

## 連立代数方程式の解の重複度

日大・小林 英恒 東京職業訓練短大・鈴木 秀男

(Kobayashi, Hidetsune)

(Suzuki, Hideo)

連立代数方程式の解の重複度を数値計算によって求める方法を示す。解の重複度を連立代数方程式から自然に決まる、代数的対応の重複度に翻訳し、これをゾイタンの法則に当てはめて計算する。

この報告の1節では、自然な代数的対応関係を定義し、Zeuthenの法則を用いて解の重複度を求める方法について述べる。2節では、数値計算の方法について簡単に述べ、3節で、計算例を紹介する。

## 1. Zeuthen の法則と解の重複度

まず、簡単に代数的対応について紹介する。 $f(x, y)$  を  $x$  について  $n$  次、 $y$  について  $m$  次の多項式とする。 $a$  を一つの複素数とするとき、

$$f(a, y) = 0$$

の解が  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  であるとする、 $a$  に  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  を対応させる対応関係を代数的対応という。 $a$  に  $m$  個の数が対応し、逆に  $b$  に  $n$  個の数が対応することからこの代数的対応は  $(n, m)$  対応であるという。 $a$  に対応する数のうちに  $a$  自身が含まれれば

$$f(a, a) = 0$$

となる。従って、このような数は、 $n + m$  個存在する。空間の点の代数的対応に関しては [1] p. を参照されたい。

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, f_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

を与えられた連立代数方程式とする。

$$F_i(X_0, X_1, \dots, X_n) = X_0^{\deg f_i} f_i(X_1/X_0, X_2/X_0, \dots, X_n/X_0), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

とにおいて斉次化することによって、以下の議論はすべて  $n$  次元射影空間ですすめる。この

ようにおくと Bezout の定理により解の個数は、方程式を与える多項式の次数の積となり、理論を進めるのが簡単となる。また、元の方程式の解は無限遠解ではなく、重複度は元のそれと変わらない。

以下記号  $[r]$  は  $r$  次元 linear space を表す。つまり、 $[r]$  は独立な  $n-r$  個の超平面の交わりのことである。まず、重複度を調べるための道具となる代数的対応を作ることから始める。超曲面  $f_1 = 0$  を  $F$  とおき、曲線  $f_2 = f_3 = \cdots = f_n = 0$  を  $C$  とおく。  $F$  にも  $C$  にもものらない一般の点  $O$  を取る。  $C$  上の点  $P$  が与えられたとき、  $OP$  と  $F$  との交点の一つを  $Q$ 、直線  $OP$  を  $l$  とおき、

$$(P, Q; l)$$

の全体を  $\Sigma_1$  とおくと、  $\Sigma_1$  は代数的対応関係  $P \rightarrow Q$  を定める。この対応関係の指標  $(\alpha, \beta; \gamma)$  は、次のように定義される。

$\alpha$  :  $[n-1]$  を与えたとき、  $P \in [n-1]$  なる  $(P, Q; l) \in \Sigma_1$  の個数。

$\beta$  :  $[n-1]$  を与えたとき、  $Q \in [n-1]$  なる  $(P, Q; l) \in \Sigma_1$  の個数。

$\gamma$  :  $[n-2]$  を与えたとき、  $l \cap [n-2] \neq \emptyset$  なる  $(P, Q; l) \in \Sigma_1$  の個数。

$\deg f_i = d_i$  とおくと、次の命題が成立する。

命題  $\alpha = \beta = \gamma = d_1 d_2 \cdots d_n$  である。

証明  $C$  の order は  $d_2 d_3 \cdots d_n$  であるから、  $[n-1]$  との交点は  $d_2 d_3 \cdots d_n$  である。この交点のうちの一つを  $P$  とおくと、  $OP$  と  $F$  との交点は  $F$  の order が  $d_1$  であることから、  $d_1$  個である。よって、  $(P, Q; l) \in \Sigma_1$  は  $d_1 d_2 \cdots d_n$  個だから、  $\alpha = d_1 d_2 \cdots d_n$

$[n-1]$  と  $F$  との交わりは order  $d_1$  の代数多様体で、これを底とし  $P$  を頂点とする錐と  $C$  との交点は  $d_1 d_2 \cdots d_n$  である。よって、  $Q \in [n-1]$  なる  $(P, Q; l) \in \Sigma_1$  の個数は  $d_1 d_2 \cdots d_n$  であるから、  $\beta = d_1 d_2 \cdots d_n$  .

