

作用素半群の近似

航空宇宙技研 高橋匡康

本稿は、Banach空間における線形作用素の族の列の収束について論じる。その作用素の族が有界線形作用素の半群（以下、簡単に半群）である場合には、H. F. Trotter [10] 以来、最近の S. Oharu-H. Sumouchi [7] まで、多くの人により研究され、そして興味ある多くの結果が得られている。本稿で述べられる結果の一つは、これらの結果の拡張を与えている。

最近、[8]において、（抽象的）Cauchy問題の近似と収束の問題に対して、(A)-classの半群の収束定理[7]が応用されている。当然、この問題への本稿の結果の応用もまた考えられるが、ここでは、それについてはふれない。応用に対する詳しい結果は[9]を参照されたい。

本稿を通して、 X は Banach空間、 $\mathcal{B}(X)$ は X からそれ自身への有界線形作用素の全体とする。さらに、扱う作用素は、常に線形とする。

§ 1. Convergence of solution operators.

定義. ω を実数. $k \geq 0$ を整数とする. $G_1(\omega, k)$, $G_2(\omega, k)$ はそれぞれ、次の $(I; \omega)$, $(II; k)$, そして $(I; \omega)$, $(II_{\exp}; k)$ を満たす閉作用素 A の全体を表わす:

$$(I; \omega) \quad \{\xi; \xi > \omega\} \subset \rho(A) = (A \text{ の resolvent set });$$

$$(II; k) \quad \forall T > 0, \exists M(T) > 0;$$

$$\|\xi^n R(\xi; A)^n x\| \leq M(T) \sum_{i=0}^k \|A^i x\|, \quad x \in D(A^k), \quad \xi > \omega, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq n/\xi \leq T;$$

$$(II_{\exp}; k) \quad \exists \omega_1 \geq \omega, \exists M > 0;$$

$$\|R(\xi; A)^n x\| \leq M(\xi - \omega_1)^{-n} \sum_{i=0}^k \|A^i x\|, \quad x \in D(A^k), \quad \xi > \omega_1, \quad n \geq 1.$$

ここで, $R(\xi; A)$ は点 ξ での A の resolvent で, $A^0 = I$ (恒等写像) である。

この定義から明らかのように, $G_2(\omega, k) \subset G_1(\gamma, k)$, 但し, $\gamma > \max\{0, \omega_1\}$ 。このことから, 本節では, 主に $G_1(\omega, k)$ について論じる。 $G_2(\omega, k)$ に対する詳しい議論は [5] を参照された。

始めに, [6] において得られている次の定理を述べよう。

定理 I. $A \in G_1(\omega, k)$, $m = 2k+1$ とすると, 次の性質をもつ one-parameter family $\{U(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{D}(A^m); X)^{[1]}$ が存在する:

$$(a). \quad U(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \frac{t}{n}A)^{-n} x, \quad x \in \mathcal{D}(A^m), \quad t \geq 0,$$

ここで, この収束は各有界区間 $[0, \tau]$ 上一様に成り立つ。従

って、 $U(t)x$ は $t \geq 0$ に関して連続で、 $t \rightarrow +0$ の時 $U(t)x \rightarrow x$;

(b), $\|U(t)x\| \leq M(T)\|x\|_k$, $x \in D(A^m)$, $t \in [0, T]$; ^{注1)}

(c), 各整数 $p \geq 1$ に対して、 $U(t)[D(A^{m+p})] \subset D(A^p)$, そして

$A^p U(t)x = U(t)A^p x$, $x \in D(A^{m+p})$, $t \geq 0$;

(d), $U(t+s)x = U(t)U(s)x$, $x \in D(A^{2m})$, $t, s \geq 0$;

(e), 各整数 $p \geq 0$, 各 $x \in D(A^{m+1+p})$ として各 $T > 0$ に対して

$\beta = \beta(x, p, T) > 0$ が存在して

$\|U(t)x - U(s)x\|_p \leq \beta|t-s|$, $t, s \in [0, T]$;

(f), $U(t)x - x = \int_0^t U(s)Ax ds = \int_0^t AU(s)x ds$, $x \in D(A^{m+1})$, $t \geq 0$.

