晶芽の数密度の保存式、水滴の数密度の保存式、霰の数密度の保存式、雹の数密度の保存式、氷晶の数密度の保存式を prognostic に解き、無次元圧力の Poisson 方程式を diagnostic に解く方法を用いた。

2.2 初期条件

風速は連続式

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

を満たさなければならないので流れ関数を用いて左右対称状の Circulation 状としてあたえる。その流れ関数 Φ を次に示す。

$$\Phi = A \times 10^6 \sin \frac{\pi(x-2)}{(X-2)/2} \sin \frac{\pi(z-1)}{Z} \dots\dots\dots (2)$$

ただし A は風速を変化させる係数, X は計算領域全体の幅に相当する格子点番号 (=55), Z は初期風速をあたえる領域の上限に相当する格子点番号である。

また, 初期風速 u_0, w_0 は次の式から計算する。

$$\rho_0 u_0 = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

$$\rho_0 w_0 = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dots\dots\dots (4)$$

初期風速を与えた状態は地形等の影響を受けて大気中に偶然生じたものと考え, 初期風速を最初に与えた後は強制的な外力によって風を維持するような状態にはしない。すなわち, 初期の下層収束 (地形によって生じたものとみなすことのできる鉛直風速) は **Fig. 2** のようになる。それは, 積雲が成長するきっかけとしての鉛直風の役割を調べるためである。

計算時間を短縮するために雲が生成しやすい条件にする事を目的に, 気温は夏季における熱帯の大気の平均的な状態 (Yamazaki⁴⁾) を, 雲底がおおよそ高度 600m, 雲頂が高度約 8 km になるように若干の修

Table 1 Meanings of variables in basic equations

Variables	Meaning
(u, v, w)	Wind velocity vector
C_p	Specific heat at constant pressure
R_d	The gas constant for dry air
π	$= (p/p_0)^{R_d/C_p}$
p	Atmospheric pressure
ρ	Density of air
g	Gravitational acceleration
θ	Potential temperature
Q_v	Mixing ratio of water vapor in the air
Q_w	Summation of all precipitation particle
T	Temperature
$\delta M_c / \delta t$	Ratio of variation from gas to liquid
$\delta M_s / \delta t$	Ratio of variation from gas to solid
$\delta M_l / \delta t$	Ratio of variation from liquid to solid

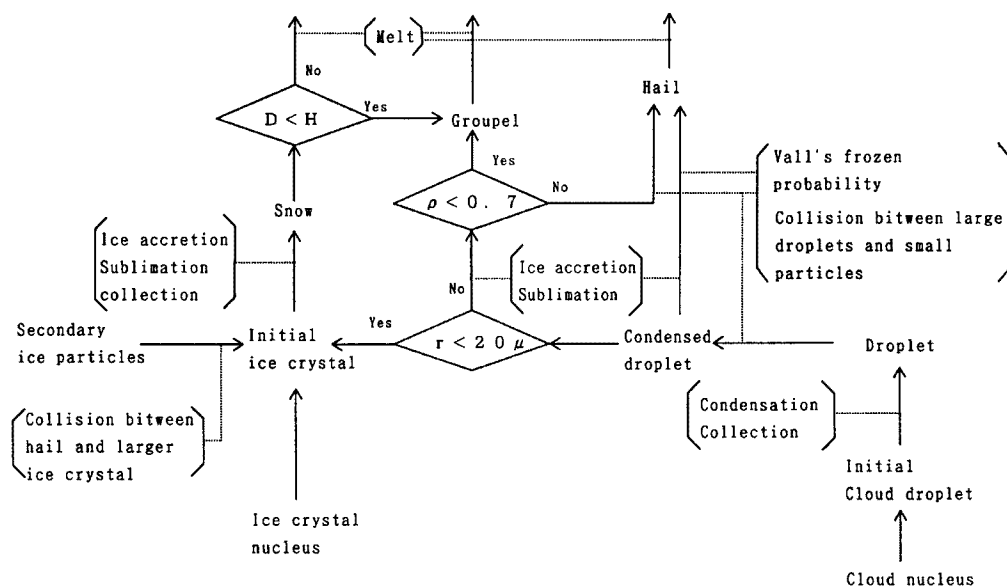


Fig. 1 Microphysics in the cumulus model.

正したものをを用いている。温度の鉛直分布を **Fig. 3a** に示す。地表面の気温は 300 [K] で、高度 1.4km までは乾燥断熱減率 9.76 [K/km] に従い気温が低下する。高度 1.4km から 6.2km の間の温度減率は 9 [K/km]、6.2km から 7.2km までは 3 [K/km]、高度 7.2km 以上では 1.5 [K/km] である。0 [°C] 層は高度 3.4km、雲底の気温は +23 [°C] となる。

空気中の水蒸気含有量を示す水蒸気混合比は実際に雲が生成する状況に即して高度 1.4km までを一定値とし、その後高度とともに減少するように与える。飽和水蒸気混合比は気温とともに減少するので湿度の鉛直分布は **Fig. 3b** のようになる。湿度は地表面で 87% とし、高度 1.4km で 99% に達する。高度とともに湿度は低くなるが勾配は緩やかで上端でも 67% である。この初期状態は条件付き不安定な成層をしている。初期状態のエマグラムを **Fig. 4** に示す。

一般場の他に雲を作るための初期の刺激として計算領域の中央に飽和した空気塊を与える。これはモデル中の凝結核の活性化 (**Fig. 1** の 1 → 2) について、凝結核が活性化し雲粒を作る過程は、それだけで膨大な計算機資源を要するためにあらかじめ計算された粒径分布を用いているためである。初期の刺激を与えた場合の湿度の 2 次元分布を **Fig. 5** に示す。

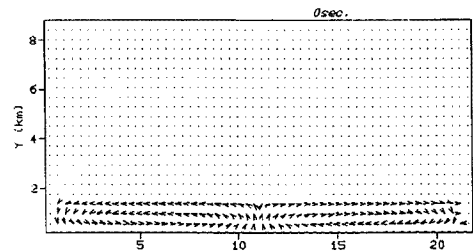


Fig. 2 Initial updraft.