$[n-2]$  を勝手に与えたとき、  $l \cap [n-2] \neq \emptyset$  とする。  $O \in l$  で、  $O \in [n-2]$  とし、よいかから、結局  $l$  は超平面  $O \cup [n-2]$  に含まれることになる。  $O \cup [n-2] \ni P$  なる  $(P, Q; l) \in \Sigma_1$  の個数は  $d_1 d_2 \cdots d_n$  だから、  $\gamma = d_1 d_2 \cdots d_n$  .

定理  $\Sigma_1$  の指標が  $(\alpha, \beta; \gamma)$  のとき、  $P=Q$  となる  $(P, Q; l) \in \Sigma_1$  の個数は

,  $\alpha + \beta - \gamma$ である.

証明 一般の位置に  $[n-2]$  をとり, これを  $H'$  とおく.  $H'$  を通る  $[n-1]$  に対し,  $(P, Q; 1)$  を  $P \in [n-1]$  ととり, これに  $Q \cup H'$  を対応させると  $H'$  を通る超平面の束の代数的対応が出来る.  $H'$  を通る超平面の束は, 一つのパラメタで表示できるから, この代数的対応は, 複素数の対応と思って良い.

一つの  $[n-1]$  を与えると,  $P \in [n-1]$  なる  $(P, Q; 1) \in \Sigma$  の個数は  $\alpha$  で, この  $\alpha$  個の  $Q$  をとおる  $[n-1] = Q \cup H'$  が最初の  $[n-1]$  に対応する. このことをもう一度繰り返して考えると, この数の対応は,  $(\beta, \alpha)$  対応となる. 従って一致する超平面の個数は  $\alpha + \beta$  個である.

他方,  $H'$  をとおる  $[n-1]$  に同じ  $[n-1]$  が対応するのは,  $(P, Q; 1)$  に於いて  $P = Q$  のときか  $1 \cap H' \neq \phi$  のときである. よって,  $P = Q$  となるのは,

$$\alpha + \beta - \gamma \text{ 個}$$

である.

系 上の対応関係で重複度をいれて考えれば, 解の個数はちょうど  $d_1 d_2 \cdots d_n$  となる.

上の定理の証明を見れば, 超平面の束の対応関係の重複度を, 連立代数方程式の解の重複度と定義すれば良いことが分かる. すなわち,  $A$  を連立代数方程式の一つの根とすると,  $[n-2] \cup A$  上には, 他の連立代数方程式の解が無く, かつ  $P \rightarrow A$  のときの極限の  $(P, Q; 1)$  の  $1$  が乗っていないように  $[n-2]$  を適当に選び, 代数的対応関係  $\Sigma$  から決まる超平面の束の対応関係の点  $A$  に関する部分の重複度を調べれば, 超平面の束の対応関係の重複度と根  $A$  の重複度が一致する. ここで,  $[n-2]$  を一般の位置に選びさえすれば, 連続性により, 選び方によって重複度が変えることはない.

次に, 数の代数的対応関係の重複度を調べるための Zeuthen の法則を示す.

定理 (Zeuthen's Rule)

ある代数的対応が与えられたとする.  $x$  に対応する  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  のうち,  $\{y_1, y_2, \dots, y_s\}$  が,  $x \rightarrow a$  なら  $y_1, y_2, \dots, y_s \rightarrow a$  となるとき, 点  $a$  の重複度は

$y_1 = x, \dots, y_s = x$  の無限小の程度を, 無限小  $x - a$  を基準に測った値の和に等しい

. ([1], P. 70)

この法則を応用するためには、連立代数方程式の解Aをとる一般の位置にある直線を一本引きこれを固定する。点Aをこの直線の原点と思うことにする。原点から距離  $h$  の直線上の点Gと一般に取られた  $[n-2]$  とで、生成される超平面と曲線Cとの交点のうちAに近いものを全て求める。どの範囲のものを全て求めるかは、次の節で述べるとして、いまこれらの点を  $P_1, P_2, \dots, P_r$  とおく。各  $P_i$  0 とFとの交点を  $Q_{ij}$  とし  $Q \cup [n-2]$  が固定された直線と交わる点と点Gの間の距離を  $q_{ij}$  とするとき、