さらにも $D(A)$ が X で稠密であるならば, 上の命題 (a) - (f) は, すべて $m=k$ でもって成り立つ。

注1). A を閉作用素とすると, 各整数 $k \geq 0$ に対して, A^k の定義域 $D(A^k)$ は, ノルム $\|\cdot\|_k$: $\|x\|_k = \sum_{i=0}^k \|A^i x\|$, $x \in D(A^k)$, に関して Banach 空間となる。それを $[D(A^k)]$ と表わす。

この時, $\mathcal{B}([D(A^k)], X)$ は, $[D(A^k)]$ から X への有界作用素の全体を表わすものである。

注意. 最近, I. Miyadera [5] により, $G_2(\omega, k)$ に対応する定理は, $m=k+1$ で成り立つということが証明されている。

上の定理から容易にわかるように, 各 $x \in D(A^{m+1})$ に対して, $u(t) \equiv U(t)x$ は次の方程式を満足する, 一意に連続的微分可

能な X -値函数である:

$$\begin{cases} (d/dt)u(t) = Au(t), & t > 0. \\ u(0) = x. \end{cases}$$

従って、以下では $U(t)$ を A から生成された解作用素と呼ぶことにする。

この節の目的は、次の定理を示すことである。

定理 1.1. 作用素の列 $\{A_n\} \subset G_1(\omega, k)$ が次の条件を満足しているものとする,

(I). 各 $\xi > \omega$ に対して $\sup_n \|R(\xi; A_n)\| < +\infty$;

(II). 各 $T > 0$ に対して n に無関係な $M(T) > 0$ があって
 $\| \xi^m R(\xi; A_n)^m x \| \leq M(T) \sum_{i=0}^k \|A_n^i x\|$, $x \in D(A_n^k)$, $\xi > \omega$, $m \geq 1$, $0 \leq m/\xi \leq T$;

(III). ある $\xi_0 > \omega$ に対して、次の性質をもつ $R(\xi_0) \in \mathcal{B}(X)$ が存在する.

(i) $R(\xi_0) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R(\xi_0; A_n)$, すなわち、各 $x \in X$ に対して
 $R(\xi_0)x = \lim_{n \rightarrow \infty} R(\xi_0; A_n)x$,

(ii) $R(\xi_0)$ は inverse $[R(\xi_0)]^{-1}$ をもつ。

この時、作用素 $A \in G_1(\omega, k)$ と A から生成される解作用素 $\{U(t); t \geq 0\} \subset \mathcal{B}([D(A^{2k+1})], X)$ が存在して、

(a). $R(\xi; A) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R(\xi; A_n)$, $\xi > \omega$,

(b). 任意の $x \in X$, $\xi > \omega$, として $t \geq 0$ に対して、各有界区間 $[0, \tau]$ 上に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t) R(\xi; A_n)^{2k+1} x = U(t) R(\xi; A)^{2k+1} x,$$

ここに, $\{U_n(t); t \geq 0\}$ は A_n から生成される解作用素の族である。

さらに, もし各 A_n の定義域 $D(A_n)$ が X で稠密で, (III)-(i), (ii) に加えて, $R(\xi_0)$ の値域 $R(\xi_0)[X]$ が X で稠密であるならば, 上の結論は $2k+1$ の代わり k でもって成り立つ。

証明の概略 まず始めに, (I) と (III)-(i) から, 各 $\xi > \omega$ に対して, $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R(\xi; A_n)$ の存在が示される (cf. T. Kato [3; Th. IX, 2.17]). 次に, (III)-(ii) を用いて $A \equiv I - [R(\xi_0)]^{-1}$ と定義すると, この A が求めるものである。

(b) の収束に関しては, 次の二つの不等式が重要で, 最初の不等式は, 本質的には, M. Crandall - T. Liggett [1] によって得られてゐるものである。

