

On the imbedding as a double commutator
in a type I AW^* -algebra

東北大理 斎藤知之

今 B を中心が $\mathbb{Z}$ である I 型 AW^* -代数とし, M を中心が $\mathbb{Z}$ なる AW^* -部分代数 (M の任意の元 x の右射影元 $RP(x)$ が M で計算しても, B で計算しても同じ) とする。我々が考える問題は, 『 M'' を M の B に於ける 2 重交換子代数とすると, $M = M''$ が成立するか?』である。

H. Widom [12] は, AW^* -代数が中心を同じくする I 型の AW^* -代数の中に少なくとも AW^* -埋蔵 (埋蔵像がその中で AW^* -部分代数となる事) できる必要充分条件は, それが中心に値をとる, 射影元上完全連続なスラットを充分沢山もつことであることを示し, 有限型の場合は, その AW^* -埋蔵による像は, その I 型の代数の中で 2 重交換子代数になることを示した。H. Widom の方法は, 中心値 ^(c.a.) ステートに対する Gelfand-Segal の構成法を使用するものであり有限型という仮定が本質的であった。本講演では, 上の Gelfand-Segal の構成法を透明にしようという観点から「ベクトル値測度」による非可換積

分論を展開し、それを使用して半有限型の場合にも上の結果が成立することを示し、併せて、最初の問題に対する M の半有限型の場合の肯定的解答を与えようと思う。主な定理は、

定理. M を中心 Z とする半有限型 AW^* 代数とし、 M 上には射影元上完全連続な Z -値有界非負モジュール準同型写像が充分沢山あれば、 M は、 Z を中心とする 1 型 AW^* 代数の中に 2 重交換子代数として埋蔵できる。

AW^* 代数に関する Feldman の予想は、 W^* 代数の非 W^* 、 AW^* 代数は存在しないであろう、というものであったが部分的解答として、

系. B を中心 Z の 1 型 AW^* 代数とし、 A を B の Z を含む半有限型 AW^* 部分代数とすると、 $A = A''$ (A の B に於ける 2 重交換子) が成立する。($Z = \mathbb{C} \cdot 1$ が Feldman の問題。)

§1 準備. AW^* 代数 M はそれが C^* 代数で、しかも Baer*-環であるものである。 AW^* 代数に関する情報は、[1], [5], [6], [7], [12] を参照していただきたい。

1. 1. 順序極限と中心値 c.a. ステート。

今 Z を可換 AW^* 代数とすると Gelfand-Naimark の定理により Z ($Z.s.a.$: Z の自己共役部) は、ストーン空間 Ω 上の複素数 (実数)-値連続関数全体のつくる代数と同視できる。 $[-\infty, \infty]$

に区間値相を入れ今 $C_r^*(\Omega)$ を Ω 上の $[-\infty, \infty]$ -値連続函数全体とするとこれは、自然な順序に関して、 $C_r(\Omega)$ 及び $\mathbb{Z}$ (Ω 上の $[0, +\infty]$ -値連続函数全体) を部分束として含む完備束になる。今 $\{a_\lambda\}$ を $C_r^*(\Omega)$ のネットとしこれが $a \in C_r^*(\Omega)$ に順序収束する ($a_\lambda \rightarrow a(0)$) というのは、 $a = \limsup a_\lambda = \liminf a_\lambda$ の時である。又 $C_r^*(\Omega)$ の元によるテカルト分解によって $C(\Omega)$ の中に自然に順序収束の概念を導入できる。

次に M を AW^* -代数とし、 $\mathbb{Z}$ をその中心とする。 M 上の $\mathbb{Z}$ -値ステート ϕ というのは、 M から $\mathbb{Z}$ への非負、有界、モッル準同型 ϕ の事であり、 ϕ が c. a. であるというのは、 M の射影元のかつてな直交族 $\{e_\alpha\}$ に対して、 $\phi(\sum_\alpha e_\alpha) = \sum_\alpha \phi(e_\alpha)$ ($\mathbb{Z}$ の順序収束に関する非条件和) が成立することである。

補題. 中心値 c. a. ステート ϕ は、Widom の意味で連続である、すなわち M の射影元のかつてな直交族 $\{e_\alpha\}$ に対して、

$$\phi(a^*(\sum_\alpha e_\alpha)a) = \sum_\alpha \phi(a^*e_\alpha a)$$

($\forall a \in M$) が成立する。

以下 M を半有限型 AW^* -代数とし、 $\mathbb{Z}$ をその中心とする。そして c. a. ステートの分離集合 $\mathcal{G}$ をもつものとする。

