

context-free grammars の associate languages の
生成する full semi-AFL について

東大 理 田中 秀尚

§1. 序

context-free grammars の拡張として様々な regulated rewriting systems (例えば, matrix grammars, control grammars, programmed grammars など) が考案されており, 互いに密接な関係を持っている。本稿では matrix languages 全体 M^A の研究手段として, context-free grammars の associate languages 全体 A の生成する full semi-AFL $\hat{f}(A)$ を考察することにしよう。

定義 1. $G=(V_N, \Sigma_T, X_0, P)$ を context-free grammar (以後 cfg と略記) とし, P (productions の集合) を alphabet とみなすことにしよう。

$\alpha \in P^*$, $u, v \in (V_N \cup \Sigma_T)^*$ とするとき, $u \xrightarrow[\alpha]{*} v$ (α は, u から v への derivation の control word である) を次の

ように定義する。

(i) 任意の $(V_N \cup \Sigma_T)^*$ の元 u に対して, $u \xrightarrow[G]{\lambda}^* u$ 。

但し, λ は empty word を示す。

(ii) $u, v \in (V_N \cup \Sigma_T)^*$, $\pi = X \rightarrow z \in P$ とすると,

$$uXv \xrightarrow[G]{\pi}^* uzv.$$

(iii) $u \xrightarrow[G]{\alpha}^* v$ かつ $v \xrightarrow[G]{\beta}^* w$ ならば, $u \xrightarrow[G]{\alpha\beta}^* w$ 。

G の associate language $A(G)$ (Moriya, 1973) を次で定義する。

$$A(G) = \{ \alpha \in P^* \mid \exists w \in \Sigma_T^*, x_0 \xrightarrow[G]{\alpha}^* w \}.$$

各 $n \geq 1$ に対して $\mathcal{A}(n)$ を

$$\mathcal{A}(n) = \{ A(G) \mid G = (V_N, \Sigma_T, x_0, P) \text{ は cfg で, } \\ \#V_N \leq n \}$$

と定義し, $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(n)$ とおこう。

本稿では, control grammar とは, cfg $G = (V_N, \Sigma_T, x_0, P)$ と, P 上の language C との対 (G, C) を意味することとする。 (G, C) によって生成される language $L(G, C)$ は

$$L(G, C) = \{ w \in \Sigma_T^* \mid \exists \alpha \in C, x_0 \xrightarrow[G]{\alpha}^* w \}$$

で定義する。

一般に, $\mathcal{L}$ を languages の family とするとき, $\mathcal{L}^\lambda(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{L})$ をそれぞれ次のように定義する。

$$\mathcal{L}^\lambda(\mathcal{L}) = \{ L(G, C) \mid C \in \mathcal{L} \},$$

$$\mathcal{L}_2(\mathcal{L}) = \{ L(G, C) \mid C \in \mathcal{L}, G \text{ は } \lambda\text{-free cfg} \}.$$

regular languages 全体を $\mathcal{R}$, matrix languages 全体を M^λ と書くことにすれば, よく知られているように,
 $M^\lambda = \mathcal{L}_2^\lambda(\mathcal{R})$ となる (Salomaa [2], 1970)。

§2. Q-automata と $\mathcal{L}_2^\lambda$

$\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ を受理する automata として, Q-automata を定義しよう。 N, Z でそれぞれ自然数全体, 整数全体を表わすこととする。又, 一般に, 二項関係 ρ に対して, ρ^* で, ρ の reflexive transitive closure を表わすことにする。

定義 2. Q-automaton とは次のような六つ組 $M = (n, K, \Sigma, q_0, F, P)$ である。

- (i) n は正整数で, M の degree と呼ばれる。
- (ii) K と Σ とは alphabets で, $K \cap \Sigma = \emptyset$ 。
- (iii) $q_0 \in K, F \subseteq K$ 。
- (iv) P は $K \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times K \times N^n \times N^n$ の有限部分集合。 P が特に $K \times \Sigma \times K \times N^n \times N^n$ の部分集合であるとき, M を λ -free と呼ぶ。