補題 1.2. $\xi > \omega$ とする。この時, 定理 1.1 の条件のもとで, 各 $x \in X$ と $T > 0$ に対して, α に無関係に $K(\alpha, T) > 0$ が存在して, $t \in [0, T]$ と十分大きな m に対して

$$\|U_n(t) R(\xi; A_n)^{2k+1} x - (I - \frac{t}{m} A_n)^m R(\xi; A_n)^{2k+1} x\| \leq t K(\alpha, T) / \sqrt{m},$$

さらに, $t \in [0, T]$ に対して

$$\|U_n(t) R(\xi; A_n)^{2k+1} x - R(\xi; A)^{2k+1} x\| \leq t K(\alpha, T).$$

注意. $G_2(\omega, k)$ に対応する定理も同様に証明できる

が, [5] で与えられた結果 (定理 I の下の注意) から, その結論は $k+1$ に改善できる。

§2. Convergence of semigroups.

本節では, 前節で得られた結果を用いて, X 上の半群の収束に関する一つの結果が与えられる。

定義. 作用素の族 $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{B}(X)$ が X 上の半群であるとは, 次の (2.1), (2.2) が満足されていることである。

$$(2.1) \quad T(0) = I, \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad t, s \geq 0.$$

$$(2.2) \quad \text{各 } x \in X \text{ に対し, } T(t)x \text{ は } (0, \infty) \text{ 上で強連続.}$$

通常のように, 半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ の生成作用素 (i.g.) A_0 は, $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [T(h)x - x]$ が存在するような $x \in X$ に対して,

$$A_0 x \equiv \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [T(h)x - x]$$

によって定義される。 A_0 が閉包 $A = \overline{A_0}$ をもつならば, A はこの半群の complete infinitesimal generator (c.i.g.) と呼ばれる。 $\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|T(t)\|$ ($< +\infty$) をこの半群の type と呼ぶ。 $\Sigma = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x\}$ をこの半群の continuity set と呼ぶ。作用素 $R_0(\lambda)$ は, 次の積分が存在するような複素数 λ と $x \in X$ に対して

$$R_0(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$$

によって定義される。明らかに、 $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0$ ならば $\Sigma \subset D(R_0(\lambda))$ 。

定義 半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ が $(C_{(\omega)})$ -class の半群であるとは、次の条件が満足されることである、

(C; I) $X_0 = \bigcup_{t \geq 0} T(t)[X]$ は X で稠密。

(C; II) ある $\omega_1 > \omega_0$ があって、各 λ , $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1$, に対し、次の性質をもつ $R(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$ が存在する、

(i) $R(\lambda)x = R_0(\lambda)x$, $x \in X_0$,

(ii) $R(\lambda)x = 0$, $x \in X$, ならば $x = 0$ 。

(C; k) $R(\lambda_0)^k[X] \subset \Sigma$ となるような整数 $k \geq 0$ と複素数 λ_0 , $\operatorname{Re}(\lambda_0) > \omega_1$, が存在する。

注意 条件 (C; I), (C; II) のもとでは、この半群の生成作用素 A_0 は、その定義域 $D(A)$ が稠密であるような開包 $A = \overline{A_0}$ をもち、 $R(\lambda) = R(\lambda; A)$, $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_1$, であることが知られている。従って、条件 (C; k) は、次のように書き直すことができる：

(C; k) $D(A)^k \subset \Sigma$ となるような整数 $k \geq 0$ が存在する。

この注意と、 (C_0) -, $(1, A)$ -, $(0, A)$ -, そして (A) -class の半群のよく知られた事実から、 $(C_0) = (C_{(0)})$, $(1, A)$, $(0, A) \subset (C_{(1)})$, そして $(A) \subset (C_{(2)})$ は明らかである。これら