今 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ を $\{a^*\phi a \mid \phi \in \mathcal{G}, a \in M\}$ の元の有限-次結合全体とする。von Neumann 代数に与ける σ -弱位相の代りに我々は、 M に次の様な収束の概念を入れることにする。

定義 1.1. M に於ける ネット $\{a_\alpha\}$ が M の元 a に $\mathcal{G}$ -0-収束する ($a_\alpha \rightarrow a$ ($\mathcal{G}$ -0)) というのは、 $\phi(a_\alpha - a) \rightarrow 0$ (0) ($\forall \tau$)
 $\forall \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ の時である。

注意. 実際に必要なのは、次の場合である。

(1) $\{a_\alpha\}$ を M の射影元の直交族とすると、 $\sum_{\alpha \in J} e_\alpha \rightarrow e$ ($\mathcal{G}$ -0)
 ($J: \{a_\alpha\}$ の有限部分集合) 但し $e = \sum_{\alpha} e_\alpha$ とする。又 $\forall a \in M$ に対して、 $a^*(\sum_{\alpha \in J} e_\alpha)a = \sum_{\alpha \in J} a^*e_\alpha a \rightarrow a^*ea$ ($\mathcal{G}$ -0) が成立する。

(2) $\mathcal{G}$ -0-収束の極限は一意 ($\mathcal{G}$ が分離集合) である。

§2 $\mathcal{G}$ -0-連続非可換ベクトル値測度重の存在。[10] に於ける「 $\mathcal{G}$ -位相」の代りに「 $\mathcal{G}$ -0-収束」の概念を使用して [10] と同様の方法によって

補題 2.1. M^+ (M の非負部) から $\mathbb{Z}^+$ の次の性質をもつ作用素重 (非可換ベクトル値測度) が存在する。

- (1) $s, t \in M^+$, $\lambda \geq 0$ (実数) に対して、 $\Phi(\lambda s + t) = \lambda \Phi(s) + \Phi(t)$;
- (2) $s \in M^+$, $t \in \mathbb{Z}^+$ ならば、 $\Phi(ts) = t\Phi(s)$ (モジュール);
- (3) $s \in M^+$, $u \in M$ (u はユニタリ) ならば、 $\Phi(usu^*) = \Phi(s)$ (ユニタリ不変);
- (4) $\Phi(s) = 0$ ($s \in M^+$) ならば $s = 0$ (忠実);
- (5) M^+ のかゝる単調増加ネット $\{a_\mu\}$ で、 $a_\mu \uparrow a$ ($\mathcal{G}$ -0) ($a \in M^+$) なるものに対して $\Phi(a_\mu) \uparrow \Phi(a)$ (0) ($\mathbb{Z}^+$) (連続性);
- (6) M のかゝる射影元 e に対して $\exists f (\neq 0)$, $f \leq e$, $f: M$ の

射影元且 $\psi(f) \in \mathbb{Z}$ である (半有限)。

次に $\mathcal{D} = \{s \in M^+; \psi(s) \in \mathbb{Z}^+\}$ とするとよく知られているように $\mathcal{D}$ が両側イデアル $\mathcal{K}$ の非負部になる事及び, $\mathcal{K}$ から $\mathbb{Z}$ への $\mathcal{D}$ 上 ψ と一致し, $\psi(st) = \psi(ts)$ ($s \in M, t \in \mathcal{K}$), を満す一意に決まる $\mathbb{Z}$ -モジュール線型作用素 $\bar{\psi}$ が存在する事がわかる。

今 $\text{Rank}(x) = \psi(LP(x))$ ($\forall x \in M$, 但し $LP(x)$ は x の左射影元) と置けば,

- (1) $\text{Rank}(x) \geq 0 \quad = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (2) $\text{Rank}(x) = \text{Rank}(x^*)$;
- (3) $\text{Rank}(x+y) \leq \text{Rank}(x) + \text{Rank}(y)$;
- (4) $\text{Rank}(xy) \leq \text{Rank}(x), \text{Rank}(y)$