$K \times \Sigma^* \times N^n$ 上の二項関係 $\Rightarrow_M$ を次のように定義する。

$(p, a, q, x, y) \in P, w \in \Sigma^*, z \in N^n$ のとき, $z \geq x$ ならば,

$$(p, aw, z) \xrightarrow{M} (q, w, z - \lambda + y).$$

Q-automaton M の受理する language $L(M)$ は次で定義する。

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F, (q_0, w, 0_n) \xrightarrow{M}^* (p, \lambda, 0_n) \}.$$

ここで $0_n = (0, 0, \dots, 0) \in N^n$ 。

各 $n \geq 1$ に対して, degree n の (λ -free) Q-automata で受理される languages 全体を $\mathcal{Q}^\lambda(n)$ ($\mathcal{Q}(n)$) で表わし, $\mathcal{Q}^\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}^\lambda(n)$, $\mathcal{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}(n)$ と書くことにしよう。

定義 3. $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ を languages の families としよう。

$$\mathcal{L} + (\lambda) = \mathcal{L} \cup \{ L \cup \{\lambda\} \mid L \in \mathcal{L} \}.$$

$$H_p(\mathcal{L}) = \{ h(L) \mid L \in \mathcal{L}, h \text{ は length-preserving homo.} \}.$$

$$H_d(\mathcal{L}) = \{ h(L) \mid L \in \mathcal{L}, h \text{ は decreasing homo.} \}.$$

$$\mathcal{L}_1 \wedge \mathcal{L}_2 = \{ L_1 \cap L_2 \mid L_1 \in \mathcal{L}_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 \}.$$

各 $n \geq 1$ に対して, $\wedge^n \mathcal{L}$ を次のように定義する。

$$\wedge^1 \mathcal{L} = \mathcal{L}, \quad \wedge^{m+1} \mathcal{L} = (\wedge^m \mathcal{L}) \wedge \mathcal{L}.$$

$\mathcal{L}$ を含む最小の (full) semi-AFL を $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ ($\hat{\mathcal{S}}(\mathcal{L})$) で表わす。特に, $\mathcal{L} = \{L\}$ のとき, $\mathcal{S}(L)$ ($\hat{\mathcal{S}}(L)$) と略記し, L を $\mathcal{S}(L)$ ($\hat{\mathcal{S}}(L)$) の (full) m-generator と呼ぶ。

$\mathcal{L}$ を含んで intersection で閉じている最小の (full) semi-AFL は $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_p(\wedge^n \mathcal{S}(\mathcal{L}))$ ($\bigcup_{n=1}^{\infty} H_d(\wedge^n \hat{\mathcal{S}}(\mathcal{L}))$) で表わされる。

([3], [4] 参照)

定理 1. 各 $n \geq 1$ に対して,

$$\alpha(n) = H_p(\wedge^n \alpha(1)), \quad \alpha^\wedge(n) = H_d(\wedge^n \alpha(1)).$$

$\alpha(1)$ は semi-AFL, $\alpha^\wedge(n)$ は full semi-AFL である。

定理 2. D_1 を 1-Dyck language とすると,

$$\alpha(1) = \mathcal{S}(D_1).$$

系 1. 各 $n \geq 1$ に対して,

$$\alpha(n) = H_p(\wedge^n \mathcal{S}(D_1)), \quad \alpha^\wedge(n) = H_d(\wedge^n \mathcal{S}(D_1)).$$

系 2. $\alpha(\alpha^\wedge)$ は D_1 を含んで intersection で閉じている最小の (full) semi-AFL である。

定義 4. Σ 上の languages L_1, L_2 に対して,

$$\text{Shuffle}(L_1, L_2) = \{x_1 y_1 \cdots x_n y_n \mid n \geq 1, x_1 \cdots x_n \in L_1, \\ y_1 \cdots y_n \in L_2, \forall x_i, y_i \in \Sigma^*\}$$

