

一列型 C_n 型 Macdonald 多項式と変形 Catalan 数

広島工業大学工学部 星野歩*

Ayumu Hoshino

Hiroshima Institute of Technology,

東京大学大学院数理科学研究科 白石潤一†

Graduate School of Mathematical Sciences,

The University of Tokyo

概要

一列型 C_n 型 Macdonald 多項式と単項対称多項式の間の遷移行列 C を具体的に求め、 C の各成分が、ある三項間漸化式を満たすことを示す。この三項間漸化式を用いて、遷移行列 C の成分が Catalan 数または ballot 数の変形を与えることを示す。また、一列型 C_n 型 Schur 多項式の一列型 C_n 型 Hall-Littlewood 多項式による展開係数 (Kostka 多項式) を、変形 ballot 数を用いて具体的に記述する。

1 はじめに

本稿では論文 [HS1] について得られた結果を紹介する。詳しい証明は論文を参照していただきたい。本稿で用いる主な記号を以下に記載する ([GR]).

$$\begin{aligned} (z; q)_\infty &= \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^k z), \quad (z; q)_k = \frac{(z; q)_\infty}{(q^k z; q)_\infty} \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ (a_1, a_2, \dots, a_r; q)_k &= (a_1; q)_k (a_2; q)_k \cdots (a_r; q)_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ {}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{r+1} \\ b_1, \dots, b_r \end{matrix}; q, z \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_{r+1}; q)_n}{(q, b_1, b_2, \dots, b_r; q)_n} z^n. \end{aligned}$$

* 本研究は JSPS 科研費 16K05186 の助成を受けています。

† 本研究は JSPS 科研費 15K04808, 16K05186 の助成を受けています。

2 一列型 Koornwinder 多項式の四重和公式

この節では, Koornwinder 多項式の定義と, 一列型 Koornwinder 多項式の明示公式を与える. n を正の整数とし, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ を変数とする. BC_n 型のワイル群を $W_n (\simeq \mathbb{Z}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n)$ とし, $\mathbb{C}[x_1^\pm, x_2^\pm, \dots, x_n^\pm]^{W_n}$ を W_n 不変な x の Laurent 多項式環とする. 長さ n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$) に対し, 単項対称多項式 $m_\lambda = m_\lambda(x)$ を

$$m_\lambda = \frac{1}{|\text{Stab}(\lambda)|} \sum_{\mu \in W_n \cdot \lambda} \prod_i x_i^{\mu_i}$$

で定める. ただし, $\text{Stab}(\lambda) = \{s \in W_n \mid s\lambda = \lambda\}$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ とする.

複素パラメタ a, b, c, d, q, t に対し, Koornwinder の q -差分作用素 $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_x(a, b, c, d|q, t)$ は次で与えられる [K].

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x = & \sum_{i=1}^n \frac{(1-ax_i)(1-bx_i)(1-cx_i)(1-dx_i)}{\alpha t^{n-1}(1-x_i^2)(1-qx_i^2)} \prod_{j \neq i} \frac{(1-tx_i x_j)(1-tx_i/x_j)}{(1-x_i x_j)(1-x_i/x_j)} (T_{q, x_i}^{+1} - 1) \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{(1-a/x_i)(1-b/x_i)(1-c/x_i)(1-d/x_i)}{\alpha t^{n-1}(1-1/x_i^2)(1-q/x_i^2)} \prod_{j \neq i} \frac{(1-tx_j/x_i)(1-t/x_i x_j)}{(1-x_j/x_i)(1-1/x_i x_j)} (T_{q, x_i}^{-1} - 1), \end{aligned}$$

ただし, $\alpha = (abcdq^{-1})^{1/2}$, $T_{q, x}^{\pm 1} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, q^{\pm 1} x_i, \dots, x_n)$ とする.