が成立するから $\mathcal{F} = \{a \mid a \in M, \text{Rank}(a) \in \mathbb{Z}^+\}$ は $\mathcal{K}$ に含まれる両側イデアルで その射影元の部分は $\mathcal{K}$ のそれと一致する。さらに上の補題 2.1.(6) によれば, $\mathcal{F}$ の射影元は充分沢山ある事がわかる。

§3. M に属する局所可測作用素のつくる $*$ -代数について。

「測度」の存在の次に 非有界可測函数に対応する「局所可測作用素」の構成について論ずる。この節の話は別に M が分離集合をもつ必要はないが話を簡単にするため一応仮定しておく。我々は以前 [9] で, M に属する「可測作用素」(MO) を構成し, それ

のつくる $\ast$ -代数 C について考察した。主な性質は (1) C は Baer $\ast$ -環である, (2) Cayley 変換による C の元のスペクトル分解 (3) C の元の極分解等であった。次に問題となるのは, $\{x_\alpha\}$ を C の元の族とし, $\{e_\alpha\}$ を Σ の射影元の直交族とし $\Sigma e_\alpha = 1$ とする。その時, $x e_\alpha = x_\alpha e_\alpha$ ($\forall \alpha$) を満す x が C に一意に存在するか? である。一意性は性質 (1) によってわかるから問題は存在性である。S. K. Berberian は, M が有限型の場合に肯定的解答を与えた。しかし一般 (半有限型) の場合はかならずしも成立しない ([11])。そこでこの性質による C の完備化を考えよう。今 $\{x_\alpha, e_\alpha\}$ を C の元 x_α と Σ の射影元 e_α ($e_\alpha e_\beta = 0$ ($\alpha \neq \beta$) 且 $\Sigma e_\alpha = 1$) との順序対の族とする ($\{x_\alpha, e_\alpha\}$ を ELMO と呼ぶ)。2 つの ELMO $\{x_\alpha, e_\alpha\}, \{y_\beta, f_\beta\}$ が同値であるというのは, $e_\alpha f_\beta x_\alpha = e_\alpha f_\beta y_\beta$ ($\forall \alpha, \beta$) の時である。実際この関係は, 同値関係を満す。今 (x_α, e_α) を $\{x_\alpha, e_\alpha\}$ の同値類とし, これを M に属する「局所可測作用素」(LMO) と呼び, それら全体を $\mathcal{M}$ とする [11]。 $\mathcal{M}$ に於ける代数演算は $(x_\alpha, e_\alpha), (y_\beta, f_\beta) \in \mathcal{M}$ λ (スカラー) として, $\lambda(x_\alpha, e_\alpha) = (\lambda x_\alpha, e_\alpha)$, $(x_\alpha, e_\alpha) + (y_\beta, f_\beta) = (x_\alpha + y_\beta, e_\alpha f_\beta)$, $(x_\alpha, e_\alpha)^* = (x_\alpha^*, e_\alpha)$, 且 $(x_\alpha, e_\alpha)(y_\beta, f_\beta) = (x_\alpha y_\beta, e_\alpha f_\beta)$ とする (C が Baer $\ast$ -環であることから上の定義は意味をもつ i.e. 同値類の代表元のとりえによってかわれない)。上の定義により $\mathcal{M}$ は複素数体上の $\ast$ -代数になる。さらに

C の Baer*-環の性質により $x \in C \rightarrow (x, 1)$ は, C から $\mathcal{M}$ の中への *-同型写像であり $(1, 1)$ が $\mathcal{M}$ の単位元になっている。今後 C (従って M) を $\mathcal{M}$ の *-部分代数と考えることにする。又記号を簡単にするため $\mathcal{M}$ の元も $x, y, z, \dots$ で表わすことにする。主な結果は、次のとおりである。

(1) $\mathcal{M}$ は Baer*-環である；

(2) $x \in \mathcal{M}$ は, $x = w|x|$ ($|x| = (x^*x)^{1/2}$) $w^*w = RP(x)$, $ww^* = Lp(x)$ なるように一意に極分解ができる。

(3) M の中心 Z の射影元の直交族 $\{e_\alpha\}$ ($\sum_\alpha e_\alpha = 1$) 及び $\mathcal{M}$ の元の族 $\{x_\alpha\}$ に対して $xe_\alpha = x_\alpha e_\alpha$ なる x が $\mathcal{M}$ の中にたっぷり存在する。

さらに $\mathcal{M}_{sa}$ ($\mathcal{M}$ の自己共役部) は, $x \geq y \iff x - y = z^*z$ ($z \in \mathcal{M}$) により実数体上の線型順序空間になる。

