

基本アーベル体の狭義不分岐中心拡大について

九大理 堀江 充子 (Mitsuko Horie)

有理数体, 有理整数環をそれぞれ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ で表わす. K/F を有限次代数体の Galois 拡大とする. K の拡大体 L について, L/F が Galois 拡大であつて, $\text{Gal}(L/K)$ が $\text{Gal}(L/F)$ の中心に含まれるとき, L は K/F の中心拡大であるという. 特に, F として有理数体 $\mathbb{Q}$ を取ったときに K 上狭義不分岐な $K/\mathbb{Q}$ の最大中心拡大を K_c で表わし, さらに, K の狭義の genus field を K^* で表わす; K^* は K_c に含まれる $\mathbb{Q}$ 上の最大 abel 拡大体である.

以後 ℓ を固定された素数, n を 2 以上の固定された自然数とし, K は $\mathbb{Q}$ 上の ℓ^n 次基本 abel 拡大体, すなわち, $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ となる $\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大とする. また, ℓ 個の元からなる有限体を F で表わす. このとき, $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は自然に F 上の線形空間とみなせ, しかも, $\text{Gal}(K_c/K^*)$ もまた F 上の線形空間とみなせることがわかる ([1]参照). 一般に, F 上の線形空間 V に対し, その双対空間を V^* と書く. この小文では, K_c と K^* の中間体 M と K の部分体 k との関係を, $\text{Gal}(M/K^*)^*$ と $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})^*$ との関係を通して記述することを試みる.

以下, 記号を簡単にするために,

$$G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}), \quad \mathfrak{X}_M = \text{Gal}(M/K^*)^*, \quad X_k = \text{Gal}(k/\mathbb{Q})^* = G^*$$

とおく.

1. K の狭義の絶対類体を K_H で表わし, $G = \text{Gal}(K_H/\mathbb{Q})$, $H = \text{Gal}(K_H/K)$ とおくと,

$$\text{Gal}(K_H/K_C) = [G, H] \triangleleft \text{Gal}(K_H/K^*) = [G, G],$$

$$\text{Gal}(K_C/K^*) \cong [G, G]/[G, H],$$

となるが, G/H が abel 群であることから, 対応

$$(\sigma H, \tau H) \longmapsto \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}[G, H], \quad \sigma, \tau \in G$$

によって, 上への歪対称双線形写像

$$G/H \times G/H \longrightarrow [G, G]/[G, H]$$

が定義される. これから自然に導かれる G の 2 乗外積 $G \wedge G$ から $\text{Gal}(K_C/K^*)$ の上への線形写像を ρ とおくと, ρ は

$$\rho((\sigma|_K) \wedge (\tau|_K)) = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}|_{K_C}, \quad \sigma, \tau \in G$$

を満たす. そこで, $\rho^*: \mathfrak{X}_{K_C} \longrightarrow (G \wedge G)^*$ を,

$$\rho^*(\gamma) = \gamma \circ \rho, \quad \gamma \in \mathfrak{X}_{K_C}$$

によって定めると, ρ^* は 単射線形写像となる. また, 素数 p の $K/\mathbb{Q}$ での分解群を

$D(p)$ とおくと, これは $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の F -部分空間だから, $D(p) \wedge D(p)$ は自然に,

$G \wedge G$ の F -部分空間となる. そこで, $D(p) \wedge D(p)$ の $(G \wedge G)^*$ における annihilator

を $(D(p) \wedge D(p))^+$ で表わす. さらに, ι を $X_K \wedge X_K$ から $(G \wedge G)^*$ への線形同型で,

$\chi, \psi \in X_K$ と $g, h \in G$ に対して,

$$(\iota(\chi\wedge\psi))(g\wedge h) = \chi(g)\psi(h) - \chi(h)\psi(g)$$

を満たすものとする。

定理1. 以上の記号のもとで、次の事実が成り立つ。

(i) P を $D(p)$ の位数が l^2 以上の素数 p 全体のなす有限集合とすると、

$$\text{Im } \rho^* = \bigcap_{p \in P} (D(p) \wedge D(p))^\perp.$$

(ii) K の任意の部分体 k に対して、 M を K_c に含まれる k の最大中心拡大とすると、 M は K^* と k_c の合成体であり、

$$\rho^*(\chi_M) = \text{Im } \rho^* \cap \iota(X_k \wedge X_k).$$

従って、特に k が K の任意の bicyclic 部分体のときには、 k_c が $\mathbb{Q}$ 上 非 abel 拡大であることと $\iota(X_k \wedge X_k)$ が $\text{Im } \rho^*$ に入ることが同値である。