Definition 2.1 ([K]). Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x|a, b, c, d|q, t) \in \mathbb{C}[x_1^\pm, x_2^\pm, \dots, x_n^\pm]^{W_n}$ は, 次の 2 つの条件により, 一意に特徴づけられる.

$$\begin{aligned} (a) \quad & P_\lambda(x) = \sum_{\mu \leq \lambda} c_{\lambda, \mu} m_\mu(x) \quad (c_{\lambda, \lambda} = 1), \\ (b) \quad & \mathcal{D}_x P_\lambda(x) = d_\lambda P_\lambda(x), \end{aligned}$$

ここに, 分割 λ, μ の支配的順序は

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda_1 + \dots + \lambda_k \geq \mu_1 + \dots + \mu_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

で定め, 固有値 d_λ は

$$d_\lambda = \sum_{j=1}^n (\alpha t^{n-j} (q^{\lambda_j} - 1) + \alpha^{-1} t^{-n+j} (q^{-\lambda_j} - 1)) \quad (2.1)$$

とする.

Koornwinder 多項式は, パラメタを特殊化することによって, (B_n, B_n) , (C_n, C_n) , (D_n, D_n) 型の Macdonald 多項式に退化することが知られている ([K, Mac]).

本稿では, 一列型分割 (1^r) ($0 \leq r \leq n$) に対する Koornwinder 多項式 $P_{(1^r)}(x|a, b, c, d|q, t)$ (以下, 一列型 Koornwinder 多項式と呼ぶ) や, その退化多項式を扱う.

Definition 2.2. 対称な Laurent 多項式 $E_r(x)$ を次で定める.

$$\prod_{i=1}^n (1 - yx_i)(1 - y/x_i) = \sum_{r \geq 0} (-1)^r E_r(x) y^r.$$

分割 λ の共役を λ' とする. [Mim] で与えられた BC 型の核関数関係式を用いれば, m 個の変数 $y = (y_1, \dots, y_m)$ に関する Koornwinder の q -差分作用素の固有関数を用いることで, 長さが m 以下の分割 λ の共役 λ' に対する n 変数 ($n \geq m$) の Koornwinder 多項式 $P_{\lambda'}(x|a, b, c, d|q, t)$ を構成することができる ([HS1]). これを $m = 1$ の場合に適用する. Askey-Wilson 多項式の四重級数表示 ([HNS]) を用いることで次の定理を得る.

Theorem 2.3 ([HS1]).

$$P_{(1^r)}(x|a, b, c, d|q, t) = \sum_{k, l, i, j \geq 0} (-1)^{i+j} E_{r-2k-2l-i-j}(x) c_e(k, l; t^{n-r+1+i+j}) c_o(i, j; t^{n-r+1}),$$

ここに

$$\begin{aligned} c_e(k, l; s) &= \frac{(tc^2/a^2; t^2)_k (sc^2t; t^2)_k (s^2c^4/t^2; t^2)_k}{(t^2; t^2)_k (sc^2/t; t^2)_k (s^2a^2c^2/t; t^2)_k} \frac{(1/c^2; t)_l (s/t; t)_{2k+l}}{(t; t)_l (sc^2; t)_{2k+l}} \frac{1 - st^{2k+2l-1}}{1 - st^{-1}} a^{2k} c^{2l}, \\ c_o(i, j; s) &= \frac{(-a/b; t)_i (scd/t; t)_i}{(t; t)_i (-sac/t; t)_i} \frac{(s; t)_{i+j} (-sac/t; t)_{i+j} (s^2a^2c^2/t^3; t)_{i+j}}{(s^2abcd/t^2; t)_{i+j} (sac/t^{3/2}; t)_{i+j} (-sac/t^{3/2}; t)_{i+j}} \\ &\quad \times \frac{(-c/d; t)_j (sab/t; t)_j}{(t; t)_j (-sac/t; t)_j} b^i d^j. \end{aligned}$$

3 一列型 C_n 型 Macdonald 多項式の明示公式と matrix inversion

この節では, Koornwinder 多項式のパラメタを特殊化した多項式 $P_{(1^r)}(x|a, -a, c, -c|q, t)$ についての性質を調べる. Theorem 2.3 より, 次を得る.