α 部分代数 M は, $\{x \mid x \in \mathcal{M}, x^*x \leq \alpha 1 \quad \alpha \geq 0 \text{ (スカラー)}\}$ なる有界部分として特徴づけられる。

§4. $(\mathcal{M}, \pi)$ に関する積分論。以上 §2, §3 の準備のもとに $(\mathcal{M}, \pi)$ なる測度空間に於ける積分論を展開する。ここでは, $L^2(\pi)$ をつくるのが目的である。まずバートル値測度の場合と同様に π を $\mathcal{M}^+$ ($\mathcal{M}$ の非負部) まで拡張する。

定義 4.1 ([8]). $\mathcal{M}^+$ の元 x に対して,

$$\Phi(x) = \sup\{\Phi(a) \mid a \in M^+, a \leq x\} \quad (\mathbb{Z} \text{ に 3 分 法})$$

($x \in M$ に対しては, 新しい重と古い重とは一致することは明らか)。 M に 3 分 法 的 代 数 演 算 と 拓 張 さ れ た 重 と の 関 係 は, 次 の よ う で あ る。

補題 4.1. $s, t \in M^+, \lambda \geq 0$ (実数) に対して,

$$(1) \Phi(\lambda s + t) = \lambda \Phi(s) + \Phi(t);$$

$$(2) \Phi(usu^*) = \Phi(s) \quad u \in M_u;$$

$$(3) \Phi(as) = a\Phi(s) \quad (\forall a \in \mathbb{Z}^+);$$

(4) M^+ の 単 調 増 加 ネ ッ ト $\{a_\alpha\}$ で $a_\alpha \uparrow e$ ($\mathbb{G}-0$) ($e \in M$: 射影元) なら $\Phi(s^*a_\alpha s) \uparrow \Phi(s^*es)$ ($\forall s \in M$) ($\mathbb{Z}$ に 3 分 法)。

略証) まず $\Phi(x) = \sup\{\Phi(a) \mid a \in \mathcal{F}^+, a \leq x\}$ となる事を示そう。 $\geq$ は明らか。 右辺 = b とする。 補題 2.1.(6) により $\mathcal{F}$ の射影元の直交族 $\{e_\alpha\}$ で $\sum_\alpha e_\alpha = 1$ なるものが存在する。 $a \in M^+$ に対して, $a^{1/2}(\sum_{\alpha \in J} e_\alpha)a^{1/2} \uparrow a$ ($\mathbb{G}-0$) ($J \subset \{\alpha\}$: J は $\{\alpha\}$ の有限集合) に注意して, 再び補題 2.1(5) により $\Phi(a) = \sup_J \Phi(a^{1/2}(\sum_{\alpha \in J} e_\alpha)a^{1/2})$ となり $a^{1/2}(\sum_{\alpha \in J} e_\alpha)a^{1/2} \in \mathcal{F}^+$ に注意して $\Phi(a) \leq b$ が成立するからである。 (2) は定義から明らかである。 (1) を示そう。 $\lambda = 1$ としてよい。 $a \in \mathcal{F}^+ : a \leq s+t$ とする。

$s+t \geq 0$ から $s+t + (\frac{1}{n})1$ は M で可逆であり, $(s+t + (\frac{1}{n})1)^{-1} \in \{s+t\}'' \cap M$ になることから, $c_n = a^{1/2}((\frac{1}{n})1 + s+t)^{-1}(s+t)^{1/2}$ とすると, $c_n, a^{1/2} - c_n(s+t)^{1/2}$ はともに有界元で,

$$\|a^{1/2} - c_n(s+t)^{1/2}\| \leq 1/n \quad \text{且} \quad \|c_n\| \leq 1 \quad (\forall n)$$

が成立する。今 $x = c_n s^{1/2}$, $y = c_n t^{1/2}$ とすると, $xx^* = c_n s c_n^* \leq c_n(s+t)c_n^* = a^{1/2}((1/n)1 + s+t)^{-2}(s+t)^2 a^{1/2} \leq a$, 同様に, $yy^* \leq a$ から, $a \in \mathcal{F}$ に注意して, $x, y \in \mathcal{F}$ である。今 $a_1 = x^*x$, $a_2 = y^*y$ とすると $a_1, a_2 \in \mathcal{F}^+$ で, $a_1 \leq s$, $a_2 \leq t$ から,

$$\begin{aligned} \Phi(s) + \Phi(t) &\geq \Phi(a_1) + \Phi(a_2) \\ &= \Phi(x^*x) + \Phi(y^*y) (= \Phi(xx^*) + \Phi(yy^*)) \\ &= \Phi(c_n(s+t)c_n^*) \end{aligned}$$