$e_{ij} = c |q_{ij}|$  となる  $e_{ij}$  を求めて、それらをすべて加えれば重複度が得られる。ここに、 $c$  は  $h, q_{ij}$  に関係しない定数であり、2つの  $h$  を考えることにより除去できる。

## 2. 重複度の計算アルゴリズム

この節では、連立代数方程式の解を求め、その重複度を求めるために用いた方法を紹介する。

### 1) 与えられた連立代数方程式の根を求める：

適当な初期値を与え、ホモトピー法により根を求める。与えられた連立代数方程式は高々3変数のものを考えているので、ヤコビアン の 逆行列を求めるのに数式処理を用いた。微分方程式

$$\dot{x} = -(\text{Jac})^{-1} F, \quad F = {}^t(f_1, f_2, f_3)$$

の数値積分は、Adams-Bashforth-Moulton法を用いた。得られた解の一つをAとおく。

2)  $[3-2]$  を与えるため2点  $(x, y, z)$  と  $(x', y', z')$  とを与える。実際問題この与えた  $[3-2]$  が一般の位置にあるかどうかは、試さなくても良いほどであるが、念のため  $[3-2] \cup A$  上に他の解が乗っていないことをためす。解が乗っていれば、最初に与えられた2点を適当にずらして解が乗っているかどうか再度確認する。

3)  $A = (a_1, a_2, a_3)$  の近くに  $h = (h_1, h_2, h_3)$  を取り、2)の  $[3-2]$  と  $h$  とで生成される  $[2]$  と曲線  $f_2 = f_3 = 0$  との交点を求める。このとき、 $\deg(f_2) = d_2, \deg(f_3) = d_3$  とおくと

$$|x - a_1| \sim |h_1 - a_1|, \quad |y - a_2| \sim |h_1 - a_1|^{\frac{1}{d_2 d_3}}, \quad |z - a_3| \sim |h_1 - a_1|^{\frac{1}{d_2 d_3}}$$

の範囲で解を求めれば良い。なぜなら、曲線の分枝は高々  $d_2 d_3$  本であるから、A の近くで

は局所助変数表示は  $(x, bx^{\frac{1}{d_2 d_3}} + \dots, cx^{\frac{1}{d_2 d_3}} + \dots)$  の形となっているからである。  
(ここに,  $b, c$  は定数)

この交点を求めるにあたって, 最初に与えられた代数方程式が2変数のときには, この交点を与える代数方程式は, 一変数となるのでニュートン法で全ての解を求めた. 最初に与えられた代数方程式が3変数のときには, 交点をあたえる連立代数方程式を実部と虚部とに分け, 領域をメッシュに分け各メッシュに解が存在するか否かをスツルムの方法で調べる. 解が存在すれば, ニュートン法でそのメッシュの全ての解をおおよその精度で求める. この解を初期値としてさらに, ホモトピー法で厳密解を求める. 求めた点のうち  $h \rightarrow A$  でも,  $P \rightarrow A$  とならないものがあるが, 複数の  $h$  を考えれば, このような点を除去する事が可能である. また, 適当な値の範囲を越えるものは取り除くようにしてもよい.

4) 点  $O$  を曲線上にも, 曲面上にもないように取り, 直線  $OP_i$  と曲面との交点を  $q_{ij}$  とおく. 点  $A$  をとおる直線  $l$  を [3-2] に直交する向きの一つにとり, [3-2]  $h$  とこの直線の交点  $H$  の  $A$  からの距離を  $h$  とおく.  $([3-2] \cup Q) \cap l$  と  $H$  との距離を  $q_{ij}$  とおくと,

$$\frac{\alpha_{ij}}{h} = c \mid q_{ij} \mid$$

の  $\alpha_{ij}$  を求める. 次に  $h$  を変えて同様に  $\alpha$  をもとめ, 前の値と比較して, 定数  $c$  を除去する. 除去した後の指数の総和が求める重複度となる.