Corollary 3.1. パラメータを $(a, b, c, d) \rightarrow (a, -a, c, -c)$ と特殊化する.

$$\begin{aligned} P_{(1^r)}(x|a, -a, c, -c|q, t) &= \sum_{\substack{k, l \geq 0 \\ 2k+2l \leq r}} E_{r-2k-2l}(x) \frac{(1/c^2; t)_l (s/t; t)_{2k+l}}{(t; t)_l (sc^2; t)_{2k+l}} \frac{1 - st^{2k+2l-1}}{1 - st^{-1}} c^{2l} \\ &\quad \times \frac{(tc^2/a^2; t^2)_k (sc^2t; t^2)_k (s^2c^4/t^2; t^2)_k}{(t^2; t^2)_k (sc^2/t; t^2)_k (s^2a^2c^2/t; t^2)_k} a^{2k} \quad (s = t^{n-r+1}). \end{aligned}$$

特に (C_n, C_n) 型, (D_n, D_n) 型 Macdonald 多項式はそれぞれ

$$\begin{aligned} P_{(1^r)}^{(C_n, C_n)}(x|b; q, t) &= P_{(1^r)}(x|b^{1/2}, -b^{1/2}, q^{1/2}b^{1/2}, -q^{1/2}b^{1/2}|q, t), \\ P_{(1^r)}^{(D_n, D_n)}(x|q, t) &= P_{(1^r)}(x|1, -1, q^{1/2}, -q^{1/2}|q, t) (= P_{(1^r)}^{(C_n, C_n)}(x|1; q, t)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

と表せる.

ここで

$$M(s, l) = (-1)^l s^{-l} \frac{(s^2/t^2; t^2)_l}{(t^2; t^2)_l} \frac{1 - s^2 t^{4l-2}}{1 - s^2 t^{-2}} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} -sa^2, -sc^2, s^2 t^{2l-2}, t^{-2l} \\ -s, -st, s^2 a^2 c^2/t \end{matrix}; t^2, t^2 \right]$$

と定めると、次の定理が得られる。

Theorem 3.2.

$$P_{(1r)}(x|a, -a, c, -c|q, t) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} M(t^{n-r+1}, l) E_{r-2l}(x).$$

Theorem 3.2 によって、 $P_{(1r)}(x|a, -a, c, -c|q, t)$ の $E_r(x)$ による展開係数が $M(s, l)$ で与えられることが示されたが、 $E_r(x)$ の $P_{(1r)}(x|a, -a, c, -c|q, t)$ による展開係数を求めることを考える。次の定理が知られている。

Theorem 3.3 ([B], p.1, Theorem, [L], p.5, Corollary). 下三角行列 $\mathcal{M}(u, v; x, y; q)$ の各成分を次で定める。

$$(r, r-2i) \text{ 成分: } \mathcal{M}_{r, r-2i}(u, v; x, y; q) = y^i v^i \frac{(x/y; q)_i}{(q; q)_i} \frac{(uq^{r-2i}; q)_{2i}}{(uq^{r-i}; q)_i (uyq^{r-2i+1}; q)_i},$$

その他の成分: 0.

このとき $\mathcal{M}(u, v; x, y; q) \mathcal{M}(u, v; y, x; q) = \mathcal{M}(u, v; x, z; q)$ となり、特に $\mathcal{M}(u, v; x, y; q)$ と $\mathcal{M}(u, v; y, x; q)$ は互いに逆行列となる。

Lemma 3.4. 次のように $d(u, v)_r$ を定める。

$$d(u, v)_r := \frac{(t^2 v^{1/2}; t)_r}{(u^{1/2}; t)_r} (u^{1/4}/v^{3/4})^r.$$

下三角行列 $\widetilde{\mathcal{M}}(u, v; x, y; t)$ の各成分を次で定める。

$$\begin{aligned} (r, r-2i) \text{ 成分: } \widetilde{\mathcal{M}}_{r, r-2i}(u, v; x, y; t) \\ &= \mathcal{M}_{r, r-2i}(u, v; x, y; t^2) \times d(u, v)_r / d(u, v)_{r-2i} \\ &= \frac{(x/y; t^2)_i}{(t^2; t^2)_i} \frac{(v^{1/2} t^{r-2i+2}; t)_{2i}}{(u^{1/2} t^{r-2i}; t)_{2i}} \frac{(ut^{2r-4i}; t^2)_{2i}}{(uxt^{2r-2i}; t^2)_i (uyt^{2r-4i+2}; t^2)_i} (yu^{1/2}/v^{1/2})^i, \end{aligned}$$

その他の成分: 0.