と定義する。このとき, $L_1 \subseteq \Sigma_1^*, L_2 \subseteq \Sigma_2^*, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ とす

ると, $H_p(\mathcal{S}(L_1) \wedge \mathcal{S}(L_2)) = \mathcal{S}(\text{Shuffle}(L_1, L_2)),$

$$\begin{aligned} H_d(\mathcal{S}(L_1) \wedge \mathcal{S}(L_2)) &= H_d(\hat{\mathcal{S}}(L_1) \wedge \hat{\mathcal{S}}(L_2)) \\ &= \hat{\mathcal{S}}(\text{Shuffle}(L_1, L_2)) \end{aligned}$$

となる (Ginsburg, Greibach [4], 1970)。この結果を利

用して、各 $Q(n)$ の m -generator を求めることができる。

各 $n \geq 1$ に対して、 $D_1^{(n)}$ を cfg

$$G_n = (\{X\}, \{a_n, b_n\}, X, \{X \rightarrow XX, X \rightarrow a_n X b_n, X \rightarrow \lambda\})$$

で生成される 1-Dyck language とし、language $Q(n)$ を、

$$Q(1) = D_1^{(1)},$$

$$Q(m+1) = \text{Shuffle}(Q(m), D_1^{(m+1)})$$

で定義する。

系 3. 各 $n \geq 1$ に対して、

$$Q(n) = \mathcal{S}(Q(n)), \quad Q^\lambda(n) = \hat{\mathcal{S}}(Q(n)).$$

$Q(n) \supseteq Q^\lambda(n)$ 及び $Q(n) \in \mathcal{S}(Q^\lambda(n)) + (\lambda)$ を示すことによつて次の定理を証明することができる。

定理 3. 各 $n \geq 1$ に対して、

$$Q(n) = \mathcal{S}(Q^\lambda(n)) + (\lambda), \quad Q^\lambda(n) = \hat{\mathcal{S}}(Q(n)).$$

系 4. $Q = \mathcal{S}(Q^\lambda) + (\lambda), \quad Q^\lambda = \hat{\mathcal{S}}(Q).$

次に Q^λ に含まれている languages の例をいくつかあげよう。

定理 4. 各 $n \geq 1$ に対して,

$$A(n) = \{ xcx^R \mid x \in (a^*b)^{n-1}a^* \},$$

$$A'(n) = \{ a^{k_1}b \dots ba^{k_n}c a^{r_1}b \dots ba^{r_n} \mid \forall i, k_i \geq r_i \geq 0 \},$$

$$B(n) = \{ xcx \mid x \in (a^*b)^{n-1}a^* \},$$

$$B'(n) = \{ a^{k_1}b \dots ba^{k_n}c a^{r_1}b \dots ba^{r_n} \mid \forall i, k_i \geq r_i \geq 0 \}$$

とおく。各 $n \geq 1$ に対して,

$$A(n+1), A'(n+1), B(n+1), B'(n+1) \in \mathcal{A}(n+1) - \mathcal{A}(n)。$$

系 5. $\mathcal{A}(1) \subset \mathcal{A}(2) \subset \dots \subset \mathcal{A}(n) \subset \dots \subset \mathcal{A}$ は, 真の hierarchy である。

系 6. $\{ xcx^R \mid x \in \{a, b\}^* \}$ や $\{ xcx \mid x \in \{a, b\}^* \}$ は $\mathcal{A}$ に含まれない。

私達は定理 4 が $\mathcal{A}^\lambda(n)$ に対しても成立すると予想しているが, 証明はできていない。

例 1. 各 $i = 1, 2$ に対して, degree 2 の Q-automaton $M_i = (2, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c, d, e\}, q_0, \{q_3\}, P_i)$ を次のように定義しよう。

$$P_1 = \{ (q_0, a, q_1, (0, 0), (1, 0)), (q_1, b, q_1, (1, 0), (0, 1)),$$

$(q_1, c, q_2, (0,0), (1,0)), (q_2, d, q_2, (0,1), (1,0)),$
 $(q_2, a, q_1, (0,0), (1,0)), (q_2, e, q_3, (2,0), (0,0)),$
 $(q_3, e, q_3, (2,0), (0,0))\},$