2.3 境界条件

上下端では温位、水蒸気混合比は初期値に固定、鉛直風速は 0 とする。雨滴、氷晶などの降水粒子は下端で 0 とし、地表面に到達した雨は系外へ出るようにした。

左右端は水平風速 u について Orlanski open boundary condition⁵⁾ を用いている。これは

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_{ph} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

において領域の内部の値から局所的に位相速度 C_{ph} を決定するものである。ここで位相速度 $C_{ph} = C_x$ は次式で計算する

$$C_x = - \frac{u_{iM-1}^{t+1} - u_{iM-1}^{t-1}}{0.5 \cdot (u_{iM-1}^{t+1} + u_{iM-1}^{t-1}) - u_{iM-2}^t} \frac{\Delta x}{2 \Delta t} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで γ は現在の時刻ステップ、 $\gamma-1$ は 1 ステップ前、 $\gamma+1$ は 1 ステップ後を表す。

その他の変数は境界での流れが inflow か outflow かで次のように決定される。

inflow の場合

$$A_{iM}^* = A_{iM-1}^* = A_{iM0}^* \quad \dots\dots\dots (7)$$

outflow の場合

$$\frac{\partial A_{iM}^*}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

すなわち

$$A_{iM}^* = A_{iM-1}^* \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで A^* は鉛直風速 w と全てのスカラー変数, A_{im0}^* はその境界での初期値である。

3. 計算結果および考察

3.1 降雨の発達段階

シミュレーションは Eq. (2) の係数を変化させることで初期鉛直上昇流を変えて3通り行なった。それぞれの場合の初期鉛直風速の最大値は

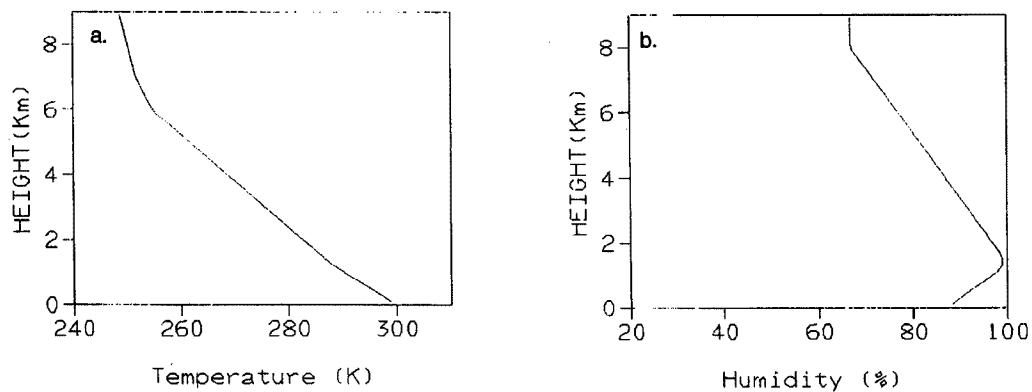


Fig. 3 Vertical distribution of temperature and humidity.

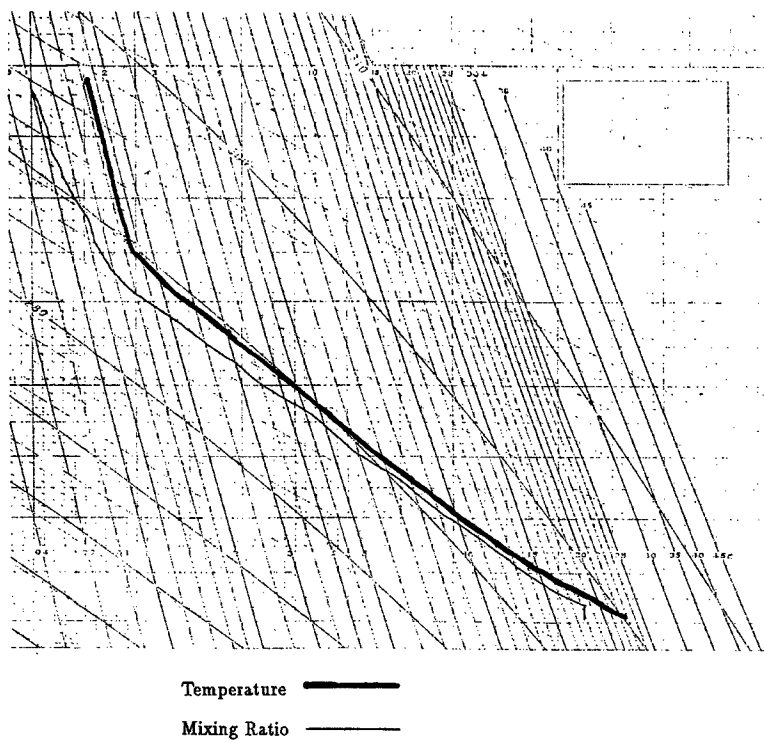


Fig. 4 Initial emagram.