$A$  は単根とは限らないから, 精度の点で問題がおこる. したがって,  $h$  は  $q$  と異なり誤差を含む. この誤差を  $\Delta h$  とおくと,  $\alpha = \log q / \log(h + \Delta h)$  となる.  $\log(h + \Delta h) = \log h + \Delta h/h + \dots$  であるから,  $P \rightarrow A$  なら,  $Q \rightarrow A$  となる点  $P, Q$  で考えると  $\log q, \log h$  共整数の程度であるが,  $\Delta h/h$  は小数であるので  $\alpha$  の値にはあまりきいてこない. 実際必要なのはこのような点なのである.  $h \rightarrow A$  でも  $P \rightarrow A$  とならない点では,  $\alpha$  の値は, 殆ど全ての場合非常に小さな値となる. なぜなら,  $q$  はほぼ  $AP$  の距離と同程度であり,  $h$  が十分小さいと,  $\log q / \log h$  は小さい値となる. 従って, このような不要の点も一緒に計算しても, 結果にはほとんど影響してこない.

## 3. 計算の例

2変数の連立代数方程式の解の重複度は、余り次数が高くなければ、数式処理によって解の回りでの助変数表示を求めることができ、重複度を正確に計算することができる。まず、数式処理によって結果が正しいことが確かめられたものから示すことにする。

例1. 曲線  $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$  と  $2x^4 - 3x^2y + y^4 - 2y^3 + y^2 = 0$

との交点(0,0). 重複度は8. 第2式の(0,0)のまわりの無限級数展開は

$$2x^2 + 16x^4 + \dots \text{ と } x^2 - 2x^4 + \dots$$

である。従って、(0,0)の重複度は、8である。multiplicity' は定数 c を除去する前の値で、その下の multiplicity が上の2つから定数を除去したものである。

計算時間は一つの multiplicity をもとめるのに1.3秒。(cpu mc68030, 25mh, os UNIX, 以下同様)

|               |          |          |          |          |
|---------------|----------|----------|----------|----------|
| h             | 0.1      | 0.01     | 0.02     | 0.01     |
| multiplicity' | 7.208272 | 7.585311 | 7.519342 | 7.585311 |
| multiplicity  | 7.962350 |          | 7.957631 |          |
| h             | 0.01     | 0.001    | 0.002    | 0.001    |
| multiplicity' | 7.585311 | 7.718583 | 7.688143 | 7.718583 |
| multiplicity  | 7.985127 |          | 7.991507 |          |

例2. 曲線  $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$  と  $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$

との交点 (0,0). 重複度は16. 後者のビュイズー級数展開は

$$x^{4/3} - x^2/3 + \dots, \quad \omega x^{4/3} - x^2/3 + \dots, \quad \omega^2 x^{4/3} - x^2/3 + \dots$$

と  $\pm ix + x^2/2 + \dots$ , である。ここに、 $\omega$  は1の原始3乗根である。この展開をみても分かるように、この例では、複素根を求める必要が生じる。

計算時間4.3秒。

|               |          |          |          |          |
|---------------|----------|----------|----------|----------|
| h             | 0.1      | 0.01     | 0.02     | 0.01     |
| multiplicity' | 15.08099 | 15.45520 | 15.37958 | 15.45520 |
| multiplicity  | 15.82942 |          | 15.88203 |          |
| h             | 0.01     | 0.001    | 0.002    | 0.001    |
| multiplicity' | 15.4552  | 15.62073 | 15.58477 | 15.62073 |
| multiplicity  | 15.95180 |          | 15.94320 |          |

例3. 曲線  $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$  と  $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$

との交点のうち原点の重複度. 正確には22.

計算時間16.9秒.

|               |          |          |          |          |
|---------------|----------|----------|----------|----------|
| h             | 0.1      | 0.01     | 0.02     | 0.01     |
| multiplicity' | 21.76422 | 21.98819 | 21.97398 | 21.98819 |
| multiplicity  | 22.21216 |          | 22.06839 |          |
| h             | 0.01     | 0.001    | 0.002    | 0.003    |
| multiplicity' | 21.98819 | 22.05846 | 21.99920 | 22.00568 |
| multiplicity  | 22.19901 |          | 21.90643 |          |

以上は, 2変数の代数方程式の根  $(0, 0)$  の重複度を計算したもので, すべて正しい結果を与えてる. 次に, 3変数の連立代数方程式の根の重複度を求めた例をしめす. 以下の例では, 定数  $c$  の除去は行わなかった.