$P_2 = \{(q_0, a, q_1, (0,0), (1,0)), (q_1, b, q_1, (1,0), (0,1)),$
 $(q_1, c, q_2, (0,0), (0,0)), (q_2, d, q_2, (0,1), (2,0)),$
 $(q_2, a, q_1, (0,0), (0,0)), (q_2, e, q_3, (1,0), (0,0)),$
 $(q_3, e, q_3, (1,0), (0,0))\}.$

例えば, $L(M_1)$ の元 $abcdab^3cd^2ab^3cd^4e^3$ の計算過程, 及び
 $L(M_2)$ の元 $abcdab^2cd^2ab^4cd^2abcdabcd^3e^{10}$ の計算過程は
 それぞれ 図 1, 2 に示されている。

図 1.

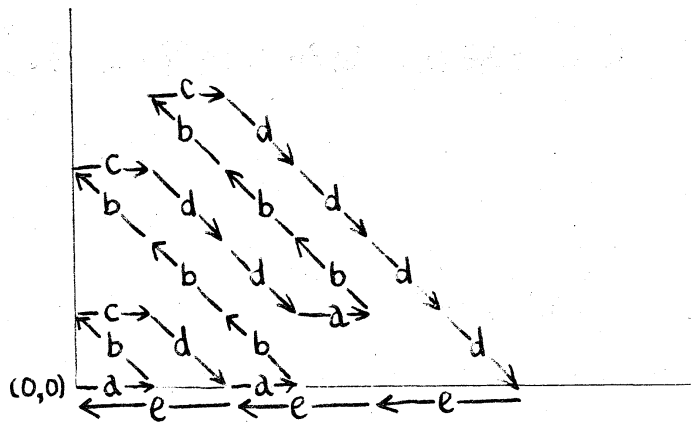
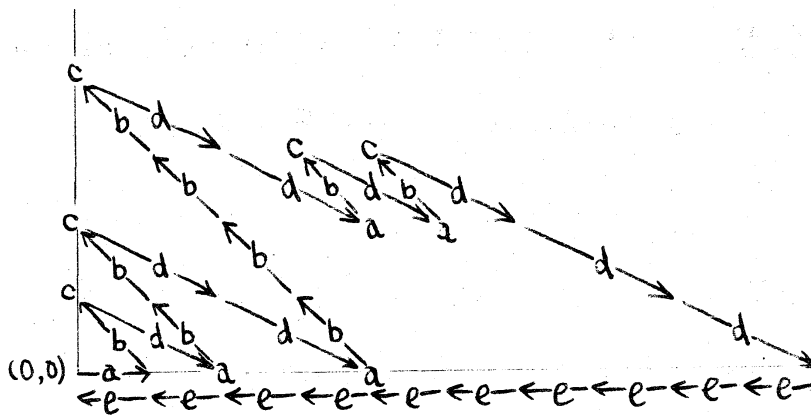


図 2.



$\{a, b, c, d, e\}$ 上の Parikh mapping Φ を $\Phi(a) = (1, 0, 0, 0, 0)$,
 $\Phi(b) = (0, 1, 0, 0, 0)$, $\Phi(c) = (0, 0, 1, 0, 0)$, $\Phi(d) = (0, 0, 0, 1, 0)$, $\Phi(e) =$
 $(0, 0, 0, 0, 1)$ と定義すると,

$$\Phi(L(M_1)) = \{(n, m, n, m, n) \mid n \geq 1, n^2 \geq m \geq 1\},$$

$$\Phi(L(M_2)) = \{(n, m-1, n, m-1, m) \mid n \geq 1, 2^n \geq m \geq 1\}.$$

従って, $\{a^n b^m \mid n \geq 1, n^2 \geq m \geq 1\}$ や $\{a^n b^m \mid n \geq 1, 2^n \geq m \geq 1\}$ は $\mathcal{A}^{\lambda}(2)$ に含まれる。