定理1, (i)の証明には、次の Hasse norm principle に関連して[7]の中で Tate によって示された事実と、[2], [3]の Furuta の genus number と central class number に関する公式を、狭義の場合に読みかえて得られる公式が本質的である。

Tate の定理. L/F を有限次代数体の Galois 拡大とする。 F の各素点 v に対し、 D_v を v の上にある L の素点に対する分解群の1つ、 Cor_v を correstriction map $H_2(D_v, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\text{Gal}(L/F), \mathbb{Z})$ とし、 f を $f(\sum_v z_v) = \sum_v \text{Cor}_v z_v$, $z_v \in H_2(D_v, \mathbb{Z})$ によって定められる準同型 $\bigoplus_v H_2(D_v, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\text{Gal}(L/F), \mathbb{Z})$ とする。このとき、

$$\text{Coker } f \cong (F^\times \cap N_{L/F} J_L) / N_{L/F} L^\times$$

が成り立つ。但し、ここで J_L は L の idele 群とする。

古田の公式 (狭義の場合) . L/F を有限次代数体の Galois 拡大とする. $L_c(F)$ を L 上狭義不分岐な L/F の最大中心拡大とする. また $L^*(F)$ を $L_c(F)$ に含まれる F 上の最大 abel 拡大とすると, 次が成り立つ.

$$[L_c(F):L^*(F)] = (F^\times \cap N_{L/F} J_L : N_{L/F} L^\times) / (E \cap N_{L/F} U^+ : E \cap N_{L/F} U^+ \cap N_{L/F} L^\times),$$

ここで E は F の単数群, U^+ は J_L の unit idele のうち, すべての アルキメデス 的素点での成分が正であるものの全体のなす群を表す.

更に, 一般に有限 abel 群 A に対して, $H_2(A, \mathbb{Z})$ は $A \wedge A$ と同型になることを, 補足的に注意しておく ([6] 参照) .

また, (ii) は, (i) と基本的な群論的考察により示される.

注意. 定理 1 は, G が基本 abel 群の直和の場合に一般化できる. なお, $D(p)$ は素数 p の abel 拡大 $K/\mathbb{Q}$ に関する分解群であり, $X_K \wedge X_K$ は “Dirichlet 指標の群” の外積であるから, 定理 1 (i), (ii) の 2 つの式の右辺は, ともに K に対応する Dirichlet 指標の群が与えられれば, 実際に計算することができる. すなわち, 定理 1 は χ_{K_C} が ρ^* を通して有理的に捕えられることを主張している.

定理1から直ちに次の系を得る.

系1. $k^{(1)}, \dots, k^{(s)}$ を K の bicyclic 部分体とし, 各 $i \in \{1, \dots, s\}$ に対し, $\{x_i, \psi_i\}$ を $X_{k^{(i)}}$ の F 上の基底とする. このとき, すべての $i \in \{1, \dots, s\}$ について $i(x_i \wedge \psi_i)$ が $\text{Im } \rho^*$ に入っていて, $\{x_i \wedge \psi_i \mid i=1, \dots, s\}$ が F 上1次独立ならば, $\prod_{i=1}^{j-1} K^* k^{(i)}_c$ と $K^* k^{(j)}_c$ は, すべての $j \in \{1, \dots, s\}$ に対し, K^* 上線形無関連である.

さて, 狭義の genus field に関しては, k として K のすべての (bi)cyclic 部分体を動かすとき, K^* は k^* 達の合成体となるが, K_c についても同様のことが成り立つか, すなわち, $K_c = \prod k_c$ (ここで, k は K のすべての bicyclic 部分体を動くものとする) となるかという疑問が生じる. 定理1を用いれば, $K_c = \prod k_c$ となる為の条件を次の様書き下すことができる.