このとき $\widetilde{\mathcal{M}}(u, v; x, y; t)$ と $\widetilde{\mathcal{M}}(u, v; y, x; t)$ は互いに逆行列となる。

ここで、次の命題を得る。

Proposition 3.5. $s = t^{n-r+1}$ として

$$M(s, l) = \sum_{j=0}^l \widetilde{\mathcal{M}}_{r, r-2j}(t^{-2n+2}/c^4, t^{-2n-4}, c^2/ta^2, 1/t^2; t) \mathcal{M}_{r-2j, r-2l}(t^{-n}, t, 1/c^2, 1; t).$$

Proposition 3.5 は, $M(s, l)$ が因子化した成分を持つ 2 つの行列の積で記述され, かつ, それらの逆行列も因子化した成分を持つことを示している. よって $s = t^{n-r+1}$ に対し $\tilde{M}(s, l)$ を

$$\tilde{M}(s, l) = \sum_{j=0}^l \mathcal{M}_{r, r-2j}(t^{-n}, t, 1, 1/c^2; t) \tilde{\mathcal{M}}_{r-2j, r-2l}(t^{-2n+2}/c^4, t^{-2n-4}, 1/t^2, c^2/ta^2; t)$$

と定めれば, 次の定理を得る.

Theorem 3.6.

$$E_r(x) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \tilde{M}(t^{n-r+1}, l) P_{(1^r-2l)}(x|a, -a, c, -c|q, t).$$

また, $M(s, l)$ は q -超幾何級数 ${}_4\phi_3$ で表されていたが, $\tilde{M}(s, l)$ も同様の記述を持つことが示される.

Theorem 3.7.

$$\tilde{M}(s, l) = (st^{l-1})^{-l} \frac{(t^{2l}s^2; t^2)_l}{(t^2; t^2)_l} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} -t^{-2l+2}/sa^2, -t^{-2l+2}/sc^2, t^{-2l+2}/s^2, t^{-2l} \\ -t^{-2l+1}/s, -t^{-2l+2}/s, t^{-4l+5}/s^2a^2c^2 \end{matrix}; t^2, t^2 \right].$$

4 遷移行列の三項間漸化式

この節では, $P_{(1^r)}(x|a, -a, c, -c|q, t)$ と $m_{(1^r)}(x)$ の間の遷移行列 C の各成分が, ある三項間漸化式を満たすことを示す. その準備として, $M(s, l)$ が満たす四項間関係式を与える.

Theorem 4.1 (Contiguity relation). 任意のパラメタ s について

$$M(s, l) + F(s, -1)M(st^2, l-1) = M(st, l) + M(st, l-1), \quad (4.1a)$$

$$\tilde{M}(s, l) + F(s, 2-2l)\tilde{M}(s, l-1) = \tilde{M}(st^{-1}, l) + \tilde{M}(st, l-1), \quad (4.1b)$$

ここに

$$F(s, l) = \frac{(1-t^l/s)(1-t^{l+2}/sa^2c^2)(1+t^{l+1}/sa^2)(1+t^{l+1}/sc^2)}{(1-t^{2l+1}/s^2a^2c^2)(1-t^{2l+3}/s^2a^2c^2)}.$$

Definition 4.2. $s = t^{m+1}$ に対し $C(s, j)$ を次で定める.

$$C(s, j) := \sum_{l=0}^j M(s, l) \binom{m+2j}{j-l},$$

ここに $\binom{m}{j}$ は二項係数.

一方, Definition 2.2 で与えられた対称な Laurent 多項式 $E_r(x)$ は次を満たす.

Lemma 4.3.

$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \binom{n-r+2j}{j} m_{(1^{r-2j})}(x).$$

よって, Theorem 3.2 は次のように書き換えられる.

$$P_{(1^r)}(x|a, -a, c, -c|q, t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} C(t^{n-r+1}, j) m_{(1^{r-2j})}(x). \quad (4.2)$$

このとき, 次の定理を得る.