例4.  $f_1 = xy^2 - z^2 = 0$

$$f_2 = 2x^4 + xy^3 - 3xy - 6x - 2y^4 + y^2z - 2y^2 + 10y - z = 0,$$

$$f_3 = x^4 - 9x^3 + 2x^2y^2 + 4x^2z + 9x^2 - 4xy - 4xz + x + y^4 + 4y^3 + 5y^2 +$$

$$2yz - 4y + 2z^2 - 6z + 4 = 0$$

の根  $(1, 1, 1)$  の重複度. 計算時間115.27秒

数値計算で求めた根：(1.000000, 1.000000, 1.000000)

$$12.000000x - 12.000000y + 0.60000000e-4z - 0.12000000e-3 = 0$$

と曲線  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 0$  の交点：

$$P_1(-0.9854153e-4 - 0.1341472e-13i, -0.1085416e-3 - 0.1341473e-13i, \\ -0.5941324e-5 - 0.2146933e-14i)$$

これに対して、根に近づくQは一つで、それは

$$Q_{1,1}(-0.7094070e-4 + 0.3702292e-8i, 0.2947319e-4 + 0.1851294e-7i, \\ -0.5941488e-5 - 0.2414576e-13i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は 1.004615.

$$P_2(0.5719079e-4 - 0.1215229e-13i, 0.4718989e-4 - 0.1215212e-13i, \\ -0.1799254e-3 + 0.3363888e-13i)$$

これに対して、根に近づくQは一つで、それは

$$Q_{2,1}(0.1068719e-4 + 0.3701980e-8i, -0.1853170e-3 + 0.1850906e-7i, \\ -0.1799171e-3 - 0.6324071e-12i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は 0.8777543

$$P_3(0.4207395e-5 - 0.3006564e-14i, -0.5792658e-5 - 0.3006514e-14i, \\ -0.1062731e-4 + 0.9940724e-14i)$$

これに対して、根に近づくQは一つで、それは

$$Q_{3,1}(0.2935450e-5 + 0.3702415e-8i, -0.1215235e-4 + 0.1851199e-7i, \\ -0.1062730e-4 - 0.2940588e-13i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は 1.008342

$$P_4(0.5145907e-5 - 0.3978975e-15i, -0.4854051e-5 - 0.3978984e-15i, \\ 0.8461878e-5 - 0.1660424e-15i)$$

これに対して、根に近づくQ一つで、それは

$$Q_{4,1}(0.7099187e-5 - 0.3401127e-15i, 0.4912290e-5 - 0.1089731e-15i, \\ 0.8461894e-5 - 0.1660423e-15i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は 0.9711513

以上より、無限小の指数の総和は、3.861863 で、重複度は4.

$$\begin{aligned} \text{例5. } f_1 = & x^4 - 3x^2y^2 + 5x^2yz - 3x^2y - 20x^2z + 14x^2 - xy^3 + 5xy^2z - 5xy^2 - xyz^2 \\ & + xyz - 108xy + 2xz^3 - 6xz^2 - 32xz + 460x + y^4 - y^2z^2 - 14y^2 - 6yz^2 \\ & + 22yz + 254y + z^4 - 12z^3 - 20z^2 + 626z - 2286 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = & x^4 - 3x^3y + x^3 + 6x^2y^2 - 5x^2yz + x^2z^2 - 8x^2 + xy^2z - xy^2 - 2xyz^2 \\ & + 2xyz + 111xy + 3xz^3 - 193xz + 513x + y^4 - y^3 + 2y^2z^2 + 2y^2z - 144y^2 \\ & + 5yz^3 - 376yz + 1400y - 290z^2 + 2814z - 6890 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 = & 4x^3 + 8xy^2 - 8xyz + 4xy + 4xz^2 - 15y^3 - 8y^2z + 4y^2 + 4yz^2 - 16yz \\ & - 4y - 4z^2 + 8z + 4 = 0 \end{aligned}$$

