

Siegel 保型形式に付随した L 関数の特殊値について

東工大・理 水本信一郎 (Shin-ichiro Mizumoto)

$n, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathcal{H}_n$ は Siegel upper half space of degree n ,

$M_k^n := \{ \text{holomorphic scalar-valued modular forms of weight } k \text{ w.r.t. } Sp(n, \mathbb{Z}) = Sp_{2n}(\mathbb{Z}) \},$

$S_k^n := \{ \text{cusp forms } \in M_k^n \}$ とする。

$f \in S_k^n$ は eigenform ($:=$ non-zero common eigenfunction of the Hecke algebra) とすると, 各 prime p に対して

$(\alpha_0(p), \dots, \alpha_n(p)) \in (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$: Satake p -parameters of f かつ (Weyl group の action を 除く) 決まる。

$\therefore$ $\mathbb{Z}$ 上の (Langlands の意味の) L 関数 (Borel [7] 参照) は次の n の type の形である:

$$L_{\text{spin}}(s, f) := \prod_p \left\{ (1 - \alpha_0(p)p^{-s}) \prod_{r=1}^n \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (1 - \alpha_{i_1}(p) \dots \alpha_{i_r}(p)p^{-s}) \right\}^{-1},$$

$$L_{\text{St}}(s, f) := \prod_p \left\{ (1 - p^{-s}) \prod_{j=1}^n (1 - \alpha_j(p)p^{-s})(1 - \alpha_j(p)^{-1}p^{-s}) \right\}^{-1}.$$

これらの infinite products は $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \sigma\}$

(σ : 十分大) で左義一様に絶対収束する。これこれ、 f に付随して spinor L -function, standard L -function と")。

1. Spinor L -functions ($n=2$ とする)。

$f \in S_{\mathbb{R}}^2$: eigenform に対して

$$\Lambda_{\text{spin}}(s, f) := \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 2) L_{\text{spin}}(s, f)$$

とする。但し $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$ 。

これについて、基本的な性質として次のことが知られている:

① (Andrianov [1])

(i) $\Lambda_{\text{spin}}(s, f)$ は全 s 平面に meromorphic に解析接続され、

関数等式

$$\Lambda_{\text{spin}}(2k-2-s, f) = (-1)^k \Lambda_{\text{spin}}(s, f)$$

を満す。

(ii) $\Lambda_{\text{spin}}(s, f)$ は $s = k-2$, k 重の simple poles を

と他は holomorphic。

② (Evdokimov [9], Oda [11])

$\Lambda_{\text{spin}}(s, f)$: entire $\iff f \in \text{Maass space}$ 。

1.1 $L_{\text{spin}}(s, f)$ の (Deligne [8] の意味の) critical

point は $s = k-1$ (関数等式の中心) である。すなわち

次のことが予想されている:

$$L_{\text{spin}}(k-1, f) = \Omega \cdot A,$$

つまり Ω は f の "period", A は algebraic number.

この予想は今のところ解かれていない。(Ω の定義法 etc. については Deligne [8] の他, Oda 氏の一連の研究を参照されたい。)

Remarks. (1) f is holomorphic vector-valued cuspidal eigenform of type $\det^k \otimes \text{sym}^\nu$ ($\nu \geq 0$) w.r.t. $Sp(2, \mathbb{Z})$ とする。つまり $\text{sym}^\nu : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(\nu+1, \mathbb{C})$: ν -th symmetric tensor representation. このとき ($k \geq 2$ とする)

$$\text{critical points} = \{ m \in \mathbb{Z} \mid k-1 \leq m \leq k-1+\nu \}.$$

$$(2) f \in \text{Maass space} \xleftarrow[\sigma_k]{\sim} S_{2k-2}^1, \quad f = \sigma_k(g)$$