Theorem 4.4. 上三角行列 $\mathcal{C} = (C_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を $\mathcal{C}_{r,r+2i} = C(t^{r+1}, i)$ ($r, i \geq 0$) と定めると $\mathcal{C}_{ij}$ は次の漸化式を満たす ((a, q, t) -deformed Catalan triangle (ballot number)):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{0,0} &= 1, \\ \mathcal{C}_{i-1,i-1} &= \mathcal{C}_{i,i} & (i = 1, 2, 3, \dots), \\ F(1, -1)\mathcal{C}_{1,j-1} &= \mathcal{C}_{0,j} & (j = 2, 4, 6, \dots), \\ \mathcal{C}_{i-1,j-1} + F(t^i, -1)\mathcal{C}_{i+1,j-1} &= \mathcal{C}_{i,j} & (i+j : \text{even}, 0 < i < j). \end{aligned}$$

特に, $P_{(1^r)} = P_{(1^r)}(x|a, -a, c, -c|q, t)$ と書くことにし,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(n)} &= (P_{(1^n)}^{(C_n)}, \dots, P_{(1)}^{(C_n)}, P_{\emptyset}^{(C_n)}, 0, 0, 0, \dots), \\ \mathbf{m}^{(n)} &= (m_{(1^n)}, \dots, m_{(1)}, m_{\emptyset}, 0, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

と定めると $\mathbf{P}^{(n)} = \mathcal{C} \mathbf{m}^{(n)}$ であり, 遷移行列 $\mathcal{C}$ は階数 n に依存しない (stability).

証明は, 上記の漸化式を Theorem 4.1 で与えられた $\mathbf{M}(s, l)$ の contiguity relation に帰着させることで得られる.

5 一列型 C_n 型 Macdonald 多項式の組合せ的明示公式

この節では, 遷移行列 $\mathcal{C}$ の各成分が満たす三項間漸化式の組合せ的な解を与える.

Theorem 5.1.

$$\mathcal{C}_{r,r+2i} = \sum_{(d_1, \dots, d_i) \in \mathcal{P}(r, i)} F(t^{r+1}, d_1) F(t^{r+1}, d_2) \cdots F(t^{r+1}, d_i),$$

ここに

$$\mathcal{P}(r, i) = \{(d_1, d_2, \dots, d_i) \in \mathbb{Z}^i \mid 0 \leq d_1 \leq r, d_k - 1 \leq d_{k+1} \leq r \text{ for } 1 \leq k < i\}.$$

証明は帰納法による.

6 応用 - Kostka 多項式, 変形 Catalan 数

この節では, これまでの節で得られた $P_{(1^r)}(x|a, -a, c, -c|q, t)$ と $E_r(x)$ または $m_{(1^r)}(x)$ との間の遷移行列のパラメタを特殊化する. はじめに, $P_{(1^r)}^{(C_n, C_n)}(x|t; q, t)$ や $P_{(1^r)}^{(D_n, D_n)}(x|q, t) = P_{(1^r)}^{(C_n, C_n)}(x|1; q, t)$ について調べる. (3.1) より, 次の定理を得る.

Theorem 6.1.

$$P_{(1^r)}^{(C_n, C_n)}(x|t; q, t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{(1/qt; t^2)_j (t^{2n-2r}, t^2)_j}{(t^2; t^2)_j (qt^{2n-2r+3}; t^2)_j} \frac{1 - t^{2n-2r+4j}}{1 - t^{2n-2r}} (qt)^j E_{r-2j}(x), \quad (6.1a)$$

$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{(qt; t^2)_j (t^{2n-2r+2j+2}, t^2)_j}{(t^2; t^2)_j (qt^{2n-2r+2j+1}; t^2)_j} P_{(1^{r-2j})}^{(C_n, C_n)}(x|t; q, t), \quad (6.1b)$$

$$P_{(1^r)}^{(D_n, D_n)}(x|q, t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{(t/q; t^2)_j (t^{2n-2r}, t^2)_j}{(t^2; t^2)_j (qt^{2n-2r+1}; t^2)_j} \frac{1 - t^{n-r+2j}}{1 - t^{n-r}} q^j E_{r-2j}(x), \quad (6.1c)$$

$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{(q/t; t^2)_j (t^{2n-2r+2j+2}, t^2)_j}{(t^2; t^2)_j (qt^{2n-2r+2j-1}; t^2)_j} \frac{1 + t^{n-r}}{1 + t^{n-r+2j}} t^j P_{(1^{r-2j})}^{(D_n, D_n)}(x|q, t). \quad (6.1d)$$

この Theorem 6.1 において $t = q$ と特殊化すると, 次の系が得られる.