Case 1. 0[cm/s]

Case 2. 20[cm/s]

Case 3. 40[cm/s]

である。

以下では、Case 1. と Case 2. を山岳地形の影響により鉛直上昇流が生起された場合とそうでない場合とみなし、これらの比較から初期鉛直上昇流が積雲の生起状況、成長のスピード、寿命、地表面降雨強度、鉛直上昇流の継続時間に与える影響を考察し、Case 2. と Case 3. を比較することで鉛直上昇流の強さが上述の項目に与える影響を考察する。

考察の際に重要となる積雲の発達段階について小倉⁶⁾を引用して簡単に説明する。

発達期 (developing stage)

雲が最大雲頂に達するまでの期間である。雲全体が上昇気流で占められ、雲内部の気温は水蒸気が凝結するときの潜熱によりその周囲の気温より 0 ~ 6℃ 高い。降水粒子の成長が続くが上昇気流に支えられて地上には到達しない。この段階においては活性化した凝結核を中心として水蒸気が凝結し、雲粒 (2 [μm] ~ 32 [μm]) が生成する。その後衝突併合過程によってより粒径の大きい霧 (32 [μm] ~ 320 [μm]) や、雨粒 (320 [μm] ~) 等に成長する。0℃ 層よりも高く上昇した粒子は Vali の凍結確率に従って凍結し、雹が生成される。

成熟期 (mature stage)

降水粒子の数と大きさが増すにつれて上昇気流では支えきれなくなり、落下を始める。このため雲の内部に下降気流が発生し、地上では雨が降り出す。この下降気流によって上昇気流の根が断ち切れ、上昇気流は次第に減衰する。また、上空の圏界面付近の安定層にまで雲頂が達すると、それ以上の高さには成長できなくなり、横に広がり、“かなとこ雲 (Anvil)” が成長する。

この段階では活性化した氷晶核に水蒸気が昇華して氷晶が生成され、上昇気流が粒径を増した雨粒を支えることができなくなり、雨滴は落下を始めているが、まだ地表には達しない。雨が降ると雨粒の落下によって雲の下層の一部で下降気流を見ることができる。雲の上部は上昇を続け、安定層付近にまで達している。落下して 0℃ 層よりも下層に達した雹は融解し、強い降雨域を形成する。その後、雹自身や雹が融解した水滴の落下によって下降気流は強くなり、上昇気流の根は断たれて下降気流が卓越し、初期においては風の収束域であった領域中央の地表付近は風の発散域となる。

消滅期 (dissipating stage)

雲の中の上昇気流がなくなる。水滴の蒸発による潜熱の吸収により冷却され雲全体で下降気流が卓越する。そのため、上空に蓄えられていた降水粒子が落下を始め多量の降水となって地上に達する。

3.2 考 察

Fig. 6 に地上における降雨強度の水平 v.s. 時間分布を示す。Case 1. の降雨強度分布は空間的にも狭い範囲に限られ、強度的にもそれほど大きい強度を見ることはできない。Case 2. では降雨の初期においては Case 1. と変わらないが、ピーク時の降雨強度は非常に強く、強い降雨強度を示す範囲も広い。また、降雨域も広がっている。Case 3. では降雨の広がりは Case 2. に比べて狭くなる。ただし、降雨強度の大きい部分の面積は大きく変わらない。図中には示していないが、総降雨量は大きい方から Case 2. Case 3. Case 1.

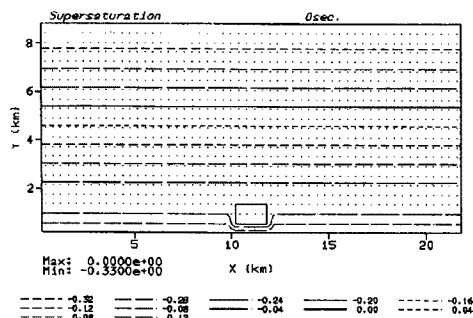


Fig. 5 Two dimensional distribution of initial supersaturation.

の順である。ただし、Case 2. と Case 3. の絶対値はそれほど変わらない。また、Case 3. においては降雨の降り始めにおいて非常に強い降雨を見ることができ、Case 1. や Case 2. とは様子を異にしている。そこで計算による積雲の発達過程を詳細に検討することで、このような降雨強度分布が出力された原因を探り、地形によって生じられたとみなすことができる鉛直上昇流が、降雨強度分布あるいは積雲の発達過程に与える影響について考察する。

モデル中には初期鉛直上昇流を維持させるような力学過程を導入していないので、この場合の鉛直上昇流の影響は発達期の雲に表れる。発達期の雲に表れた影響が次々に積雲の成長過程に影響を与えて降雨強度分布を変えるまでにいたったと見ることができる。発達期の雲 ($t = 800$ [sec]) の雲粒 ($2 [\mu\text{m}] \sim 32 [\mu\text{m}]$; 太線) および霧 ($32 [\mu\text{m}] \sim 320 [\mu\text{m}]$; 細線) の 0.1 [g/kg] の等値線を表したのが Fig. 7 である。ただし、a は Case 1., b は Case 2., c は Case 3. のものを表しており、矢印は風速ベクトルを表している。また、Fig. 10 は同時時間の気温の一般場からの変化を表している (a, b, c は Fig. 7 と同様)。Fig. 11 は領域内の降水粒子 (水滴, 霰, 雹, 氷晶) の量の時系列を表示したものである。これらの図から発達期の雲粒量, $t = 800$ [sec] における鉛直風速, 領域の大きさおよび雲の内部の気温は初期鉛直上昇流の強さに従って、Case 3., Case 2., Case 1. の順で大きいことがわかる。

発達期の雲の内部の気温が高いのは、雲粒の生成により潜熱が放出されたためである。そのために気塊は軽くなり、大きな浮力を持つようになる。そして上昇に従いさらに多くの雲粒を生成するようになり、雲の内部の降水粒子の数を増して、Fig. 1 で表した過程を活発にする。このような正のフィードバックにより成熟期の雲の雲頂高度は Case 3., Case 2., Case 1. の順に高くなることが Fig. 8 により示される。ここで、雨滴 ($320 [\mu\text{m}]$ ~) の領域を点で塗りつぶし、雹の領域を横線、氷晶の領域を縦線で塗りつぶしている。

Case 2. では雹が、Case 3. では氷晶が大きく発達していることが Fig. 8 からわかる。図中では煩雑となるために表していないが、このような現象が起こる原因は成熟期の雲の内部に鉛直流の発散域がある事があげられる。それぞれの降水粒子は層を成しており、発散域のある降水粒子の層が大きく発達することになる。この発散域は次のようにして生じされると考える。発達期の雲が上昇することによって、そのすぐ上方の気塊も上昇する。この気塊は飽和に達していないために乾燥断熱過程に従って気温が低下する。大気は条