系2. K_c が K の bicyclic 部分体 k 達すべての最大狭義不分岐中心拡大 k_c 達の合成体であるためには, $\bigcap_{p \in P} (D(p) \wedge D(p))^+$ が $i(x \wedge \psi)$, $x, \psi \in X_K$ なる形の $(G \wedge G)^*$ の元達で生成されることが必要十分である.

2. 次に, K_c が bicyclic 部分体 k の最大狭義不分岐中心拡大 k_c 達の合成体になる例, 及び, その反例について詳しく述べることにする. まず, $K_c = \prod k_c$ (ここで, k は K のすべての bicyclic 部分体を動くものとする) となる場合は, つぎの十分条件によつて, 実例が無数に存在することがわかる.

定理2. p が P の素数を動くときの $D(p) \wedge D(p)$ 達で張られる F 上の線形空間の次元が 3 以下, または, $n(n-1)/2$ に等しいならば, K_c は k が K の bicyclic 部分体すべてを動いたときの k_c 達の合成体となる.

定理2は, $D(p) \wedge D(p)$ の F 上の次元が 1 または 3 であることなどに注意して, 系2をもとに基本的な計算をすることによって示される.

定理2の特別の場合として, 次が成り立つ.

系3. $n=3$, すなわち K が3つの $\mathbb{Q}$ 上独立な ℓ 次巡回体の合成体であるときには, 常に K_c は k が K の bicyclic 部分体を動いたときの k_c 達の合成体となる.

一般には, K_c は k_c 達 (k は K の bicyclic 部分体) の合成体にはならないことも, 系2によって知ることができる. 最後に, この様な例を挙げることにする.

例1. ℓ を奇素数とし, ℓ を法として 1 に合同な互いに異なる素数 p_1, p_2, p_3, p_4 が次の条件を満たすとする. $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して K_i を導手 p_i の ℓ 次巡回体とすると, p_1 は K_2, K_4 で分解, K_3 で不分解, p_2 は K_3, K_4 で分解, K_1 で不分解, p_3 は K_1 で分解, K_2, K_4 で不分解, p_4 は K_2 で分解, K_1, K_3 で不分解. この様な4つの素数の組が無数に存在することは, Cebotarev の密度定理によって保証される. ここで, K を4つの巡回体 K_1, K_2, K_3, K_4 の合成体とし, $\text{Gal}(K/\prod_{j=1}^4 K_j)$ の 1

つの生成元 g_1 を固定しておく。また、 $\{\chi_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ を $\{g_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ の双対底、すなわち、

$\chi_i(g_j) = \delta_{ij}$ を満たすものとする、 $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ であり、

$$D(p_1) = \langle g_1, g_3 \rangle, D(p_2) = \langle g_1, g_2 \rangle, D(p_3) = \langle g_3, g_2 g_4^a \rangle, D(p_4) = \langle g_4, g_1 g_3^b \rangle.$$

ここで a, b は、ある適当な $F^\times$ の元である。よって、定理 1 により、

$$\begin{aligned} \text{Im } \rho^* &= \langle g_1 \wedge g_2, g_1 \wedge g_3, g_2 \wedge g_3 - a g_3 \wedge g_4, g_1 \wedge g_4 + b g_3 \wedge g_4 \rangle^+ \\ &= \langle \iota(\chi_2 \wedge \chi_4), \iota(a \chi_2 \wedge \chi_3 + \chi_3 \wedge \chi_4 - b \chi_1 \wedge \chi_4) \rangle \end{aligned}$$

となる。このことから、 $[K_c: \prod k_c] = [\prod k_c: K^*] = \ell$ であって、 $\prod k_c = K^*(K_2 K_4)_c$