のとき

$$L_{\text{spin}}(k-1, f) = -\frac{1}{2} L'(k-1, g).$$

この右辺については algebraicity result は今のところ知られていない。

1.2 Böcherer's conjecture.

$f \in S_k^2$: eigenform, $D \in \mathbb{Z}_{<0}$: fundamental discriminant (i.e. $D = \text{discriminant of } \mathbb{Q}(\sqrt{D})$) とし,

$\left(\frac{D}{*}\right) \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$: associate χ : Dirichlet character とする。

この character による twisted L -function

$$L_{\text{spin}}(s, f, \left(\frac{D}{*}\right)) := \prod_p \prod_{i,j \in \{0,1\}} (1 - \alpha_0(p) \alpha_1(p)^i \alpha_2(p)^j \left(\frac{D}{p}\right) p^{-s})^{-1}$$

と考へる。

f の Fourier 展開 ε

$$f(Z) = \sum_{T \in A_2} a(T, f) \exp(2\pi i \operatorname{trace}(TZ))$$

$$k \leq 0, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad Z \in \mathbb{R}^n,$$

$$A_2 := \left\{ T = (t_{ij}) \in M_2(\mathbb{Q}) \mid \begin{array}{l} {}^tT = T > 0 \\ t_{ii}, 2t_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (\forall i, j) \end{array} \right\}.$$

$U \in SL(2, \mathbb{Z})$ is $A|_2$ is, $T \mapsto {}^t U T U$ act $\mathfrak{g}$.

$$w_D := \# \{ \text{roots of unity in } \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \}.$$

Conjecture (Böcherer [5]).

$$\exists c_f \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.}$$

$$L_{\text{spin}}(R-1, f, (\frac{D}{*})) = c_f \cdot |D|^{1-R} \cdot \left(\frac{1}{w_D} \sum_{i=1}^R a(T_i, f) \right)^2$$

for each $D < 0$: fundamental discriminant.

$$T_1, \dots, T_k \text{ is a complete system of representatives}$$

for $\{T \in A_2 \mid -\det(2T) = D\} / SL(2, \mathbb{Z})$.

Remark f maps Maass space to Eisenstein space.

はい、そうだとすれば正しい [5]。また、f さん Yoshida

lift a image に は 11, 7 11 3 と 7 6 正 L 11, と 11 3 と 3

Böcherer 6 から 10 まで。

1.3 Residues .

$f \in S_k^2$: eigenform に對し, σ_k に對し τ に對し

$L_{\text{spin}}(s, f)$ なる $s = k - \tau$ (simple) pole が存在する

$$\Leftrightarrow f \in \text{Maass space} \xrightarrow[\sigma_k]{} S_{2k-2}'$$

と $f = \sigma_k(g)$, $g \in S_{2k-2}'$: normalized eigenform なる

$$\begin{aligned} \text{res}_{s=k} L_{\text{spin}}(s, f) &= \zeta(2) L(k, g) \\ &= (\text{algebraic number}) \cdot \pi^{k+2} \omega_+(g) \end{aligned}$$

とある。 $\omega_+(g)$ は g の $u > 0$ の period.

$$\left(\tau = k-2 \text{ なる } \omega_+(g) \text{ は } L \text{ 上の } \int_0^\infty g(it) dt \text{ なる } k \text{ である。} \right)$$

2. Standard L -functions ($\forall n \geq 1$).

$f \in S_k^n$: eigenform に對し τ

$$\Lambda_{\underline{St}}(s, f) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\varepsilon) \prod_{j=1}^n \Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-j) L_{\underline{St}}(s, f)$$

とある。 $\varepsilon = \tau$

$$\varepsilon := \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ even,} \\ 1 & \text{for } n \text{ odd,} \end{cases} \quad \Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

基本的性質として知られている:

- ① (Andrianov - Kalinin [2], Piatetski-Shapiro - Rallis [12], Böcherer [4]) $\Lambda_{\underline{St}}(s, f)$ は全 s 平面に meromorphic に解析接続され, 関数等式

$$\Lambda_{\underline{St}}(1-s, f) = \Lambda_{\underline{St}}(s, f)$$

を満す。

②, ([13], supplementary to: Weissauer [15], Böcherer [6])