となる。次に $\Phi(a)$ と $\Phi(c_n(s+t)c_n^*)$ との差が非常に小さいことを示そう。 $a^{1/2}, c_n(s+t)^{1/2} \in \mathcal{F}$ に注意して,

$$\Phi(a) - \Phi(c_n(s+t)c_n^*) = \Phi(\{a^{1/2} + c_n(s+t)^{1/2}\}\{a^{1/2} - c_n(s+t)^{1/2}\}^*)$$

が成立するから

$$\begin{aligned} \|\Phi(a) - \Phi(c_n(s+t)c_n^*)\| &\leq \|a^{1/2} + c_n(s+t)^{1/2}\| \|\Phi(|a^{1/2} - c_n(s+t)^{1/2}|)\| \\ &\leq 2\sqrt{n} \cdot \|a\|^{1/2} \|\Phi(Lp(a))\| \quad (\forall n), \end{aligned}$$

従って $a \geq c_n(s+t)c_n^*$ により

$$\begin{aligned} \Phi(s) + \Phi(t) &\geq \Phi(c_n(s+t)c_n^*) \\ &\geq \Phi(a) - 2\sqrt{n\|a\|} \cdot \|\Phi(Lp(a))\| \cdot 1 \quad (\forall n) \end{aligned}$$

が成立する。故に $\Phi(s) + \Phi(t) \geq \Phi(a)$ ($\forall a \in \mathcal{F}^+ : a \leq s+t$)

となり $\Phi(s) + \Phi(t) \geq \Phi(s+t)$ である。逆向きは明らかである

から (1) が示された。(3) を示そう。 $a \in \mathcal{F}^+$, $t \in \mathcal{M}^+$ に対して,

$a\Phi(t) \leq \Phi(at)$ は明らか。逆をいう。今 $c \in \mathcal{F}^+$ で, $c \leq at$ なら,

任意の自然数 n に対して $C \leq (a + \frac{1}{n}1)t$ より, $(a + \frac{1}{n}1)^{-1}a\Phi(C) \leq a\Phi(t)$

となる。 $Lp(a)C = C$ 且 $(a + \frac{1}{n}1)^{-1}a \uparrow Lp(a)$ に注意して, $\Phi(C) \leq a\Phi(t)$ が成立するから $\Phi(at) \leq a\Phi(t)$ が成立する。よって (3) が成立。

(4) を示そう。記号を簡単にするために $\sigma_s(x) = \Phi(s^*xs) \quad \forall x \in M^+$

とする。 $\sigma_s(e) \geq \sup \sigma_s(a_\alpha)$ は明らかである。 $b \in \mathcal{F}^+ : b \leq e s s^* e$

なら $eb = be = b$ で, $b^{1/2} a_\alpha b^{1/2} \uparrow b^{1/2} e b^{1/2} = b$ ($\mathcal{G} = 0$) である。従って,

補題 2.1 により $\Phi(b^{1/2} a_\alpha b^{1/2}) \uparrow \Phi(b)$ ($\mathbb{Z}$ 上)。 - 又 $\Phi(b^{1/2} a_\alpha b^{1/2})$

$= \Phi(a_\alpha^{1/2} b a_\alpha^{1/2}) \leq \Phi(a_\alpha^{1/2} s s^* a_\alpha^{1/2}) = \Phi(s^* a_\alpha s)$ より $\sigma_s(e) \leq \sup \sigma_s(a_\alpha)$

が成立する。

以上。

今 $\mathcal{L}^+ = \{s \mid s \in M^+, \Phi(s) \in \mathbb{Z}^+\}$, $L'(\Phi) = \{\sum_{i=1}^n t_i s_i^*, s_i, t_i \in M \text{ 且 } \Phi(t_i^* t_i), \Phi(s_i^* s_i) \in \mathbb{Z}^+ (i=1, 2, \dots, n)\}$ とすると, $L'(\Phi)$

は $\mathcal{L}^+$ を非負部にもち, 不変 ($M \cdot L'(\Phi) \cdot M \subset L'(\Phi)$) $\mathbb{Z}$ -モジュール