Corollary 6.2. C_n, D_n 型の Schur 多項式 $s_{(1^r)}^{(C_n)}(x) = P_{(1^r)}^{(C_n, C_n)}(x|q; q, q)$, $s_{(1^r)}^{(D_n)}(x) = P_{(1^r)}^{(D_n, D_n)}(x|q, q)$ は, それぞれ次のように記述される.

$$s_{(1^r)}^{(C_n)}(x) = E_r(x) - E_{r-2}(x), \quad (6.2a)$$

$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} s_{(1^{r-2j})}^{(C_n)}(x), \quad (6.2b)$$

$$s_{(1^r)}^{(D_n)}(x) = E_r(x). \quad (6.2c)$$

よって, Lemma 4.3 より, Schur 多項式の単項対称多項式による展開は次で記述される.

$$s_{(1^r)}^{(C_n)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left(\binom{n-r+2j}{j} - \binom{n-r+2j}{j-1} \right) m_{(1^{r-2j})}(x) \quad (6.3a)$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{n-r+1}{n-r+j+1} \binom{n-r+2j}{j} m_{(1^{r-2j})}(x),$$

$$s_{(1^r)}^{(D_n)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \binom{n-r+2j}{j} m_{(1^{r-2j})}(x). \quad (6.3b)$$

ここに, $\binom{n-r+2k}{k} - \binom{n-r+2k}{k-1}$ は ballot 数 ($n=r$ のとき Catalan 数) である.

Example 6.3.

$$\begin{pmatrix} s_{(1^n)}^{(C_n)} \\ s_{(1^{n-1})}^{(C_n)} \\ s_{(1^{n-2})}^{(C_n)} \\ s_{(1^{n-3})}^{(C_n)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & \cdots \\ & 1 & 2 & 5 & 14 & \cdots \\ & & 1 & 3 & 9 & \cdots \\ & & & 1 & 4 & 14 \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(1^n)} \\ m_{(1^{n-1})} \\ m_{(1^{n-2})} \\ m_{(1^{n-3})} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} s_{(1^n)}^{(D_n)} \\ s_{(1^{n-1})}^{(D_n)} \\ s_{(1^{n-2})}^{(D_n)} \\ s_{(1^{n-3})}^{(D_n)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 20 & 70 & \cdots \\ & 1 & 3 & 10 & 35 & 126 & \cdots \\ & & 1 & 4 & 15 & 56 & \cdots \\ & & & 1 & 5 & 21 & 84 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(1^n)} \\ m_{(1^{n-1})} \\ m_{(1^{n-2})} \\ m_{(1^{n-3})} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

次に, 一列型 C_n , D_n 型 Schur 多項式の一系列 Hall-Littlewood 多項式による展開係数 (Kostka 多項式) を具体的に記述する. Theorem 6.1 において $q=0$ とすると, 一列型の C_n , D_n 型 Hall-Littlewood 多項式 $P_{(1^r)}^{(C_n, C_n)}(x|t; 0, t)$, $P_{(1^r)}^{(D_n, D_n)}(x|0, t)$ が得られる.

Theorem 6.4.

$$P_{(1^r)}^{(C_n, C_n)}(x|t; 0, t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (-1)^j t^{j(j-1)} \frac{[n-r+2j]_{t^2}}{[n-r]_{t^2}} \begin{bmatrix} n-r+j-1 \\ j \end{bmatrix}_{t^2} E_{r-2j}(x), \quad (6.4a)$$

$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} P_{(1^{r-2j})}^{(C_n, C_n)}(x|t; 0, t), \quad (6.4b)$$

$$P_{(1^r)}^{(D_n, D_n)}(x|0, t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (-1)^j t^{j^2} \frac{[n-r+2j]_t}{[n-r]_t} \begin{bmatrix} n-r+j-1 \\ j \end{bmatrix}_{t^2} E_{r-2j}(x), \quad (6.4c)$$

$$E_r(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} t^j \frac{1+t^{n-r}}{1+t^{n-r+2j}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} P_{(1^{r-2j})}^{(D_n, D_n)}(x|0, t), \quad (6.4d)$$

ここに,

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad [n]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q, \quad \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q = \prod_{k=1}^j \frac{[m-k+1]_q}{[k]_q} = \frac{[m]_q!}{[j]_q! [m-j]_q!}.$$

Corollary 6.2 を用い, 次の定理を得る.

