

ヒルベルト空間の中の4個の 部分空間の配置問題II

九州大学大学院 綿谷 安男
数理学研究院 (Yasuo Watatani)

甲子園大学 榎本 雅俊
経営情報学部 (Masatoshi Enomoto)

1 序. Gelfand-Ponomarev (1970) により, 有限次元 Hilbert 空間上の既約な ($n \leq 4$) 個の部分空間の順序付けられた組が, similar 性を除いて, 完全に分類されている。我々は, 彼らの結果を無限次元に拡張することを目標としている。さて, Gelfand-Ponomarev は, 何故このようなことを行なったのであろうか。

さて, 線形代数では, 一つの目指すべきこととして, 作用素を similar 性を除いて, 分類をするということがある。このことの結果として, 作用素の Jordan 標準形を求めることがある。

一方, Hilbert 空間 K 上の作用素には, $H = K \oplus K$ の subspaces $E_1 = K \oplus (0)$, $E_2 = (0) \oplus K$, $E_3 = \text{graph } T = \{(x \oplus Tx) \mid x \in K\}$, $E_4 = \{x \oplus x \mid x \in K\}$ の順序付けられた system $\mathcal{S}_T = (H; E_1, \dots, E_4)$ が標準的に対応する。

また, 2つの systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E'_1, \dots, E'_4)$ が similar であるとは, ある可逆な作用素 $\alpha: H \rightarrow H'$ で, $\alpha(E_i) = E'_i$ ($\forall i = 1, \dots, 4$) と決めおく。このとき,

$$T \cong S \text{ (similar)} \iff \mathcal{S}_T \cong \mathcal{S}_S \text{ (similar)}$$

である。このように, $T \longrightarrow \mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ と順序付けられた4つ組と対応させるならば, 作用素の一般化を, Hilbert 空間の中の4個の subspaces が, になっているといえよう。Gelfand-Poncinarev は, 実際には, 4つ組の分類を行う上で, operators に対応していない既約な4つ組が出現して来ることを示している。

ここで報告するとは、無限次元のヒルベルト空間においても、operators に対応しない既約な 4 つ組が存在することを示すことにある。

2 記号の準備と今までの結果の総括

定義 2.1 H を Hilbert 空間, $E_1, \dots, E_n$ をその closed subspaces とする. このとき, 順序付けられた組 $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ を, n -subspace system という.

定義 2.2 2 つの n -subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E'_1, \dots, E'_n)$ が similar であるとは, $\exists$ 可逆 $\alpha \in B(H, H')$ で, $\alpha(E_i) = E'_i$ ($\forall i = 1, \dots, n$) というにとする.

定義 2.3 n -subspace system $\mathcal{S}$ が, decomposable であるとは, ある non zero n -subspace systems $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ が存在して $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ (similar) となることをいう.

定義 2.4 $\mathcal{S}$ が indecomposable であるとは, $\mathcal{S}$ が decomposable ではないことをいう.

さて, Gelfand-Ponomarev (1970) は, 有限次元 Hilbert 空間上の indecomposable n -subspace systems ($n \leq 4$) の完全分類を以下のように行った。

$$(1) \ n=1 \text{ のとき, } \mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; (0), \mathbb{C}), (\mathbb{C}; \mathbb{C})$$

$$(2) \ n=2 \text{ のとき, } \mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; E_1, E_2), \ E_i \cong (0) \text{ か } \mathbb{C} \ (i=1, 2).$$

$$(3) \ n=3 \text{ のとき, } \mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; E_1, E_2, E_3), \ E_i \cong (0) \text{ か } \mathbb{C} \ (i=1, 2, 3).$$

$$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}^2; \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$(4) \ n=4 \text{ のとき, defect } \rho(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^4 \dim E_i - 2 \dim H \text{ の値}$$

$0, \pm 1, \pm 2$ により, E_i の添え字の順序を降して,

次のように分類される。

(4.1) 全体空間の次元が偶数であるとき, その base を

$e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k \ (k=1, 2, \dots)$ とおく。

(4.1.a) $\rho(\mathcal{S})=0$ のとき,

parameter $\lambda \neq 0, 1$ をもつとき,

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], \ E_2 = [f_1, \dots, f_k], \ E_3 = [e_1 + \lambda f_1, e_2 + f_1 + \lambda f_2, \dots]$$

$$\dots, e_k + f_{k-1} + \lambda f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k]$$

parameter λ を満たさなければならないとき,

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k], E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_k + f_{k-1})]$$

$$E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(4.1.b) $\rho(\beta) = -1$ のとき,

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_2 + f_1, \dots, e_k + f_{k-1}], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(4.1.c) $\rho(\beta) = +1$ のとき,

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_k + f_{k-1}), f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(4.2) 全体空間の次元が奇数次元のとき,

その base を, $e_1, \dots, e_{k+1}, f_1, \dots, f_k$ ($k=0, 1, 2, \dots$) とおく.