であることがわかる。

例 2. $\ell = 2$ とし、 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 を 4 を法として 1 と合同な相異なる素数とし、
また、 q_1, q_2, q_3 は 4 を法として -1 と合同な相異なる素数で、次の条件を満たすものとする。

$$\left(\frac{p_3}{p_1}\right) = -1, \left(\frac{p_4}{p_1}\right) = \left(\frac{p_5}{p_1}\right) = \left(\frac{-q_1}{p_1}\right) = \left(\frac{-q_2}{p_1}\right) = \left(\frac{-q_3}{p_1}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{p_4}{p_2}\right) = 1, \left(\frac{p_3}{p_2}\right) = \left(\frac{p_5}{p_2}\right) = \left(\frac{-q_1}{p_2}\right) = \left(\frac{-q_2}{p_2}\right) = \left(\frac{-q_3}{p_2}\right) = -1,$$

$$\left(\frac{p_4}{p_3}\right) = \left(\frac{p_5}{p_3}\right) = \left(\frac{-q_2}{p_3}\right) = 1, \left(\frac{-q_3}{p_3}\right) = -1,$$

$$\left(\frac{p_5}{p_4}\right) = 1, \left(\frac{-q_1}{p_4}\right) = \left(\frac{-q_3}{p_4}\right) = -1, \left(\frac{-q_1}{p_5}\right) = 1, \left(\frac{-q_2}{p_5}\right) = -1,$$

$$\left(\frac{-q_3}{q_1}\right) = 1, \left(\frac{-q_2}{q_1}\right) = \left(\frac{-q_3}{q_2}\right) = -1.$$

このような素数の組 $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, q_1, q_2, q_3$ が無数に存在することは、Dirichlet の算術級数中の素数定理から明らかである。そこで、 $d_1 = p_1 p_2$, $d_2 = p_3 (-q_1)$, $d_3 = p_4 (-q_2)$, $d_4 = p_5 (-q_3)$ とおき、 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{d_3}, \sqrt{d_4})$ とする。各 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対し、 $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{d_j} | j \neq i))$ の自明でない元を g_i とおくと、(平方剰余の相互法則によつて) $D(p_1) = D(q_1) = \langle g_1, g_2 \rangle$, $D(p_2) = D(q_2) = \langle g_1, g_3 \rangle$, $D(p_3) = \langle g_2, g_4 \rangle$, $D(p_5) = D(q_3) = \langle g_1 g_3, g_4 \rangle$, $D(p_4) = \langle g_2 g_4, g_3 \rangle$ となり、従つて、 $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, q_1, q_2, q_3\}$ となる。例 1 と同じ様に、 $\{x_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ を $\{g_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ の双対底とすると、

$$\begin{aligned} \text{Im } \rho^* &= \langle g_1 \wedge g_2, g_1 \wedge g_3, g_2 \wedge g_4, g_1 g_3 \wedge g_4, g_2 g_4 \wedge g_3 \rangle^+ \\ &= \langle i(x_1 \wedge x_4 + x_2 \wedge x_3 + x_3 \wedge x_4) \rangle \end{aligned}$$

となり、これより $[K_c : \prod k_c] = 2$, $\prod k_c = K^*$ であることがわかる。

注意. $\mathbb{Q}$ 上 bicyclic な体 k に対して $\text{Gal}(k_c/\mathbb{Q})$ の群構造はわかっている ([4] 参照)。

従つて、特に、基本 abel 体 K に対して、 $K_c = \prod k_c$ (k は K のすべての bicyclic 部分体を動く) が成り立つときには、 $\text{Gal}(K_c/\mathbb{Q})$ の群構造がわかることになる。さらに、

$q = 2$ のときには K_c の K^* 上の生成元を、簡単な 2 次の連立不定方程式を解くことによつて、与えることができる (なお、この小文の詳細は、[5] にあります)。

文献

- [1] A. Fröhlich: "Central extensions, Galois groups, and ideal class groups of

- number fields," Contemporary of Math. 24, Amer. Math. Soc., Providence-Rhode Island, 1983.
- [2] Y. Furuta: The genus field and genus number in algebraic number fields, Nagoya Math. J. 29 (1967), 281-285.
- [3] Y. Furuta: Über die Zentrale Klassenzahl eines relativ galoisschen Zahlkörpers, J. Number Theory 3 (1971), 318-322.
- [4] M. Horie: A note on central class fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 57 (1987), 119-125.
- [5] M. Horie: On central extensions of elementary abelian fields, preprint.
- [6] D. J. S. Robinson: "A course in the theory of groups," Graduate texts in Math. 80, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
- [7] J. Tate: Global class field theory, in "Algebraic number theory (J. W. Cassels and A. Fröhlich, Ed.)," Academic Press, London and New York, 1967.