$k \geq n$ とす。 $\Lambda_{St}(s, f)$ は $s = 0, 1$ での高々

simple poles をといて holomorphic, $s > 1$

$$\Lambda_{St}(s, f) : \text{entire} \iff f \in B_k^n(2n).$$

:= 2

$$B_k^n(2n) := \left\{ \text{theta series } \vartheta_{S,P} \in M_k^n \mid S = {}^t S \in GL(2n, \mathbb{Z}), \right.$$

$S > 0$, S の diagonal entries は偶数 even;

$P : \mathbb{C}^{(2n,n)} \rightarrow \mathbb{C}$: spherical harmonic

polyn. of weight $k - n$ $\left. \right\}$.

Remark. k かつ $n \equiv 0 \pmod{2}$ と $k \equiv 1 \pmod{2}$ のとき

$k \rightarrow \infty$ とするとき. ある $c_1, c_2 > 0$ に対して

$$\dim B_k^n(2n) \leq c_1 k^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad \dim S_k^n \sim c_2 k^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

は $B_k^n(2n) \cap S_k^n$ は S_k^n の中で "非常に小さい"。

2.1 $\Lambda_{St}(s, f)$ の critical points (の右半分) は

$$\left\{ m \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq m \leq k - n, \quad m \equiv n \pmod{2} \right\}.$$

($k = 2$ のとき $k > n$ と仮定す。)

Theorem 1 [13] (supplementary to : Harris [10],

Sturm [14], Böcherer [3]). $f \in S_k^n$ を eigenform,

$k > n$ とし, $\mathbb{Q}(f) := \mathbb{Q}(\text{eigenvalues of } T_q \text{ on } f)$ とす。

:= 2 $T_q :=$ ring of Hecke operators / $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}(f)$ is totally real finite ext. of $\mathbb{Q}$ とある。いま

$\forall$ Fourier coeff. of $f \in \mathbb{Q}(f)$ と仮定する。 $m \in \mathbb{Z}$ と

$$1 \leq m \leq k-n, \quad m \equiv n \pmod{2}$$

を満足する n にとる；但し

$$m=1 \text{ のとき } n \equiv 3 \pmod{4} \text{ または } n=1$$

と取る。このとき

$$L_{St}^*(m, f) := \frac{L_{St}(m, f)}{\pi^{d(m)}(f, f)} \in \mathbb{Q}(f).$$

$$=: z'' \quad d(m) := m(n+1) + n k - \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(f, f) := \int_{S_p(n, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_n} |f(Z)|^2 \det(Y)^{k-n-1} dX dY \quad (Z = X + iY).$$

Remark. S_n^n の basis $\{f_j\}$ として, f_j : eigenform
かつ $\forall$ Fourier coeff. of $f_j \in \mathbb{Q}(f_j)$ とあることが
とれる。

Outline of proof. $r \in \mathbb{Z}_{>0}$: even, $s \in \mathbb{C}$ に対し

$$E_r^{(n)}(Z, s) := \det(\operatorname{Im}(Z))^s \sum_{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \backslash S_p(n, \mathbb{Z})} \det(CZ+D)^{-s} |\det(CZ+D)|^{-2s}$$

$(Z \in \mathbb{H}_n)$ は $r + \operatorname{Re}(2s) > n+1$ のとき (Z, s) に対して

左義一様に絶対収束する。さらに s の関数として、全 s 平面

に meromorphic に解析接続され、 $s=0$ で holomorphic である。

$$z := z'' \quad E_r^{(n)}(Z) := E_r^{(n)}(Z, 0) \quad \text{と取る。これは}$$

Z に関しては holomorphic とは限らない。

Garrett - Böcherer の積分表示 [3][4] により

$$L_{St}(m, f) \cdot f(Z) \\ = (\text{rational number}) \cdot \pi^{d(m)} (f, (DE_{m+n}^{(2n)}) \begin{pmatrix} -\bar{Z} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix})$$