§3. $\mathcal{A}^{\lambda}$ と M^{λ}

$\mathcal{A}^{\lambda}$ と M^{λ} が密接な関係を持っていることは, 次のような
 事実 (定理) 及び未解決の問題の同等性 (系) から知ることが
 できる。

定理 5. $M^{\lambda} \supseteq \mathcal{A}^{\lambda}$ 。

系 7. M^{λ} に対する emptiness problem と, $\mathcal{A}^{\lambda}$ に対す
 る emptiness problem とは同等である。

定理 6. $M^{\lambda} = \mathcal{L}^{\lambda}(\mathcal{A}^{\lambda}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}^{\lambda}) + (\lambda)$ 。更に, 各 matrix
 $\text{language}_{\lambda}^L$ に対して, 適当な λ -free cfg G と $\mathcal{A}^{\lambda}$ の元 C を
 とることができて, $L - \{\lambda\} = L(G, C)$ かつ, G は $X \rightarrow Y$ ($X,$

γ は nonterminals) のような production を持たない。

系 8. context-sensitive languages 全体を $\mathcal{C}$ としよう。

問題 “ $\mathcal{M}^\wedge \subseteq \mathcal{C}$?” と問題 “ $\mathcal{A}^\wedge \subseteq \mathcal{C}$?” とは同等である。

Salomaa は [5] (1970) で, $\mathcal{M}^\wedge$ は nonregular one-letter language を含まないという予想を述べている。と, $\mathcal{B}$ をそれぞれ commutative languages 全体, bounded languages 全体としよう。

定理 7. $\mathcal{M}^\wedge \cap \mathcal{C} = \mathcal{A}^\wedge \cap \mathcal{C}$, $\mathcal{M}^\wedge \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}^\wedge \cap \mathcal{B}$ 。

系 9. $\mathcal{M}^\wedge$ が nonregular one-letter language を含まないということと, $\mathcal{A}^\wedge$ が nonregular one-letter language を含まないということとは同値である。

§4. commutative automata と $\mathcal{L}_c^\wedge$

系 7 ~ 9 に述べられている問題は残念ながら未解決である。
Q-automata を少し変形して得られる $\mathcal{A}^\wedge$ の subfamily $\mathcal{L}_c^\wedge$ について, これらの問題を考えてみよう。Q-automata の記憶部は, 非負整数の vector であったが, この非負条件を取

り去, た automata を次のように定義しよう。

定義 5. commutative automaton とは次のような六つ組 $M = (n, K, \Sigma, q_0, F, P)$ である。

- (i) n は正整数で, M の degree と呼ばれる。
- (ii) K と Σ とは alphabets で, $K \cap \Sigma = \emptyset$ 。
- (iii) $q_0 \in K, F \subseteq K$ 。
- (iv) P は $K \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times K \times \mathbb{Z}^n$ の有限部分集合。
特に $P \subseteq K \times \Sigma \times K \times \mathbb{Z}^n$ のとき, M を λ -tree と呼ぶ。

$K \times \Sigma^* \times \mathbb{Z}^n$ 上の二項関係 $\Rightarrow$ を次のように定義する。

$(p, a, q, x) \in P, w \in \Sigma^*, y \in \mathbb{Z}^n$ のとき,

$$(p, aw, q, y) \Rightarrow_M (p, a, q, x+y)。$$

M の受理する language $L(M)$ は次で定義される。

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F, (q_0, w, 0_n) \Rightarrow_M^* (p, \lambda, 0_n) \}。$$

各 $n \geq 1$ に対して, degree n の (λ -tree) commutative automata で受理される languages 全体を $\mathcal{L}_c^\lambda(n)$ ($\mathcal{L}_c(n)$) で表わし, $\mathcal{L}_c^\lambda = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{L}_c^\lambda(n)$, $\mathcal{L}_c = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{L}_c(n)$ とおく。