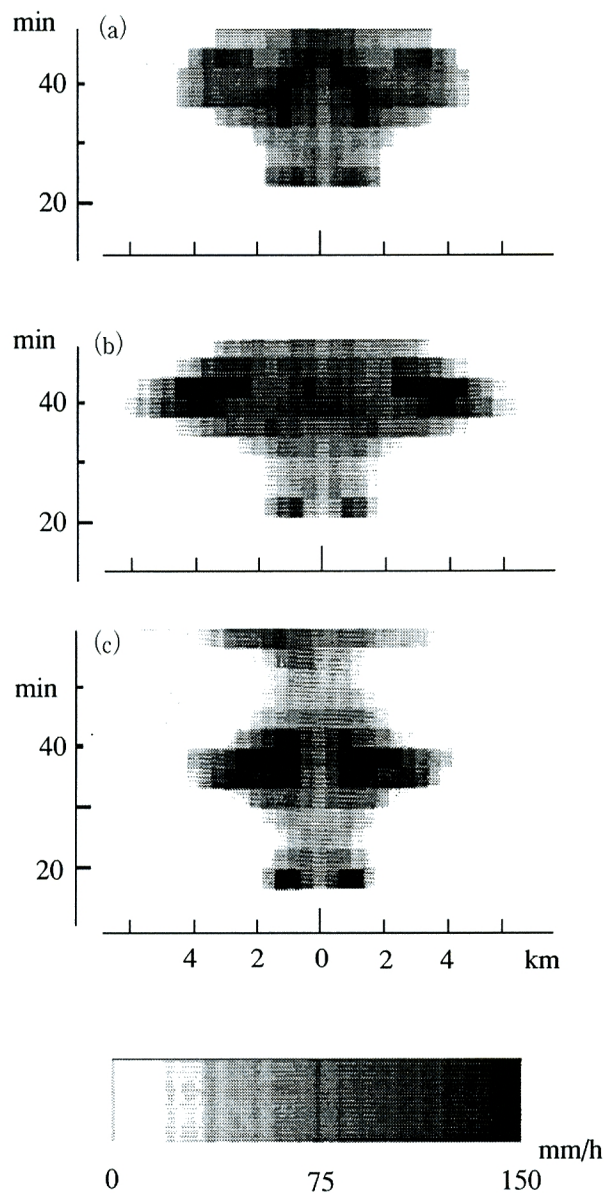


Fig. 6 Time series variation of rainfall intensity. (a) Case 1. (b) Case 2. (c) Case 3.

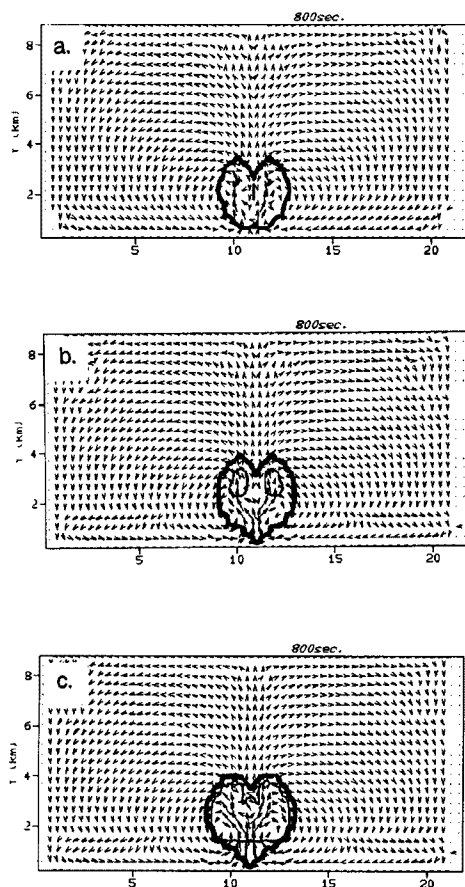


Fig. 7 Contour of cloud particle after 800 [sec]. Waid line shows cloud droplet, and coarse line shows drizzle. Arrow shows wind vector. (a) Case 1. (b) Case 2. (c) Case 3.

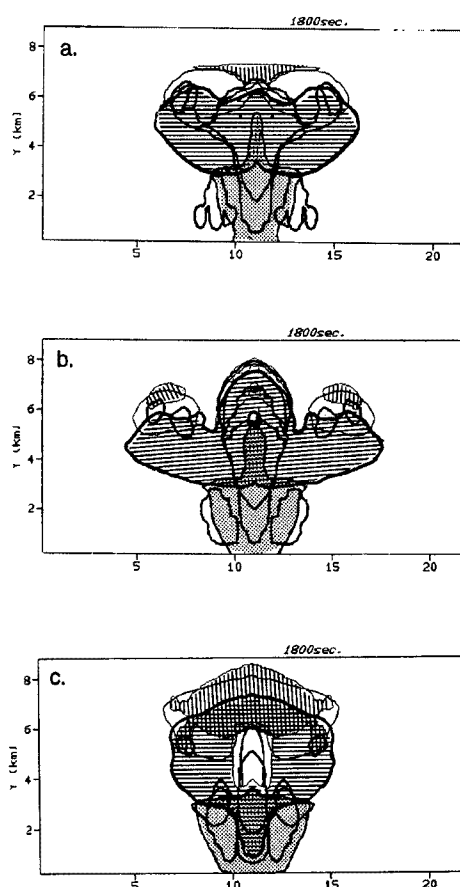


Fig. 8 Contour of cloud particle after 1800 [sec]. Dotted area shows rainfall, horizontal pattern area shows hail and vertical pattern area shows ice crystal. (a) Case 1. (b) Case 2. (c) Case 3.