となる。ここで $\mathbb{D}$ は $C^\omega(\mathbb{P}_{2n})$ 上の differential

$$\text{operator } \mathbb{D} : M_{m+n}^{2n} \longrightarrow S_{\mathbb{R}}^n \otimes S_{\mathbb{R}}^n \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ F \longmapsto (\mathbb{D}F) \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}$$

となる $\mathbb{D}$ が $\mathbb{D}$ あり、Fourier coeff. の rationality を保つ。

Th. 1 の仮定 α と $\mathbb{D}$ は $E_{m+n}^{(2n)}(Z)$ は holomorphic modular form $\mathbb{D}$ rational Fourier coeff. を持つ

(Weissauer [15])。このことから Th. 1 が出る。

2.2 Integrality.

Th. 1 の special values について、もう少しわかる：

Theorem 2. $f \in S_{\mathbb{R}}^n$ を Th. 1 の通りとし、さらに (一般性を失うことなく) ある Fourier coeff. = 1 とする。

$m \in \mathbb{Z}$ を Th. 1 の通りとするとき、

$$L_{St}^*(m, f) \in C_{\mathbb{R}}(n)^{-\delta_{m, n-n}} \xi_{\mathbb{R}}^{n(m)-1} N_{m,n}^{-1} \\ \cdot \prod_{i=[\frac{n}{2}]+1}^n \text{Den} \left(\frac{B_{2\mathbb{R}-2i}}{\mathbb{R}-i} \right)^{-1} \sigma(f)^{-1} \mathbb{Z}(f).$$

Notation and 説明.

B_ν : ν -th Bernoulli number, i.e., $B_\nu = -\nu \zeta(1-\nu)$ ($\nu > 0$).

$$N_{m,n} := \prod_{\substack{p: \text{prime} \\ (p-1) | (2m+n) \\ p: \text{odd if } n \not\equiv 0 \pmod{4}}} p \cdot \left[m + \frac{n}{2} \right]_p \quad ([\cdot]_p := p\text{-part}),$$

$$\xi_k^n(m) := 2^{2 + \frac{n(n+1)}{2} - nk - m} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma_n \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \Gamma_{n+1} \left(m + \frac{n}{2} \right) \\ \cdot \Gamma(n+1)^{z(k-m-n)} \Gamma_{2(k-m-n)} \left(k - \frac{n}{2} \right) \Gamma_{2(k-m-n)}^{(k-n)^{-1}}$$

$$\in \mathbb{Q}_{>0},$$

$$=: \tau'' \quad \Gamma_\nu(s) := \prod_{j=1}^{\nu} \Gamma \left(s - \frac{j-1}{2} \right).$$

M_k^n a subspace W & $R \subset \mathbb{C}$: subring $1 \neq \pm 1 \neq$

$$W(R) := \{ f \in W \mid \forall \text{ Fourier coeff. of } f \in R \} \\ (\text{R-module}),$$

$\mathbb{T}_R$: ring of Hecke operators $/R \subset \text{End}(S_R^n)$

& $\exists \circ$. $[]_{n-1}^n : M_k^{n-1} \rightarrow M_k^n$ & Eisenstein lifting

& $\exists \circ$ & $\exists$

$c_k(n)$: exponent of $[M_k^{n-1}(\mathbb{Z})]_{n-1}^n / [M_k^{n-1}]_{n-1}^n(\mathbb{Z})$.

$V \subset S_k^n(\mathbb{Q})$ & $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$ -simple component τ'' $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \ni f$
 $\tau \neq \pm 1$, $V' \subset S_k^n(\mathbb{Q})$ & $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$ -submodule τ'' $V' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$
 $= (V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^{\perp}$ & $\tau \neq \pm 1$ & $\perp$.