Theorem 6.5.

$$s_{(1^r)}^{(C_n)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} t^{2j} \frac{[n-r+1]_{t^2}}{[n-r+j+1]_{t^2}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} P_{(1^{r-2j})}^{(C_n, C_n)}(x|t; 0, t) \quad (6.5a)$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left(\begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} - \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j-1 \end{bmatrix}_{t^2} \right) P_{(1^{r-2j})}^{(C_n, C_n)}(x|t; 0, t),$$

$$s_{(1^r)}^{(D_n)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} t^j \frac{1+t^{n-r}}{1+t^{n-r+2j}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} P_{(1^{r-2j})}^{(D_n, D_n)}(x|0, t) \quad (6.5b)$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left(t^{n-r+j} \begin{bmatrix} n-r+2j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{t^2} + t^j \begin{bmatrix} n-r+2j-1 \\ j \end{bmatrix}_{t^2} \right) P_{(1^{r-2j})}^{(D_n, D_n)}(x|0, t).$$

Theorem 6.6 (Kostka 多項式). C_n, D_n 型の Kostka 多項式 $K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(C_n)}(t), K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(D_n)}(t)$ を次で定める.

$$s_{(1^r)}^{(C_n)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(C_n)}(t) P_{(1^{r-2j})}^{(C_n, C_n)}(x|t; 0, t), \quad (6.6a)$$

$$s_{(1^r)}^{(D_n)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(D_n)}(t) P_{(1^{r-2j})}^{(D_n, D_n)}(x|0, t). \quad (6.6b)$$

このとき, $K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(C_n)}(t), K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(D_n)}(t)$ は t の正整数係数多項式となり (Remark 6.7 参照), 次で表される.

$$\begin{aligned} K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(C_n)}(t) &= t^{2j} \frac{[n-r+1]_{t^2}}{[n-r+j+1]_{t^2}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} \\ &= \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} - \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j-1 \end{bmatrix}_{t^2}, \end{aligned} \quad (6.7a)$$

$$\begin{aligned} K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(D_n)}(t) &= t^j \frac{1+t^{n-r}}{1+t^{n-r+2j}} \begin{bmatrix} n-r+2j \\ j \end{bmatrix}_{t^2} \\ &= t^{n-r+j} \begin{bmatrix} n-r+2j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{t^2} + t^j \begin{bmatrix} n-r+2j-1 \\ j \end{bmatrix}_{t^2}. \end{aligned} \quad (6.7b)$$

Remark 6.7. (6.7a) を t^{-2j} 倍した式は [A, FH] で与えられた q -ballot 数 ($m = 0$ のとき q -Catalan 数)

$$q^{-j} \left(\begin{bmatrix} m+2j \\ j \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} m+2j \\ j-1 \end{bmatrix}_q \right) = \frac{[m+1]_q}{[m+j+1]_q} \begin{bmatrix} m+2j \\ j \end{bmatrix}_q$$

を $m \rightarrow n-r, q \rightarrow t^2$ と置き変えたものに等しい. 特に q -ballot 数や q -Catalan 数は q の正整数係数の多項式になることが知られている ([A, FH]).

(6.7b) は, q -二項係数の等式

$$q^j \frac{1+q^{m-2j}}{1+q^m} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q^2} = q^{m-j} \begin{bmatrix} m-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{q^2} + q^j \begin{bmatrix} m-1 \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \quad (6.8)$$

において $m \rightarrow n-r+2j, q \rightarrow t$ と置き換えたものと等しく, 特に (6.8) は q の正整数係数の多項式である.