である。前の §2 の場合と同様にして, $L'(\Phi)^+ = \mathcal{L}^+ \text{ 上 } \Phi$ と一致する

$L'(\Phi)$ から $\mathbb{Z}$ への忠実, 非負 $\mathbb{Z}$ -モジュール線型写像 Φ が一意に存在し, $s, t \in L'(\Phi)$ に対して, $\Phi(|s+t|) \leq \Phi(|s|) + \Phi(|t|)$ が成立。

今 $\|s\|_1 = \|\Phi(|s|)\|$ ($\forall s \in L'(\Phi)$) とすると $L'(\Phi)$ は $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ に関して $\mathbb{Z}$ 上の Banach-モジュールとなる。

略証) 最初に与えられた Cauchy 列 $\{t_n\}$ ($\|t_n - t_m\|_1 \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$)) が $L'(\Phi)^+$ の単調増加列の場合を考察する。適当に部分列をとることにより $\|t_n - t_{n+1}\|_1 < 1/4^n$ ($\forall n$) と仮定してよい。スペクトル分解により $\{t_{n+1} - t_n\}$ の射影元 e_n , 及び $\{t_n\}$ の射影元

f_n が $0 \leq (t_{n+1} - t_n)e_n \leq 2^{-n} \cdot 1$, $(t_{n+1} - t_n) \geq 2^{-n}(1 - e_n)$, $0 \leq t_n f_n \leq 2^{-n} \cdot 1$ 且つ $t_n \geq 2^n(1 - f_n)$ ($\forall n$) となる如く存在する。今 $P_n = \bigwedge_{k \geq n} e_k \wedge f_k$ と置けば, $\Phi(1 - P_n) \leq (1 + \sup_n \|t_k\|_1) 2^{-n} \cdot 1$ ($\forall n$) が成立するから, $\{P_n\}$ は SDD となる。今 $P_n \leq e_n \wedge f_n$ に注意して $k \leq n \leq m$ ならば, $(t_m - t_n)P_k \in M$ 且つ $\|(t_m - t_n)P_k\| < 1/2^{n-1}$ となる。さらに $t_n P_k \leq 2^k f_k$ に注意して数学的帰納法から $t_m P_k \in M$ ($\forall m \geq k$) である。今 $a(n, k) = P_k t_n P_k + P_k t_n (1 - P_k) + (1 - P_k) t_n P_k$ ($n \geq k$) と置けば, $\{a(n, k)\}$ は, M の自己共役元の様 Cauchy 列であるから, $a(n, k) \rightarrow s(k)$ ($n \rightarrow \infty$) なる M.s.a. の元 $s(k)$ が存在する。簡単な計算から $\{s(k), P_k\}$ は EMO となり $t = [s(k), P_k] \in \mathcal{C}$ は, $t \geq t_n$ 且つ $\Phi(t) = \sup_n \Phi(t_n)$ ($\mathbb{Z}^+$) を満す。仮定から $\sup_n \|t_n\|_1 < \infty$ ($\|t_n\|_1 = \|\Phi(t_n)\|$) より, $\Phi(t) \in \mathbb{Z}^+$ ($t \in \mathcal{L}^+ = L^+(\Phi)^+$)。

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \|t_n - t_{n-1}\| < \sum_{n=1}^{\infty} 1/4^n < \infty$ ($t_0 = 0$) から $\forall \varepsilon > 0$ (実数) に対して $\sum_{k=k+1}^{\infty} \|t_n - t_{n-1}\| < \varepsilon$ $\forall k \geq k(\varepsilon)$ なる ($\sum_{n=k+1}^m \Phi(t_n - t_{n-1}) = \Phi(t_m) - \Phi(t_k) \leq \varepsilon \cdot 1$ $\forall k \geq k(\varepsilon)$) 自然数 $k(\varepsilon)$ が存在する。

従って $\Phi(t) - \Phi(t_k) \leq \varepsilon \cdot 1$ $\forall k \geq k(\varepsilon)$ から $\|t - t_k\|_1 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) が成立する。以上は [8] の AW*-analogue である。2. 一般の場合は [8] と同様なので省略する。以上。