件付き不安定（乾燥断熱過程に対しては安定）な状態を与えているのでこの気塊の気温は周囲の気温よりも低くなる。こうして雲の上方に低温域が形成される。この低温域は周囲の空気よりも密度が大きく重いので負の浮力が働き下降しようとする。上昇しようとする雲と、下降しようとする低温域がぶつかり、上昇流が弱い場合には雲は上方に成長する事ができなくなり水平方向に広がり始め上昇流の発散域を生ずる。

鉛直流の発散域の影響で水平方向に広がった電は、それを支える上昇流がないため空中にとどまることができずに落下し、雨粒域に降水粒子を供給する。それ以前に蓄えられた電が一時に降雨に変換されるので、この時に強い降雨が生起する。Fig. 9b では電の落下に伴って、下降流が生じ降雨域に降水粒子を供給している様子を見ることができる。

一方 Case 3. では氷晶の領域が大きく発達している。氷晶の終端速度は電の終端速度よりもかなり小さい (1/7 以下) ので上昇気流から遠く離れて広く分布してもなかなか落下せず、下降気流を引き起こすことが

ないので水蒸気を長時間雲内に留めておくことが可能である。この場合、電の層は大きく発達していないので上昇流により空中に維持することができる。そのため、一時に降雨とならないので、降雨域は Case 2. に比べて狭く、降雨量も大きくなってはいない。しかし、雲の成長が早く凝結量も多いため、雨滴が早く成長して積雲の成熟期の初期に強い降雨が生起する。Fig. 11c から $t=1000$ [sec] において霧が雨滴に変換されて強い降雨を生起していることがわかる。

氷晶は雲の発達過程に対しても影響を与える。第一に氷晶は過冷却水滴との衝突や、2 次氷晶芽の生成等の氷晶自身以外の降水粒子の成長も促す。したがって、氷晶が多いと他の降水粒子の成長も促進され、最終

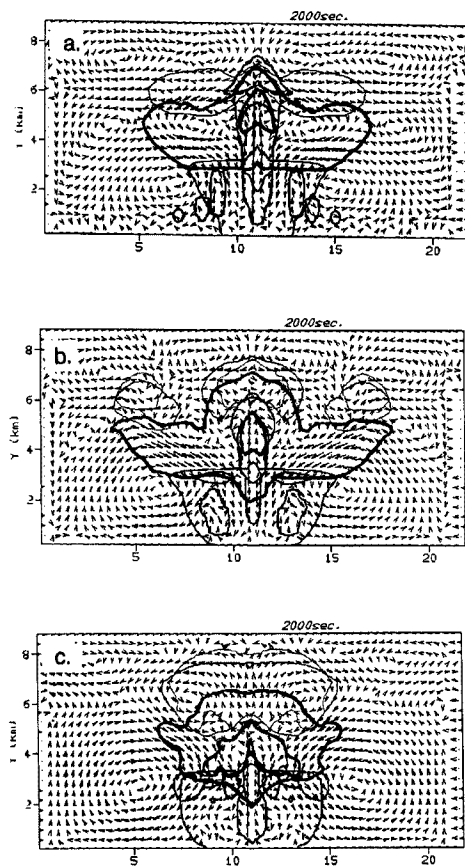


Fig. 9 Contour of cloud particle after 2000 [sec]. Arrow show wind vector.
(a) Case 1. (b) Case 2. (c) Case 3.

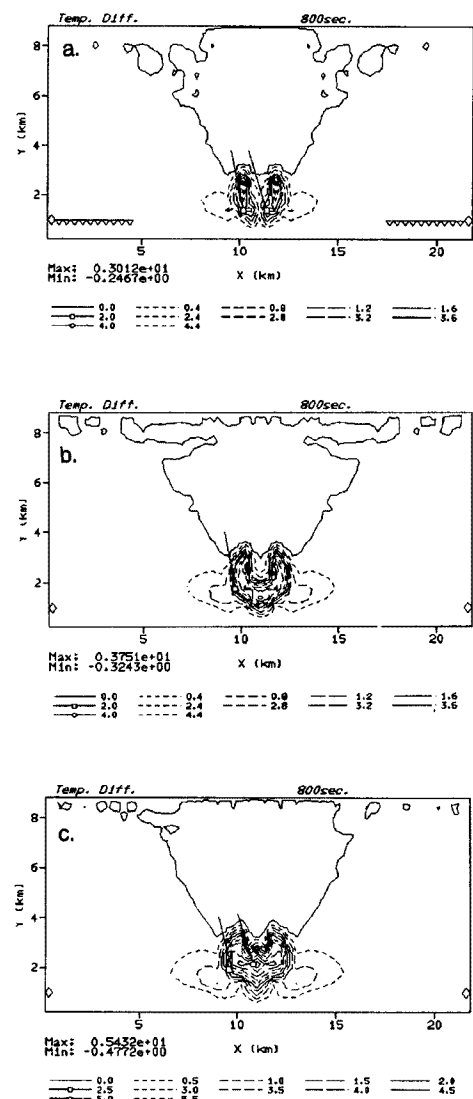


Fig. 10 Distribution of difference of temperature from initial temperature distribution.
(a) Case 1. (b) Case 2. (c) Case 3.