の根 (3, 2, 5) の重複度. 計算時間 4 2. 3 1 7 秒

数値計算で求めた根: (3.000003, 2.000000, 4.999988)

$$24.000000x - 24.000000y + 0.60000000e-2z - 0.24000000e-1 = 0$$

と曲線  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 0$  の交点:

$$P_1(0.1048806e-2 + 0.0i, 0.4808840e-4 + 0.0i, -0.2871628e-2 + 0.0i)$$

これに対して, 根に近づくQは三つで, それらは

$$\begin{aligned} Q_{1,1}(-0.2102087e-2 + 0.5278506e-24i, 0.3195529e-2 - 0.5272722e-24i, \\ -0.2862589e-2 - 0.1514203e-26i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{1,2}(0.1250875e-2 - 0.5129502e-24i, -0.1537592e-3 + 0.5123881e-24i, \\ -0.2872208e-2 + 0.1471459e-26i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{1,3}(0.2550774e-1 - 0.1707766e-25i, -0.2438404e-1 + 0.1705894e-25i, \\ -0.2941792e-2 + 0.4898930e-28i) \end{aligned}$$

したがって, 無限小の程度を示す指数は, それぞれ 0.7893282, 1.189796, 0.4905538

で和は, 1.142212

$$\begin{aligned} P_2(0.2155172e-2 - 0.1661825e-3i, 0.1155206e-2 - 0.1662955e-3i, \\ 0.1356614e-3 - 0.451722e-3i) \end{aligned}$$

これに対して, 根に近づくQは三つで, それらは

$$\begin{aligned} Q_{2,1}(0.5755526e-3 - 0.1060466e-2i, 0.2729312e-2 + 0.7255572e-3i, \\ 0.1350444e-3 - 0.4511213e-3i) \end{aligned}$$

$$Q_{22}(0.1569525e-2 + 0.1017675e-2i, 0.1739311e-2 - 0.1346049e-2i, \\ 0.1361157e-3 - 0.4512879e-3i)$$

$$Q_{23}(0.1269742e-1 + 0.1481344e-2i, -0.9351676e-2 - 0.1811872e-2i, \\ 0.1378319e-3 - 0.4562406e-3i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 0.9929495, 1.045863, 0.6981816  
で和は、1.405053

$$P_3(0.2155172e-2 + 0.1661825e-3i, 0.1155206e-2 + 0.1662955e-3i, \\ 0.1356614e-3 + 0.451722e-3i)$$

これに対して、根に近づくQは三つで、それらは

$$Q_{31}(0.5755526e-3 + 0.1060466e-2i, 0.2729312e-2 - 0.7255572e-3i, \\ 0.1350444e-3 + 0.4511213e-3i)$$

$$Q_{32}(0.1569525e-2 - 0.1017675e-2i, 0.1739311e-2 + 0.1346049e-2i, \\ 0.1361157e-3 + 0.4512879e-3i)$$

$$Q_{33}(0.1269742e-1 - 0.1481344e-2i, -0.9351676e-2 + 0.1811872e-2i, \\ 0.1378319e-3 + 0.4562406e-3i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 0.9929495, 1.045863, 0.6981816  
で和は、1.405053

以上より、無限小の指数の総和は、7.9437 で、重複度は8.

$$\text{例6. } f_1 = -(2x^3 - x^2yz - x^2y + x^2z^2 - 31x^2 - 2xy^2z + 2xy^2 - 2xyz^2 - xyz + \\ 123xy + 2xz - 60x + y^3z - 6y^2 - 2yz^3 - 2yz^2 + 254yz - 1060y + 2z^3 \\ + 37z^2 - 624z + 2055) = 0$$

$$f_2 = -(x^3y - 2x^3z - x^3 + x^2y + 79x^2 + xyz^2 - 58xy + 2xz^2 + 14xz - 297x \\ + 2y^4 - y^3z - 2y^2z + 32y^2 + 62yz - 179y - z^3 + 11z^2 - 179z \\ + 806) = 0$$

$$f_3 = x^4 - x^3y + x^3z + 2x^2y^2 + 2x^2y - 93x^2 + xyz^2 + xyz - 63xy - xz^2 - 39xz \\ + 583x - 2y^3z + 42y^2 - 2yz^2 + 11yz - 17y + z^2 + 78z - 803 = 0$$

の根 (3, 2, 5) の重複度. 計算時間 533.57 秒

数値計算で求めた根：(2.999991, 1.999987, 4.999996)

$$24.000000x - 24.000000y + 0.60000000e-3z - 0.24000000e-2 = 0$$

と曲線  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 0$  の交点：

$$P_1(-0.1476643e-3 + 0.6279183e-14i, -0.2476671e-3 + 0.6282391e-14i, \\ -0.1125440e-3 + 0.1283186e-12i)$$