(4.2.a) $\rho(\beta) = 0$ のとき,

$$E_1 = [e_1, \dots, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_{k+1} + f_k)], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(4.2.b) $\rho(\delta) = -1$ のとき,

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_2 + f_1, \dots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k].$$

(4.2.c) $\rho(\delta) = +1$ のとき,

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_{k+1} + f_k)], E_4 = [e_1 + f_1, \dots, e_k + f_k, e_{k+1}].$$

(4.2.d) $\rho(\delta) = -2$ のとき,

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k], E_2 = [f_1, \dots, f_k],$$

$$E_3 = [e_2 + f_1, \dots, e_{k+1} + f_k], E_4 = [e_1 + f_2, \dots, (e_{k-1} + f_k), (e_k + e_{k+1})].$$

(4.2.e) $\rho(\delta) = +2$ のとき,

$$E_1 = [e_1, \dots, e_k, e_{k+1}], E_2 = [f_1, \dots, f_k, e_{k+1}],$$

$$E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \dots, (e_{k+1} + f_k)],$$

$$E_4 = [f_1, (e_1 + f_2), \dots, (e_{k-1} + f_k), (e_k + e_{k+1})].$$

この Gelfand-Ponomarev の結果を, 我々は一般次元の場合に拡張する ことを試みてみる.

今までに、以下のことを示している。

(1) $n=1$ のとき,

無限次元は起らない。 $\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; (0)), (\mathbb{C}; \mathbb{C})$ である。

(2) $n=2$ のとき,

無限次元は起まない。 $\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; E_1, E_2), E_i \cong (0) \text{ or } \mathbb{C}$
($i=1,2$) である。

(3) $n=3$ のとき,

有限次元は, $\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; E_1, E_2, E_3), E_i \cong (0) \text{ or } \mathbb{C}$ ($i=1,2,3$),

$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}^2; \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ であるが,

これ以外に、無限次元のものが存在するかどうかは

未解決である。この問題は、もし P. Rosenthal の transitive

lattice 問題が解ければ、肯定的に解決される。

(4) $n=4$ のとき,

このときには、Gelfand-Ponomarev の有限次元以外の例も

構成することが出来る。ただし、それは、以下に述べる

operator systems の枠の中のものだった。

定義 2.5

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ が bounded operator system であるとは、次のものと添え字の順序を除いて, similar なものという。

$\exists$ Hilbert 空間 K_1, K_2 と, $\exists S \in B(K_1, K_2), \exists T \in B(K_2, K_1)$ が存在して, $H = K_1 \oplus K_2$, $E_1 = K_1 \oplus (0)$, $E_2 = (0) \oplus K_2$, $E_3 = \{(x \oplus Sx) \mid x \in K_1\}$, $E_4 = \{(Ty \oplus y) \mid y \in K_2\}$ と書ける。

定義 2.6

$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ が weak operator system であるとは、次のものと添え字の順序を除いて, similar なものという。

$\exists$ Hilbert 空間 K_1, K_2 と, $\exists$ densely defined closed operators $S: D(S) (\subset K_1) \rightarrow K_2$, $T: D(T) (\subset K_2) \rightarrow K_1$ が存在して, $H = K_1 \oplus K_2$, $E_1 = K_1 \oplus (0)$, $E_2 = (0) \oplus K_2$, $E_3 = \{(x \oplus Sx) \mid x \in D(T)\}$, $E_4 = \{(Ty \oplus y) \mid y \in D(T)\}$ と

書ける。

次に, Gelfand-Ponomarev が, 有限次元 Hilbert 空間
indecomposable 4-subspace systems の分類の指標として
導入した defect $\rho(\mathcal{S})$ を, 無限次元に拡張する。

定義 2.7

4-subspace system $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ を,

$$\dim(E_i \cap E_j) < \infty, \dim(E_i^\perp \cap E_j^\perp) < \infty \quad (\forall i, j = 1, \dots, 4)$$

となるものに対して, defect $\rho(\mathcal{S})$ を,

$$\rho(\mathcal{S}) = \frac{1}{3} \left(\sum_{i < j} \dim(E_i \cap E_j) - \dim(E_i^\perp \cap E_j^\perp) \right)$$

と定義する。

このとき, 次の成立する。

定理 2.8

有限次元 Hilbert 空間上の 4-subspace system $\mathcal{S}$ に対して, 我々の defect $\rho(\mathcal{S})$ と, Gelfand-Ponomarev の defect $\rho(\mathcal{S})$ は, 一致する。

さて, このように無限次元に拡張した defect $\rho(\mathcal{S})$ について, 次の成立している.

定理 2.9

defects の取り得る値 $\mathbb{Z}/3$ が, indecomposable bounded operator systems の defects の値として実現できる.

3 Non-weak operator systems

この節では, ② で定義した operator systems の枠から, はみ出る indecomposable 4-subspace systems が構成できることを示そう. これにより, 標準的に operator に対応する 4-subspace systems とは異なるものが得られたことになる. 勿論, 困難な点は, 得られた systems が, indecomposable であることを示す所にある.