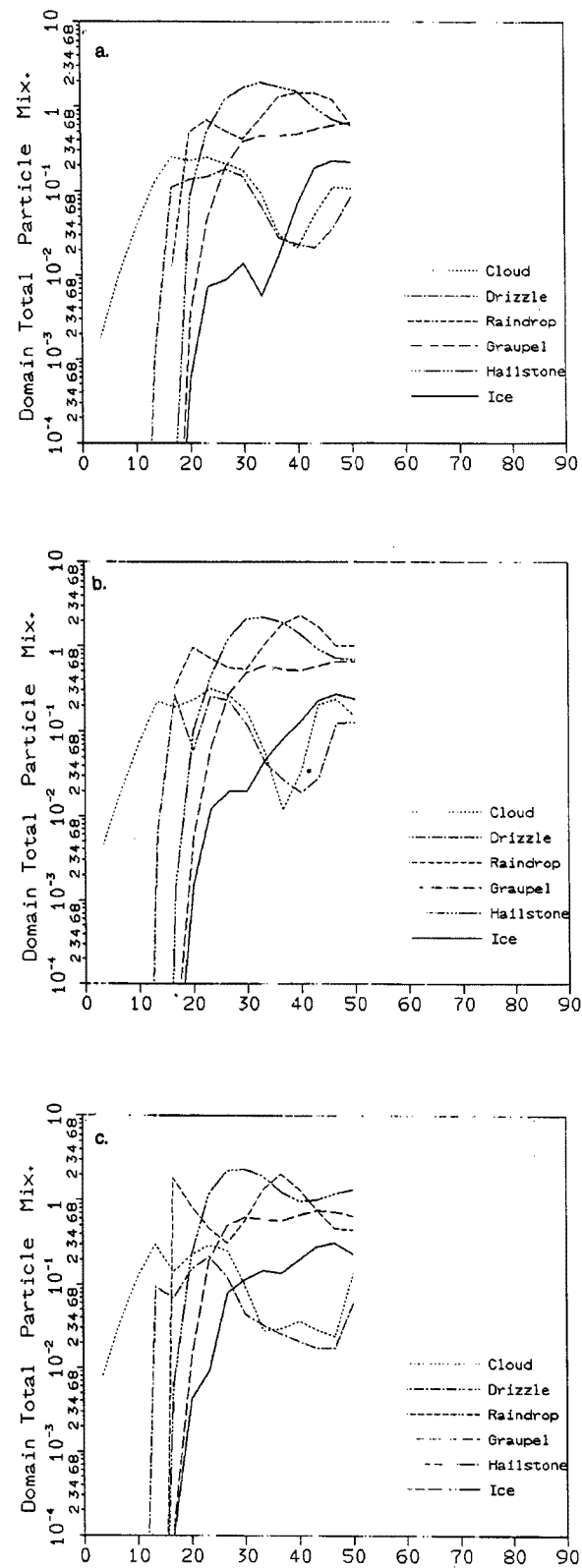


Fig. 11 Production of each cloud particle. (a) Case 1. (b) Case 2. (c) Case 3.

的な各降水粒子の生産量が多くなる。第二に氷面に対する飽和水蒸気混合比が氷面に対する飽和水蒸気混合比よりも小さい。したがって氷晶は水滴よりも容易に、水蒸気を取り込むことができる。

以上まとめると、次のようになる。地形によって生起されたとみなすことのできる鉛直上昇流は、発達期に凝結する降水粒子の量を増加させる。積雲の発達期に凝結する降水粒子の量が多いほど、潜熱の放出による気温上昇を招き、積雲のその後の発達に対して正のフィードバックを持つようになる。このことから初期鉛直上昇流はその後の積雲の発達に対して大きく影響している。水蒸気が凝結（昇華）して降水粒子となるには強い上昇流が必要であるが、上述の理由により積雲の発達期に凝結する降水粒子の量が多いほど、強い上昇流を生起することができる。下層の湿った空気を氷晶が生起される層の高度まで持ち上げることができるような強い上昇流が存在する積雲では、水蒸気は容易に氷晶となり、空中に留まってなかなか落ちてこない。しかし、上昇流がそれほど強くない積雲では雹の層が大きく発達し、下降気流を生起すると共に、降水粒子の供給源となって強い地上降雨を引き起こす。その結果、初期鉛直上昇流による積雲の発達が雹を大きく発達させるようになったときには非常に強い降雨を生起する積雲となることが示された。

4. 結 論

地形が与える積雲の発達過程に及ぼす影響を調査する第一段階として地形によって生起されたと見なすことのできる初期鉛直上昇流を与え、その効果を調査した。その結果、次のような結論を得た。

1. 初期鉛直上昇流は発達期の積雲において多くの水蒸気を凝結させることに有効である。この発達期の雲が潜熱の放出により多くのエネルギーを持つことができれば、正のフィードバックによってその後の積雲の発達に伴って水蒸気が降水粒子に変換される効率が高くなる。
2. 降水効率に関しては初期鉛直上昇流が必ずしもプラスに作用するわけではない。なぜなら初期鉛直上昇流が強いと上述したように降水粒子への変換は活発になるが、氷晶などの密度の軽い粒子の割合が高くなるので地上に落下せずに蒸発してしまうこともあるからである。
3. 雲の寿命、鉛直上昇流の継続時間に対しても同様で、初期鉛直上昇流はこれらの期間を延長する効果を持つとは限らない。なぜなら効率よく水蒸気を降水粒子に変換すればそれだけ雲内における降水粒子の重量の総和が大きくなり、特に氷晶などの密度の軽い降水粒子を生成できる程度に鉛直流の強度を持たない場合には、降水粒子は自重のために落下し始め下降気流を発生させるからである。

本研究によって明確になった事実は初期鉛直上昇流が積雲の発達に与える影響は、上昇気流が下層の気塊をより高高度にまで吹き上げるという直接的かつ力学的な影響ではなく、下層に広く分布する水蒸気をより小さな領域に集約する事によって潜熱という積雲発達に利用できるエネルギーの収束をもたらすという間接的かつ熱力学的な影響であるということである。

したがって、局地降雨予測を行うためには力学的な気象要素が、どのように熱力学的に作用し、雲の微物理過程に影響するかを知ることが重要であることを理解することができた。

以上で本論文の結論とする。

参 考 文 献

- 1) 高橋勲・阿波田康裕：詳細な雲の微物理過程を導入した二次元積雲の数値実験，京都大学防災研究所年報，第36号B-2，1993，pp.189-217
- 2) 高橋勲：雲の物理，東京堂出版，1987.
- 3) Vali, G. : Ice nuclei relative to formation of hail, Sci. Rept. MW-58, Stormy Weather Group, McGill University, Montreal, Canada, 1968, pp.51.
- 4) Yamazaki, M. : A Further Study of the Tropical Cyclone without Parameterizing the Effects of

Cumulus Convection, Paper in Meteorology and Geophysics 34, 1983, pp.221-260

- 5) Orlanski : A Simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows, J. Comp. Phys., 21, 1976, pp.251-269.
- 6) 小倉義光：一般気象学，東京大学出版会，1984，pp.208-211
- 7) Soong, S and Y. Ogura : A Comparison between Axisymmetric and Slab-Symmetric Cumulus Cloud Models, J. Atmos. Sci., 30, 1974, pp.879-893.