定理 8. 各 $n \geq 1$ に対して,

$$\mathcal{L}_c(n) = H_p(\wedge^n \mathcal{L}_c(1)), \quad \mathcal{L}_c^\lambda(n) = H_d(\wedge^n \mathcal{L}_c(1))。$$

定理 9. $\mathcal{L}_C(1) = \mathcal{S}(0)$ 。ここで,

$$0 = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) = N_b(w)\},$$

$N_e(w)$ は w に現われる symbol e の個数を示す。

系 10. 各 $n \geq 1$ に対して,

$$\mathcal{L}_C(n) = H_P(\wedge^n \mathcal{S}(0)), \quad \mathcal{L}_C^\lambda(n) = H_d(\wedge^n \mathcal{S}(0)).$$

系 11. $\mathcal{L}_C(\mathcal{L}_C^\lambda)$ は 0 を含んで intersection で閉じている最小の (full) semi-AFL である。

定義 6. 各 $n \geq 1$ に対して, dimension n の origin-crossing language $O(n)$ を

$$O(n) = \{w \in \{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}^* \mid \forall i, N_{a_i}(w) = N_{b_i}(w)\}$$

で定義する (Fischer et al., 1968)。

系 12. 各 $n \geq 1$ に対して,

$$\mathcal{L}_C(n) = \mathcal{S}(O(n)), \quad \mathcal{L}_C^\lambda(n) = \hat{\mathcal{S}}(O(n)).$$

定理 10. semilinear property を持つ commutative languages 全体を $\mathcal{C}_{SL}$ と表わすことにすれば,

$$\mathcal{L}_C = \mathcal{S}(\mathcal{C}_{SL}), \quad \mathcal{L}_C^\lambda = \hat{\mathcal{S}}(\mathcal{C}_{SL}).$$

従って, L_C^λ に対する emptiness, finiteness problems は帰納的に可解となり, かつ又, L_C^λ は nonregular one-letter language を含まない (Ginsburg, Spanier [7], 1971)。

定理 11. 各 $n \geq 1$ に対して, $L_C^\lambda(n) = L_C(n)$ 。

系 13. $L_C^\lambda = L_C$, 即ち, $\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{SL}) = \mathcal{L}(\mathcal{L}_{SL})$ 。

deterministic context sensitive languages 全体を $\mathcal{L}^{SD}$ と表わすことにしよう。 $\mathcal{L}^{SD}$ は intersection で閉じている AFL で, context-free languages (cfl's と略記) 全体 $\mathcal{L}$ を含んでいる。 $\mathcal{L}$ は cfl であるから 次の定理が成立する。

定理 12. $L_C^\lambda = \hat{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{SL}) \subseteq \mathcal{L}^{SD}$ 。

L_C^λ を利用すると, [7] で残された「 $\mathcal{L}_{SL}$ によって生成される full AFL $\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{SL})$ は full principal AFL であるか。」という問題を解くことができる。 $A(n), A'(n), B(n), B'(n)$ は 定理 4 で定義された languages とする。

定理 13. 各 $n \geq 1$ に対して,

$$C(n) = \{ (a^k c)^n a^k \mid k \geq 0 \}$$

とおく。各 $n \geq 1$ に対して,

$$A(n+1), A'(n+1), B(n+1), B'(n+1), C(n+1) \in \mathcal{L}_C^\lambda(n+1) - \mathcal{L}_C^\lambda(n).$$

languages の family $\mathcal{L}$ に対して, $\mathcal{L}$ を含んでいる ($\mathcal{L}$ を含んで λ -free substitution で閉じている) 最小の AFL を $F(\mathcal{L})$ ($\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$) で表わすことにしよう。 $B(n), C(n)$ は 次のような強い性質を持っている。 language L が 性質 (I3) ((I2)) を持っているとき, L を type 3 (type 2) の invariant language と呼ぶ ([8] の Part 3 参照)。