これに対して、根に近づくQは三つで、それらは

$$Q_{11}(-0.2582940e-2 + 0.1248861e-11i, 0.2188572e-2 - 0.1236822e-11i, \\ -0.1122699e-3 + 0.1278662e-12i)$$

$$Q_{12}(-0.3280380e-3 + 0.2561272e-13i, -0.6722207e-4 - 0.1306106e-13i, \\ -0.1125237e-3 + 0.1282933e-12i)$$

$$Q_{13}(-0.2726571e-4 - 0.1142992e-12i, -0.3681133e-3 + 0.1269100e-12i, \\ -0.1125575e-3 + 0.1283476e-12i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 0.6957039, 1.015011, 1.064601

で和は, 2.775316

$$P_2(-0.4274222e-4 - 0.2441751e-3i, -0.1427693e-3 - 0.2441554e-3i, \\ -0.1081768e-2 + 0.7871484e-3i)$$

これに対して、根に近づくQは三つで、それらは

$$Q_{21}(-0.1083787e-1 + 0.5442384e-2i, 0.1065714e-1 - 0.5926496e-2i, \\ -0.1074563e-2 + 0.7725007e-3i)$$

$$Q_{22}(-0.2348126e-3 - 0.3946234e-3i, 0.4926330e-4 - 0.9358543e-4i, \\ -0.1081442e-2 + 0.7871601e-3i)$$

$$Q_{23}(0.9265871e-3 - 0.8388913e-3i, -0.1112569e-2 + 0.3501976e-3i, \\ -0.1082349e-2 + 0.7885547e-3i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 0.5147996, 1.010916, 0.8157182

で和は, 2.341434

$$P_3(-0.4274222e-4 + 0.2441751e-3i, -0.1427693e-3 + 0.2441554e-3i, \\ -0.1081768e-2 - 0.7871484e-3i)$$

これに対して、根に近づくQは三つで、それらは

$$Q_{31}(-0.1083787e-1 - 0.5442384e-2i, 0.1065714e-1 + 0.5926496e-2i, \\ -0.1074563e-2 - 0.7725007e-3i)$$

$$Q_{32}(-0.2348126e-3 + 0.3946234e-3i, 0.4926330e-4 + 0.9358543e-4i, \\ -0.1081442e-2 - 0.7871601e-3i)$$

$$Q_{33}(0.9265871e-3 + 0.8388913e-3i, -0.1112569e-2 - 0.3501976e-3i, \\ -0.1082349e-2 - 0.7885547e-3i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 0.5147996, 1.010916, 0.8157182

で和は, 2.341434

$$P_4(0.4934786e-4 + 0.3985555e-4i, -0.5065196e-4 + 0.3985529e-4i, \\ 0.7178131e-5 - 0.1043782e-4i)$$

これに対して、根に近づくQは三つで、それらは

$$Q_{41}(-0.4230572e-5 + 0.6001226e-4i, 0.2924927e-5 + 0.1969428e-4i, \\ 0.7177957e-5 - 0.1043711e-4i)$$

$$Q_{42}(-0.1859243e-5 + 0.3626074e-4i, 0.5554873e-6 + 0.4344602e-4i, \\ 0.7177726e-5 - 0.1043731e-4i)$$

$$Q_{43}(0.6126399e-4 + 0.2125239e-3i, -0.6258188e-4 - 0.1328123e-3i, \\ 0.7180019e-5 - 0.1043670e-4i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 1.011887, 1.023593, 0.8930571

で和は, 2.928537

$$P_5(0.4934786e-4 - 0.3985555e-4i, -0.5065196e-4 - 0.3985529e-4i, \\ 0.7178131e-5 + 0.1043782e-4i)$$

これに対して、根に近づくQは三つで、それらは

$$Q_{51}(-0.4230572e-5 - 0.6001226e-4i, 0.2924927e-5 - 0.1969428e-4i, \\ 0.7177957e-5 + 0.1043711e-4i)$$

$$Q_{52}(-0.1859243e-5 - 0.3626074e-4i, 0.5554873e-6 - 0.4344602e-4i, \\ 0.7177726e-5 + 0.1043731e-4i)$$

$$Q_{53}(0.6126399e-4 - 0.2125239e-3i, -0.6258188e-4 + 0.1328123e-3i, \\ 0.7180019e-5 + 0.1043670e-4i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 1.011887, 1.023593, 0.8930571