付録 Basic Equations

Equation of Continuity

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w) = 0 \quad \dots\dots\dots (\text{付. 1})$$

Momentum equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 uw) \right] - C_p \theta_0 \frac{\partial \pi'}{\partial x} + F_x, \quad \dots\dots\dots (\text{付. 2})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 vw) \right] - C_p \theta_0 \frac{\partial \pi'}{\partial y} + F_v, \quad \dots\dots\dots (\text{付. 3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial y}(vw) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w^2) \right] - C_p \theta_0 \frac{\partial \pi'}{\partial z} + F_z \\ & + g \left(\frac{\theta'}{\theta_0} + 0.61 Q'_v - Q_w \right) \quad \dots\dots\dots (\text{付. 4}) \end{aligned}$$

where $-$, which should be head of variables, are omitted, and F_i are

$$\begin{aligned} F_x = & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ F_v = & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial \rho w}{\partial y} \right), \\ F_z = & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Eddy diffusivity

$$\begin{aligned} K_m = & (C\Delta)^2 \left[A_1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho w}{\partial z} \right)^2 \right] \right) \right. \\ & \left. + A_2 g \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\theta'}{\theta} - 0.61 Q'_v + Q_w \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \dots\dots\dots (\text{付. 5}) \end{aligned}$$

where $A_1=1$, $A_2=0$, $C=0.40$ (from Soong and Ogura⁷⁾)

Poisson Equation of π

$$\begin{aligned}
C_p \theta_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \pi' &= \frac{\partial}{\partial x} \left[F_x - \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[F_y - \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v \right] \\
&+ \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[F_z - \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho w \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left[g \left(\frac{\theta'}{\theta_0} + 0.61 Q' v - Q_w \right) \right] \\
&- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (\text{付. 6})
\end{aligned}$$

where, F_x, F_y, F_z are same as those of the momentum equation.

Thermodynamic equation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \theta') + \frac{\partial}{\partial y} (v \theta') + \frac{\partial}{\partial z} (w \theta') \right] \\
&+ \frac{\theta_0}{C_p T_0} \left(L_c \frac{\delta M_c}{\delta t} \right) + \left(L_s \frac{\delta M_s}{\delta t} \right) + \left(L_f \frac{\delta M_f}{\delta t} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial \theta'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (\text{付. 7})
\end{aligned}$$

Equation of mixing ratio

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_v}{\partial t} &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} (u Q_v) + \frac{\partial}{\partial y} (v Q_v) + \frac{\partial}{\partial z} (w Q_v) \right] \\
&- \left[\frac{\delta M_c}{\delta t} + \frac{\delta M_s}{\delta t} \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial Q_v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_m \frac{\partial Q_v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial Q_v}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (\text{付. 8})
\end{aligned}$$

Equation of density of cloud nucleus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\text{CN}}^*}{\partial t} &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} (u f_{\text{CN}}^*) + \frac{\partial}{\partial y} (v f_{\text{CN}}^*) + \frac{\partial}{\partial z} (w f_{\text{CN}}^*) \right] \\
&+ (\Delta f_{\text{CN}}^*)_{\text{evp}} - (\Delta f_{\text{CN}}^*)_{\text{n}} \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial f_{\text{CN}}^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial f_{\text{CN}}^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_h \frac{\partial f_{\text{CN}}^*}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (\text{付. 9})
\end{aligned}$$

where, f_{CN}^* is f_{CN}/ρ_a , $(\Delta f_{\text{CN}}^*)_{\text{evp}}$ is a ratio of creation through evaporation, $(f_{\text{CN}}^*)_{\text{n}}$ is a ratio of consumption through nucleation, and $K_h = 3 \times K_m$.

Equation of dencity of ice creastal nucleus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\text{ci}}^*}{\partial t} = & \left[\frac{\partial}{\partial x}(uf_{\text{ci}}^*) + \frac{\partial}{\partial y}(vf_{\text{ci}}^*) + \frac{\partial}{\partial z}(wf_{\text{ci}}^*) \right] \\
& + (\Delta f_{\text{ci}}^*)_{\text{evp}} - (\Delta f_{\text{ci}}^*)_{\text{n}} \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial f_{\text{ci}}^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial f_{\text{ci}}^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_h \frac{\partial f_{\text{ci}}^*}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (\text{付. 10})
\end{aligned}$$

where, f_{ci}^* is f_{ci}/ρ_a , $(\Delta f_{\text{ci}}^*)_{\text{evp}}$ is a ratio of creation through evaporation of graupel, hail and snow, $(\Delta f_{\text{ci}}^*)_{\text{n}}$ is a ratio of consumption through nucleation.

Equation of dencity of secondary ice particles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\text{cng}}^*}{\partial t} = & \left[\frac{\partial}{\partial x}(uf_{\text{cng}}^*) + \frac{\partial}{\partial y}(vf_{\text{cng}}^*) + \frac{\partial}{\partial z}(wf_{\text{cng}}^*) \right] \\
& + (\Delta f_{\text{cng}}^*)_{\text{mul}} - (\Delta f_{\text{cng}}^*)_{\text{n}} \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial f_{\text{cng}}^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial f_{\text{cng}}^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_h \frac{\partial f_{\text{cng}}^*}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (\text{付. 11})
\end{aligned}$$

where, f_{cng}^* is f_{cng}/ρ_a , Δf_{cng}^* is a ratio of creation through ice crystal multiplication, $(\Delta f_{\text{cng}}^*)_{\text{n}}$ is a ratio of consumption through nucleation.