(I3) 任意の semi-AFL $\mathcal{L}$ に対して, L が $F(\mathcal{L})$ に含まれれば, L は $\mathcal{L}$ に含まれる。

(I2) 任意の semi-AFL $\mathcal{L}$ に対して, L が $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ に含まれれば, L は $\mathcal{L}$ に含まれる。

$A(n), B(n), C(n)$ は type 3 の invariant language であり, 更に, $n \geq 2$ であれば, $B(n), C(n)$ は type 2 の invariant language である。従って次の系が得られる。

系 14. $\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{C}_{SL})$ は full principal AFL ではない。

系 15. 次の包含関係は 真の包含関係である。

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_C^\lambda(1) \subset \mathcal{L}_C^\lambda(2) \subset \dots \subset \mathcal{L}_C^\lambda(n) \subset \dots \subset \mathcal{L}_C^\lambda (= \hat{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{SL})) \\
& \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L}_C^\lambda(1)) \subset \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L}_C^\lambda(2)) \subset \dots \subset \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L}_C^\lambda(n)) \subset \dots \subset \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L}_C^\lambda) (= \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L}_{SL})) \\
& \hat{\mathcal{F}}_n(\mathcal{L}_C^\lambda(1)) \subset \hat{\mathcal{F}}_n(\mathcal{L}_C^\lambda(2)) \subset \dots \subset \hat{\mathcal{F}}_n(\mathcal{L}_C^\lambda(n)) \subset \dots \subset \hat{\mathcal{F}}_n(\mathcal{L}_C^\lambda) (= \hat{\mathcal{F}}_n(\mathcal{L}_{SL})).
\end{aligned}$$

但し, $\mathcal{L}_C^\lambda$ が AFLでないことは, $(C(1)b)^* \notin \mathcal{L}_C^\lambda$ からわかる。

最後に, $\mathcal{L}_C^\lambda$ は, $\mathcal{Q}$ の subfamily であることに注意しよう。

定理 14. 各 $n \geq 1$ に対して, $\mathcal{Q}(2n) \supset \mathcal{L}_C^\lambda(n)$ 。

系 16. $\mathcal{Q} \supset \mathcal{L}_C^\lambda$ 。この包含関係は, $\mathcal{Q}$ が semilinear property を持たない (例 1) から, 真の包含関係である。

§5. まとめ

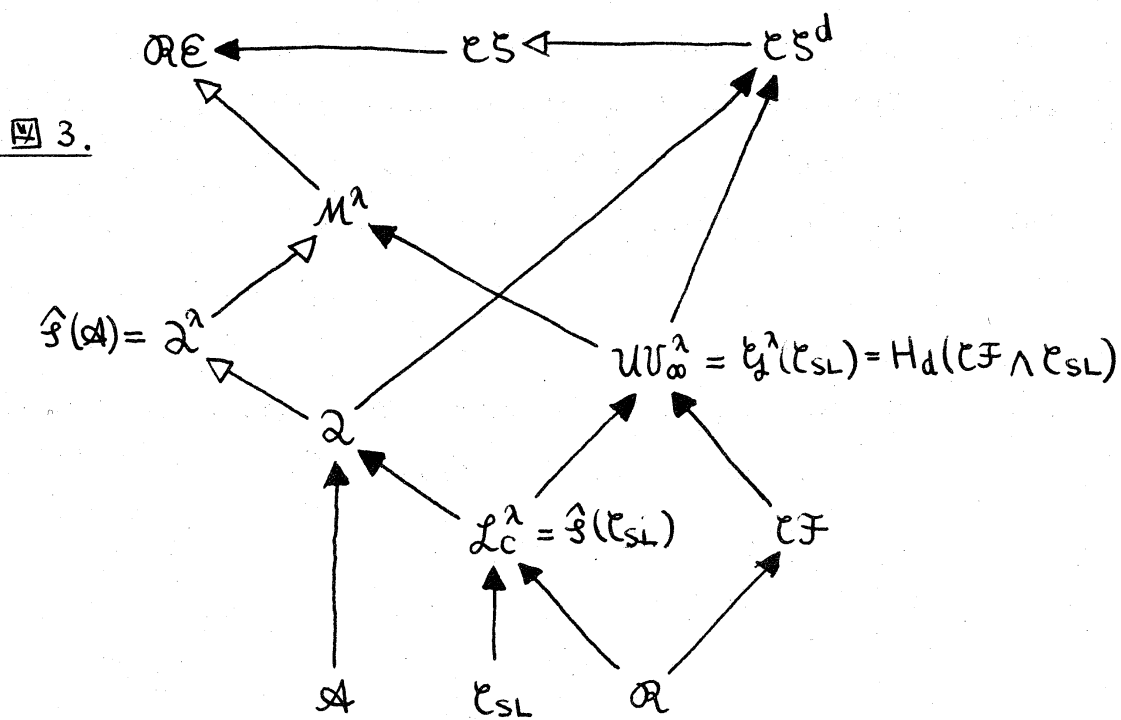
系 7 ~ 9 で述べられている $\mathcal{M}^\lambda$ に対する問題は, $\mathcal{Q}^\lambda$ に対する問題と制限しても同等であること (§3), 及び, $\mathcal{Q}^\lambda$ の subfamily $\mathcal{L}_C^\lambda$ に対する問題と制限すれば解決されること (§4) をみてきた。 $\mathcal{L}_C^\lambda$ に対する結果は, Cremers と Mayer ([9], [10]) によって定義された generalized unordered vector languages 全体 $\mathcal{UV}_\infty^\lambda$ にまで拡張できることを注意しておこう。