13.1.3.1

$\alpha_i \geq M > 1$ ($i=1, 2, \dots$), $K = \ell^2(\mathbb{N})$, $\{e_i\}_{i \geq 1}$ を K の通常の ONB とする. このとき,

$$S_\alpha e_i = \alpha_i e_{i+1} \text{ on } K = \ell^2(\mathbb{N}), \quad S e_i = e_{i+1} \text{ on } K = \ell^2(\mathbb{N})$$

とおく。さらに,

$$T = \begin{pmatrix} S_\alpha^* & 1 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

とおく。このとき, 次の 4-subspace system $\mathcal{S}$ を構成する.

$$\widehat{K} = K \oplus K, \quad H = \widehat{K} \oplus \widehat{K}, \quad E_1 = \widehat{K} \oplus (0), \quad E_2 = (0) \oplus \widehat{K},$$

$$E_3 = \text{graph } T + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \{ (x \oplus x) \mid x \in \widehat{K} \}.$$

このとき, $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ は, indecomposable, non-weak operator systems である。その defect $\rho(\mathcal{S})$ の値は 1 である。これは, 最初の non-weak operator systems で, indecomposable systems の 1 つである。強調すべきことは, indecomposable を示すのが困難な点である。これは, Jordan form の Jumping 現象とも関連していると思われる。さて, 次に, 問題になることは, indecomposable non-weak operator systems で, defects の値は, すべて実現されるのかということである。これについては, 以下の部分的解答を報告しておく。

$K = \ell^2(\mathbb{N})$ とおく. $\alpha_1(k), \alpha_2(k) \in \mathbb{R}$ 以下のようにおく.

$$\alpha_1(k) = \begin{cases} 2\left(\frac{k+1}{k}\right)^{1/2} & (1 \leq k \leq n_1), (n_2+1 \leq k \leq n_3), \dots \\ 2 & (n_1+1 \leq k \leq n_2), (n_3+1 \leq k \leq n_4), \dots \end{cases}$$

$$\alpha_2(k) = \begin{cases} 2 & (1 \leq k \leq n_1), (n_2+1 \leq k \leq n_3), \dots \\ 2\left(\frac{k+1}{k}\right)^{1/2} & (n_1+1 \leq k \leq n_2), (n_3+1 \leq k \leq n_4), \dots \end{cases}$$

上記の $\{n_i\}_{i \geq 1}$ を, 次となるように決める.

$$\prod_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_1(k)}{\alpha_2(k)} = \begin{cases} > i & (i = \text{奇数}) \\ < \frac{1}{i} & (i = \text{偶数}) \end{cases}$$

これを利用し, $(i \geq 3 \text{ とし}),$

$$\alpha_i(k) = \begin{cases} 2\left(\frac{1+k}{k}\right)^{1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^{i-1}} & (1 \leq k \leq n_1), (n_2+1 \leq k \leq n_3), \dots \\ 2\left(\frac{k}{1+k}\right)^{1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^{i-1}} & (n_1+1 \leq k \leq n_2), (n_3+1 \leq k \leq n_4), \dots \end{cases}$$

とおく.

これを用いて,

$$w_i(k) = \alpha_{i+2}(k) \quad (i \geq 1)$$

とおく.

この $\{w_i(k)\}_{k \geq 1}$ を用いて, unilateral weighted shift

$S_{w_i} (i \geq 1)$ を考える. このとき,

$$T = \begin{pmatrix} S_{w_1}^* & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & S_{w_n}^* & 1 \\ & & & S \end{pmatrix}$$

とおく. これを用いて,

$$\widehat{K} = \overbrace{K \oplus K \oplus \cdots \oplus K}^{(n+1) \text{ 回}}, \quad H = \widehat{K} \oplus \widehat{K}, \quad E_1 = \widehat{K} \oplus (0),$$

$$E_2 = (0) \oplus \widehat{K}, \quad E_3 = \text{graph } T + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_1 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \{x \oplus x \mid x \in \widehat{K}\}.$$

このとき, $\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_4)$ は, indecomposable であり,

non-weak operator systems であり, defect $p(\mathcal{S})$ は,

$$\frac{2n+1}{2} \text{ である.}$$

参考文献

[EW] 榎本雅俊, 綿谷安男: ヒルベルト空間の中の4個の部分空間の配置問題, 京都大学教理解析研究所
講演録(2002年2月) 1250, 51-71

[W] Y. Watatani: Relative positions of four subspaces in a Hilbert space and subfactors, (to appear in a conference report).

[GP] I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev:
Problems of linear algebra and classification of quadruples of subfactors in a finite dimensional vector space,
Coll. Math. Soc. Janos Bolyai 5, Hilbert space operators,
Tihany (Hungary) 1970, 163-237 (in English).