Example 6.8. Definition 6.6 より, 遷移行列 $K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(C_n)}(t)$ を具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & t^2 & t^4+t^8 & t^6+t^{10}+t^{12}+t^{14}+t^{18} & & \\ & 1 & t^2+t^4 & t^4+t^6+t^8+t^{10}+t^{12} & \dots & \\ & & 1 & t^2+t^4+t^6 & t^4+t^6+2t^8+t^{10}+2t^{12}+t^{14}+t^{16} & \dots \\ & & & 1 & t^2+t^4+t^6+t^8 & \dots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となり, 遷移行列 $K_{(1^r)(1^{r-2j})}^{(D_n)}(t)$ を具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 2t^2+2t^4+2t^6 & t^2+t^3+t^4+t^5+2t^6+t^7+t^8+t^9+t^{10} & \dots & \\ & 1 & t+t^2+t^3 & t+t^3+t^4+t^5+t^7 & \dots & \\ & & 1 & t+2t^3+t^5 & \dots & \\ & & & 1 & \dots & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となる.

7 追記

この論説では, $P_{(1^r)}(x|a, -a, c, -c|q, t)$ と $E_r(x)$ の間の遷移行列が matrix inversion を用いて記述されることを用い, 応用として一列型 C_n, D_n 型の Kostka 多項式の具体的な記述を得た. ここでは B_n 型について補足をする. (B_n, B_n) 型の Macdonald 多項式 $P_\lambda^{(B_n, B_n)}(x|a; q, t)$ は, Koornwinder 多項式のパラメタを $(a, b, c, d) \rightarrow (q^{1/2}, -q^{1/2}, -1, a)$ と置き換えた多項式である ([K, Mac]). $P_\lambda^{(B_n, B_n)}(x|a; q, t)$ と $E_r(x)$ の間の遷移行列が matrix inversion を用いて記述されれば, 一列型 B_n 型 Kostka 多項式が得られるが, Theorem 2.3 で与えられた一列型 Koornwinder 多項式の四重和公式を (B_n, B_n) 型に退化させても, $E_r(x)$ の間の遷移行列が matrix inversion を用いて記述できない. これは, Theorem 2.3 の $c_o(i, j; s)$ の部分が matrix inversion と相性が悪いためであるが, 我々の最近の結果 [HS2] では, この部分を修正した新たな一列型 Koornwinder 多項式の四重和公式を構成し, 一列型 B_n 型の Kostka 多項式の具体的な記述を得た. この辺りの詳細の解説は, 他の機会に行いたいと思います.

8 最後に

講演の機会を与えてくださった佐垣大輔先生に、この場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

- [A] E. Allen, Combinatorial Interpretations of Generalizations of Catalan Numbers and Ballot Numbers, *Dissertations, Paper 366, Carnegie Mellon University* (2014).
- [B] D. M. Bressoud, A matrix inverse, *Proc. Amer. Math. Soc.* **88** (1983), 446–448.
- [FH] J. Fürlinger and J. Hofbauer, q -Catalan numbers, *J. Combin. Theory (A)*, **40** (1985), 248–264.
- [Mac] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, *Sém. Lothar. Combin.* **45** (2000), Art. B45a.
- [GR] G. Gasper and M. Rahman, Basic hypergeometric series, 2nd ed., *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, (2004).
- [L] M. Lassalle, Some conjectures for Macdonald polynomials of type B , C , D . *Sem. Lothar. Combin.* **52** (2004), Art. B52h, 24 pp. (electronic).
- [HNS] A. Hoshino, M. Noumi and J. Shiraishi, Some transformation formulas associated with Askey–Wilson polynomials and Lassalle’s formulas for Macdonald–Koornwinder polynomials, *Mosc. Math. J.* **15** (2015), no. 2, 293–318, 404–405.
- [HS1] A. Hoshino and J. Shiraishi, Macdonald polynomials of type C_n and deformed Catalan numbers, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **14** (2018), Paper No. 101, 33 pp.
- [HS2] A. Hoshino and J. Shiraishi, Matrix inversion for Koornwinder polynomials with one column diagrams, preprint.
- [K] Koornwinder T. H., Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC , in *Hypergeometric Functions on Domains of Positivity, Jack Polynomials, and Applications* (Tampa, FL, 1991), *Contemp. Math.*, Vol. 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 189–204.
- [Mim] K. Mimachi, A duality of Macdonald–Koornwinder polynomials and its application to integral representations, *Duke Math. J.* **107** (2001), no. 2, 265–281.