定理 15. $\mathcal{UV}_\infty^\lambda = \mathcal{G}^\lambda(\mathcal{L}_{SL}) = \mathcal{G}(\mathcal{L}_{SL}) + (\lambda) = \mathcal{UV}_\infty + (\lambda)$ 。更

に, UV_{∞}^{λ} の元 L に対して, 適当な λ -free cfg G と $\mathcal{C}_{SL}$ の元 C をとることができて, $L - \{\lambda\} = L(G, C)$ かつ G は $X \rightarrow Y$ (X, Y は G の nonterminals) のような production を持たない。

系 17. $UV_{\infty}^{\lambda} \subseteq \mathcal{C}_S^d$ 。

本稿でふれた families の包含関係は, 図 3 のように表わすことができる。



RE は recursively enumerable languages 全体をさしている。

$\leftarrow$ は, 包含関係が真であることを示し, $\nwarrow$ は, 包含関係が真であるかどうか未解決であることを示している。

本稿では省略した定理の証明等の詳細は筆者の論文[8]を参照されたい。

参考文献

- [1] E. Moriya, Associate languages and derivational complexity of formal grammars and languages, Information and Control 22 (1973), 139-162.
- [2] A. Salomaa, Periodically time-variant context-free grammars, Information and Control 17 (1970), 294-311.
- [3] S. Greibach and S. Ginsburg, Multitape AFA, J. Assoc. Comput. Mach. 19 (1972), 193-221.
- [4] S. Ginsburg and S. Greibach, Principal AFL, J. Comput. System Sci. 4 (1970), 308-338.
- [5] A. Salomaa, On some families of formal languages obtained by regulated derivations, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI. 479 (1970).
- [6] P. C. Fischer, A. R. Meyer, and A. L. Rosenberg, Counter machines and counter languages, Math. Systems Theory 2 (1968), 265-283.
- [7] S. Ginsburg and E. H. Spanier, AFL with the semilinear property, J. Comput. System Sci. 5 (1971), 365-396.
- [8] 田中, Elementary methods for formal language theory and matrix languages, 東大修士論文.
- [9] A. B. Cremers and O. Mayer, On matrix languages, Information and Control 23 (1973), 86-96.
- [10] A. B. Cremers and O. Mayer, On vector languages, J. Comput. System Sci. 8 (1974), 158-166.