$\nu(f)$: exponent of $S_k^n(\mathbb{Z}) / (V(\mathbb{Z}) \oplus V'(\mathbb{Z}))$ & $\exists \circ$.

$\mathbb{Z}(f)$ は $\mathbb{Q}(f)$ の integer ring ,

$$Tf = \lambda(T, f)f \quad (T \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}) \text{ と書くとき.}$$

$\kappa(f)$: exponent of $\mathbb{Z}(f) / \mathbb{Z}[\lambda(T, f) \mid T \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}]$.

また $\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}$ の different を $\mathfrak{D}(\mathbb{Q}(f))$ と書くとき, 上の

$$\sigma(f) := \kappa(f) \nu(f, \mathfrak{D}(\mathbb{Q}(f))) \text{ である. } \blacksquare$$

Example. $n=2, k=10$.

$$f_{10} := -4\chi_{10} \text{ (Igusa's notation)} \in S_{10}^2(\mathbb{Z}).$$

また f_{10} は eigenform として $\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, f_{10}\right) = 1$.

Th. の主張は

$$L_{\underline{St}}^*(8, f_{10}) \in \frac{2^{19}}{3^{18} \cdot 5^8 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 43867} \mathbb{Z}.$$

$$\text{すなわち } c_{10}(2) = 43867 \mid B_{18}.$$

正確な値は

$$L_{\underline{St}}^*(8, f_{10}) = \frac{2^{36}}{3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 43867}.$$

2.3 Residues

$f \in S_k^n$ と $k \geq n$ ならば eigenform として Fourier coeff.

$\in \mathbb{Q}(f)$ とする。すなわち述べたように

$$L_{\underline{St}}(s, f) \text{ が } s=1 \text{ として (simple) pole をとる } \Leftrightarrow f \in B_k^n(2n).$$

このとき

$$\frac{\text{res}_{s=1} L_{\underline{St}}(s, f)}{\pi^{nk - \frac{n(n+1)}{2}}(f, f)} \in \mathbb{Q}(f)$$

と表す。

References

1. Andrianov, A.N.: Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2. (English transl.) Russian Math. Surveys, 29, 45-116 (1974).
2. Andrianov, A.N., Kalinin, V.L.: On the analytic properties of standard zeta functions of Siegel modular forms. (English transl.) Math. USSR Sbornik, 35, 1-17 (1979).
3. Böcherer, S.: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II. Math. Z., 189, 81-110 (1985).
4. Böcherer, S.: Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe. J. reine angew. Math., 362, 146-168 (1985).
5. Böcherer, S.: Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß. Mathematica Gottingensis Schriftenreihe SFB's, Geometrie und Analysis, 68 (1986).
6. Böcherer, S.: Siegel modular forms and theta series. Proc. Symp. Pure Math., 49, Part 2, 3-17 (1989).
7. Borel, A.: Automorphic L-functions. Proc. Symp. Pure Math., 33, Part 2, 27-61 (1979).

8. Deligne, P.: Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. Proc. Symp. Pure Math., 33, Part 2, 313-346 (1979).
9. Evdokimov, S.A.: A characterization of the Maass space of Siegel modular forms of second degree. Math. USSR Sbornik, 40, 125-133 (1981)
10. Harris, M.: Special values of zeta functions attached to Siegel modular forms. Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 14, 77-120 (1981).
11. Oda, T.: On the poles of Andrianov L -functions. Math. Ann., 256, 323-340 (1981).
12. Piatetski-Shapiro, I., Rallis, S.: L -functions for the classical groups. In: Lecture Notes in Math., 1254. Springer 1987.
13. Mizumoto, S.: Poles and residues of standard L -functions attached to Siegel modular forms. preprint (1990).
14. Sturm, J.: The critical values of zeta functions associated to the symplectic group. Duke Math. J., 48, 327-350 (1981).

15. Weissauer, R.: Stabile Modulformen und Eisensteinreihen. Lecture Notes in Math., 1219. Springer 1986.