で和は, 2.928537

$$P_6(0.7465865e-4 - 0.5345677e-4i, -0.2534289e-4 - 0.5345553e-4i, \\ -0.6158907e-4 + 0.4967522e-4i)$$

これに対して、根に近づくQは三つで、それらは

$$Q_{61}(-0.3897596e-3 + 0.6449818e-4i, 0.4390650e-3 - 0.1713550e-3i, \\ -0.6156632e-4 + 0.4964489e-4i)$$

$$Q_{62}(0.1850945e-4 - 0.1012025e-3i, 0.3079844e-4 - 0.5706166e-5i, \\ -0.6158324e-4 + 0.4967537e-4i)$$

$$Q_{63}(0.8832496e-4 - 0.7071384e-4i, -0.3901037e-4 - 0.3620078e-4i, \\ -0.6158905e-4 + 0.4967696e-4i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 0.7999210, 1.005135, 1.137609

で和は, 2.942665

$$P_7(0.7465865e-4 + 0.5345677e-4i, -0.2534289e-4 + 0.5345553e-4i, \\ -0.6158907e-4 - 0.4967522e-4i)$$

これに対して、根に近づくQは三つで、それらは

$$Q_{71}(-0.3897596e-3 - 0.6449818e-4i, 0.4390650e-3 + 0.1713550e-3i, \\ -0.6156632e-4 - 0.4964489e-4i)$$

$$Q_{72}(0.1850945e-4 + 0.1012025e-3i, 0.3079844e-4 + 0.5706166e-5i, \\ -0.6158324e-4 - 0.4967537e-4i)$$

$$Q_{73}(0.8832496e-4 + 0.7071384e-4i, -0.3901037e-4 + 0.3620078e-4i, \\ -0.6158905e-4 - 0.4967696e-4i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 0.7999210, 1.005135, 1.137609

で和は, 2.942665

$$P_8(0.6041409e-4 + 0.1397983e-5i, -0.3958007e-4 + 0.1405425e-5i, \\ 0.2335833e-3 + 0.2976659e-3i)$$

これに対して、根に近づくQは三つで、それらは

$$Q_{81}(-0.2023437e-3 - 0.2641735e-3i, 0.2231730e-3 + 0.2669706e-3i, \\ 0.2336010e-3 + 0.2975256e-3i)$$

$$Q_{82}(0.2976993e-4 + 0.1673435e-4i, -0.8936596e-5 - 0.1393071e-4i, \\ 0.2335716e-3 + 0.2976603e-3i)$$

$$Q_{83}(0.2282726e-2 + 0.2833847e-2i, -0.2261854e-2 - 0.2830979e-2i, \\ 0.2332593e-3 + 0.2989889e-3i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 0.7913489, 1.041886, 0.553750  
で和は、2.3869851

$$P_9(0.6041409e-4 - 0.1397983e-5i, -0.3958007e-4 - 0.1405425e-5i, \\ 0.2335833e-3 - 0.2976659e-3i)$$

これに対して、根に近づく  $Q$  は三つで、それらは

$$Q_{91}(-0.2023437e-3 + 0.2641735e-3i, 0.2231730e-3 - 0.2669706e-3i, \\ 0.2336010e-3 - 0.2975256e-3i)$$

$$Q_{92}(0.2976993e-4 - 0.1673435e-4i, -0.8936596e-5 + 0.1393071e-4i, \\ 0.2335716e-3 - 0.2976603e-3i)$$

$$Q_{93}(0.2282726e-2 - 0.2833847e-2i, -0.2261854e-2 + 0.2830979e-2i, \\ 0.2332593e-3 - 0.2989889e-3i)$$

したがって、無限小の程度を示す指数は、それぞれ 0.7913489, 1.041886, 0.553750  
で和は、2.3869851

以上より、無限小の指数の総和は、23.9746 で、重複度は 24.

#### 参考文献

- [1] J.G. Semple and L. Roth, Introduction to Algebraic Geometry, 1949, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford.
- [2] Robert J. Walker, Algebraic curves, 1950, Springer-Verlag