の class の定義や性質に関しては, E. Hille-R. Phillips [2] を参照されたい。

次に, [6] で得られている $(C_{(k)})$ -class の半群の生成定理を述べておこう。

定理 II. $A \in X$ における作用素とする。このとき, A がある $(C_{(k)})$ -class の半群の c. i. g. であるための必要十分条件は, $D(A)$ が X で稠密で, $A \in G_2(\omega, k)$, さらに次の条件が満足されることである:

$(F; k)$ 各 $\varepsilon > 0$ と $x \in D(A^k)$ に対し, 次のような $M_\varepsilon > 0$ と実数 $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon, x)$ が存在する;

$$\|\xi^n R(\xi; A)^n x\| \leq M_\varepsilon \|x\|, \quad \xi > \xi_0, \quad n \geq 1, \quad \varepsilon \leq n/\xi \leq 1/\varepsilon.$$

注意. 定理 II からわかるように, $(C_{(k)})$ -class の半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ に対して, $T(t)|_{D(A^k)}$, $(T(t))$ の $D(A^k)$ 上への制限) はその c. i. g. A によって生成された解作用素である。

この注意と定理 I, 1 から次の定理の証明は容易である。

定理 2.1. $\{T_n(t); t \geq 0\}$ を $(C_{(k)})$ -class の半群の列, $\{A_n\}$ をそれに対応する c. i. g. の列とし, 次の条件が満足されているとする;

(I), $\{\xi; \xi > \omega\} \subset \rho(A_n)$ となるような実数 ω が存在し,

各 $\xi > \omega$ に対して $\sup_n \|R(\xi; A_n)\| < +\infty$,

(II_{exp}). $\omega_1 \geq \omega$ と n に無関係な $M > 0$ があって

$$\|T_n(t)x\| \leq M e^{\omega_1 t} \sum_{i=0}^k \|A_n^i x\|, \quad x \in D(A_n^k), \quad t \geq 0.$$

(III) ある $\xi_0 > \omega$ に対して、次の性質をもつ $R(\xi_0) \in \mathcal{B}(X)$ が

存在する.

(i). $R(\xi_0) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R(\xi_0; A_n).$

(ii). $R(\xi_0)$ は inverse $[R(\xi_0)]^{-1}$ をもつ.

(iii). $R(\xi_0)[X]$ は X で稠密.

(IV). 各 $x \in X$ と $t > 0$ に対して, $\sup_n \|T_n(t)x\| < +\infty$.

この時.

(a). 作用素 A が存在し, A は (C_{ω_1}) -class の半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ を生成し, また $R(\xi_0) = R(\xi_0; A)$ である.

(b). 任意の $t > 0$ に対して, 各 $[\varepsilon, \nu_\varepsilon]$ 上一様に

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t) = T(t).$$

系 2.2. 半群の列 $\{T_n(t); t \geq 0\}$ が, 定理 2.1 の条件 (III),

(IV) をして (I), (II_{exp}) の代わりに

(I'). $\{\lambda; \operatorname{Re}(\lambda) > \omega\} \subset \rho(A_n)$ とするような実数 ω , と

して, $\sup_n \|R(\lambda; A_n)\| \leq p(|\lambda|), \quad \operatorname{Re}(\lambda) > \omega$, とするよう.

次数 $k \geq 0$ の非負係数をもつ多項式 P が存在する.

を満足してゐるとすると, 定理 2.1 の結論は, k の代わり

$l+2$ でもって成り立つ。

この系は、(I') を満足すれば、 $\gamma > \max\{0, \omega\}$ に対して $A_n \in G_2(\gamma, l+2)$ であるという事実([6]) から証明される。

次に、系 2.2 を用いて (A)-class の半群の列の収束定理([7]) を証明しよう。

系 2.3. (A)-class の半群の列 $\{T_n(t); t \geq 0\}$ が次の条件を満足しているとする：

(A; I): $\sup_n \|R(\lambda; A_n)\| \leq L$, $\operatorname{Re}(\lambda) > \gamma$, とあるような実数 γ と正数 L が存在する。

(A; II). ある λ_0 , $\operatorname{Re}(\lambda_0) > \gamma$, に対して

$$R(\lambda_0) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R(\lambda_0; A_n)$$

となる $R(\lambda_0) \in \mathcal{B}(X)$ が存在する。

(A; III). n に関して一様に $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A_n) = I$.