Equation of dencity of cloud droplet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_w^*}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial}{\partial x}(uF_w^*) + \frac{\partial}{\partial y}(vF_w^*) + \frac{\partial}{\partial z}(wF_w^*) \right] \\
& + (\Delta F_w^*)_{\text{N}} + (\Delta F_w^*)_{\text{C}} \\
& + (\Delta F_w^*)_{\text{IN}} + (\Delta F_w^*)_{\text{GN}} + (\Delta F_w^*)_{\text{HM}} \\
& - (\Delta F_w^*)_{\text{E}} - (\Delta F_w^*)_{\text{V}} - (\Delta F_w^*)_{\text{IR}} \\
& - (\Delta F_w^*)_{\text{GR}} - (\Delta F_w^*)_{\text{HR}} + (\Delta F_w^*)_{\text{CF}} \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial F_w^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial F_w^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_h \frac{\partial F_w^*}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (\text{付. 12})
\end{aligned}$$

where, $F_w^* = F_w/\rho_a$, ΔF_w^* s mean ratio of creation and consumption. Each subscripts mean its effective process, nucleation (N), condensation (C), ice/graupel/hail melting (IM, GM, HM), evaporation (E), freeze (V), ice/graupel/hail accretion (IR, GR, HR), collision with hail (CF).

Equation of dencity of graupel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_g^*}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial}{\partial x}(uF_g^*) + \frac{\partial}{\partial y}(vF_g^*) + \frac{\partial}{\partial z}(wF_g^*) \right] \\
& + (\Delta F_g^*)_S + (\Delta F_g^*)_{GR} + (\Delta F_g^*)_{CF} \\
& + (\Delta F_g^*)_{ICVG} + (\Delta F_g^*)_{HCVG} \\
& - (\Delta F_g^*)_E - (\Delta F_g^*)_{GMLT} \\
& - (\Delta F_g^*)_{GCVI} - (\Delta F_g^*)_{GCVH} \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial F_g^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial F_g^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_h \frac{\partial F_g^*}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (\text{付. 13})
\end{aligned}$$

where, F_g^* is F_g/ρ_a , ΔF_g^* s mean ratio of creation and consumption. Each subscripts mean its effective process, sublimation (**S**), ice, accretion (**GR**), collision with ice crystal (**CF**), conversion from snow and hail, (**ICVG**, **HCVG**), evaporation (**E**), melting (**GMLT**), conversion to snow and hail (**GCVI**, **GCVH**).

Equation of dencity of hail

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_h^*}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial}{\partial x}(uF_h^*) + \frac{\partial}{\partial y}(vF_h^*) + \frac{\partial}{\partial z}(wF_h^*) \right] \\
& + (\Delta F_h^*)_S + (\Delta F_h^*)_{HR} \\
& + (\Delta F_h^*)_V + (\Delta F_h^*)_{CF} \\
& + (\Delta F_h^*)_{GCVH} - (\Delta F_h^*)_{ICVH} \\
& - (\Delta F_h^*)_E - (\Delta F_h^*)_{HMLT} \\
& - (\Delta F_h^*)_{HCVG} \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial F_h^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial F_h^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_h \frac{\partial F_h^*}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (\text{付. 14})
\end{aligned}$$

where, $F_h^* = F_h/\rho_a$, ΔF_h^* s mean ratio of creation and consumption. Each subscripts mean its effective process, ice accretion (**HR**), collition with cloud droplets (**CF**), conversion to graupel (**HCVG**), melting (**HMLT**), conversion from snow (**HCVI**), conversion from graupel (**GCVH**).

Equation of density of ice crystal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_i^*}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial}{\partial x}(uF_i^*) + \frac{\partial}{\partial y}(vF_i^*) + \frac{\partial}{\partial z}(wF_i^*) \right] \\
& + (\Delta F_i^*)_{\text{S}} + (\Delta F_i^*)_{\text{IN}} \\
& + (\Delta F_i^*)_{\text{NGN}} + (\Delta F_i^*)_{\text{GCVI}} \\
& + (\Delta F_i^*)_{\text{HCVI}} + (\Delta F_i^*)_{\text{IR}} \\
& - (\Delta F_i^*)_{\text{E}} - (\Delta F_i^*)_{\text{ICVG}} \\
& - (\Delta F_i^*)_{\text{CR}} - (\Delta F_h^*)_{\text{IMLT}} \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial F_i^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial F_i^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_h \frac{\partial F_i^*}{\partial z} \right), \quad \dots\dots\dots (\text{付. 15})
\end{aligned}$$

where, F_h^* is F_h/ρ_a , ΔF_i^* 's mean ratio of creation and consumption. Each subscripts mean its effective process, ice nucleation (**IN**), nucleation of secondary ice particles (**NGN**), conversion from graupel (**GCVI**), conversion to hail (**HCVI**), conversion to graupel (**ICVG**), collision with cloud droplets (**CF**).

Mixing ratio of water vapor in air

$$Q_{vs0} = \varepsilon \frac{e_{vs0}}{p_0} \quad \dots\dots\dots (\text{付. 16})$$

where, $\varepsilon = 0.622$, e_{vs0} on water is

$$e_{vs0} = 6.11 \times 10^{(7.5T_0 - 273)(T_0 - 36)}, \quad \dots\dots\dots (\text{付. 17})$$

e_{vs0} on ice is

$$e_{vs0} = 6.11 \times 10^{(9.5T_0 - 273)(T_0 - 8)}, \quad \dots\dots\dots (\text{付. 18})$$

Density of air

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0(1 + 0.608Q_{v0})} \quad \dots\dots\dots (\text{付. 19})$$