(A; IV). 各 $x \in X$ と $t > 0$ に対して $\sup_n \|T_n(t)x\| < +\infty$.

この時、

(a). 作用素 A が存在して、 A は (A)-class の半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ を生成し、また $R(\lambda_0) = R(\lambda_0; A)$ をみたす。

(b). 任意の $t > 0$ に対して、各 $[\varepsilon, \nu_\varepsilon]$ 上一様に

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t) = T(t),$$

この系は、次の事実、すなわち、条件 (A; I) $\sim$ (A; IV) は、系 2.2 の $l=0$ に対する条件を示しているという事実から証明される。

この系から、定理 2.1 は、今までに得られていた半群の列の収束定理 (cf. [3], [4], [7], [10]) の一つの拡張を与えていることがわかる。

§3. Variations.

最後に、応用上使いよい収束定理を示しておく。

いま、 $\{A_n\} \subset G_1(\omega, k)$ を稠密な定義域 $D(A_n)$ をもつ作用素の列として、次の二つの条件を考える：

(III'). 次のような稠密な定義域 $D(A)$ をもつ閉作用素 A と集合 $D \subset X$ が存在する。

$$(i) \quad \rho(A) \cap \{\varepsilon; \varepsilon > \omega\} \neq \emptyset$$

(ii) D は A の core である、すなわち、 $A|_D$ の閉包は A に一致する。

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax, \quad x \in D.$$

$$(IV'). \quad D \subset D(A^k) \text{ で、 } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^i x = A^i x, \quad x \in D, \quad 2 \leq i \leq k.$$

この時、条件 (I) のもとで、条件 (IV) は (III') から導かれる。(cf. [3])。従って、上で得られた二つの定理の variations

として、次の二つの定理を得る。

定理 3.1. $\{A_n t \subset G_1(\omega, k)$ が条件 (I), (II) として (III') を満足しているとする。定理 1.1 の後半の結論が成り立つ。

さらに、これらの条件に加えて、(IV') を満足すれば、各 $\alpha \in D$ と $t \geq 0$ に対して、各 $[0, T]$ 上—様に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t)\alpha = U(t)\alpha.$$

定理 3.2. (C_{ex}) -class の半群の列 $\{T_n(t); t \geq 0\}$ が条件 (I), (II_{exp}) , (III') として (IV) を満足しているとする。定理 2.1 と同じ結論が成り立つ。

この定理 3.1 と定理 3.2 は、Cauchy 問題の semi-discrete difference scheme の収束に対して適用できる。しかし、「序」でも述べたように、その詳しい結果については、[8] と [9] を参照されたい。

文 献

- [1]. M. Crandall and T. Liggett, Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces, (to appear).
- [2]. E. Hille and R. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc. Collog. Publ., 31 (1957).
- [3]. T. Kato, Perturbation theory for linear operators,

Springer, (1966).

- [4]. I. Miyadera, Perturbation theory for semi-groups of operators, (Japanese) *Sûgaku*, 20(1), (1968), 14-25.
- [5]. I. Miyadera, Generation theorems of semi-groups of linear operators, (to appear).
- [6]. S. Oharu, Semigroups of linear operators in a Banach space, (to appear).
- [7]. S. Oharu and H. Sunouchi, On the convergence of semigroups of linear operators, *J. Func. Anal.*, 6 (1970), 292-304.
- [8]. H. Sunouchi, Convergence of semi-discrete difference schemes of Cauchy problems, *Tôhoku Math. J.*, 22 (1970), 394-408.
- [9]. T. Takahashi and S. Oharu, Approximation of operator semigroups, (to appear).
- [10]. H. F. Trotter, Approximation of semigroups of operators, *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 887-919.
- [11]. K. Yoshida, *Functional Analysis*, Springer, Berlin, (1965).