次に $L^2(\Phi) = \{s \mid s \in \mathcal{M}, \Phi(s^*s) \in \mathbb{Z}^+\}$ とすると簡単な計算から $L^2(\Phi)$ は $\mathbb{Z}$ -モジュールで $L^2(\Phi) \cdot L^2(\Phi) \subset L^1(\Phi)$ を満す。 $a, b \in L^2(\Phi)$ に対して, $(a, b) = \Phi(b^*a)$ とすると $(,)$ は,

$$(1) (a, b) = (b, a)^*, (a, a) \geq 0, (a, a) = 0 \leftrightarrow a = 0;$$

$$(2) (sa + b, c) = s(a, c) + (b, c), a, b, c \in L^2(\mathfrak{A}), s \in \mathbb{Z}$$

を満たす。さらに $\|a\|_2 = \|(a, a)\|^{1/2} (a \in L^2(\mathfrak{A}))$ とすると, $L^2(\mathfrak{A})$ は, $\|\cdot\|_2$ -に関して $\mathbb{Z}$ 上のノルムモジュールになり, さらに $\mathcal{M}$ の Baer*-環である事及び性質(3)により

(3) $\{e_i\}$ を $\mathbb{Z}$ の射影元の直交族で $\sum e_i = e$ ($\mathbb{Z}$ の射影元) ならば $a \in L^2(\mathfrak{A})$ が $e_i a = 0$ ($\forall i$) を満たせば, $ea = 0$;

(4) $\{e_i\}$ を $\mathbb{Z}$ の射影元の直交族で $\sum e_i = 1$ とし, $\{a_i\}$ を $L^2(\mathfrak{A})$ の $\|\cdot\|_2$ -有界な族とすると, $L^2(\mathfrak{A})$ の中に $e_i a = e_i a_i$ ($\forall i$) を満たす a がただ一つ存在する ($a = \sum e_i a_i$)。

補題 4.2. $L^2(\mathfrak{A})$ は, 忠実な $\mathbb{Z}$ -AW*-モジュールである。

問題は $\|\cdot\|_2$ -ノルムによる $L^2(\mathfrak{A})$ の完備性であるが, $L^1(\mathfrak{A})$ の場合とほとんど同じなので 省略 する。
証明は

§5 $\mathcal{M}$ の 2 重交換子代数としての埋蔵定理。今後簡単にするため $L^2(\mathfrak{A})$ を $\mathcal{M}$ と書くことにする。 $\mathcal{M}$ の有界モジュール自己準同型写像全体 $B(\mathcal{M})$ は, 中心を $\mathbb{Z}$ とする I 型の AW*-代数である ([7])。今 $\mathcal{M}$ の $\mathcal{M}$ 上の正則表現を問題にしよう。 $\mathcal{M}$ の左(右)正則表現 π_1 (π_2) は, $\pi_1(x)t = xt$ ($\pi_2(x)t = tx$) $\forall x \in \mathcal{M}, t \in \mathcal{M}$ により定義された $\mathcal{M}$ から $B(\mathcal{M})$ の中への *-準同型 (*-反準同型) 写像である。補題 1(6) 及び (5) から $\pi_1(x) = 0$ ($\pi_2(x) = 0$)

から $x=0$ がでるから $\pi_1(\pi_2)$ は $\ast$ -同型 ($\ast$ -反同型)写像である。

又補題 4.1 (4) 及び [12, 補題 1.4] から

補題 5.1. $\pi_1(M), \pi_2(M)$ は, $B(\mathcal{M})$ の $AW^\ast$ -部分代数である。

$\mathcal{M}$ の可逆な元 a に対して $V\{\pi_1(M)'a\}$ を $\pi_1(M)'a$ ($\pi_1(M)'$ は $\pi_1(M)$ の B に於ける交換子) によって生成された $\mathcal{M}$ の $AW^\ast$ -部分モジュールとし, $E(a)$ をその上の射影作用素 (a に対する巡回射影作用素) とすると $E(a) \in \pi_1(M)''$ が成立する。実際 $A \in \pi_1(M)'$ に対して $A(\pi_1(M)'a) \subset V\{\pi_1(M)'a\}$ 。今 $\{e_\alpha\}$ を Σ の射影元の直交族で, $\sum_\alpha e_\alpha = 1$ とし, $\{y_\alpha\}$ を $\pi_1(M)'a$ の $\|\cdot\|_2$ -有界な族とすると, $A(\sum_\alpha e_\alpha y_\alpha) = \sum_\alpha e_\alpha A y_\alpha$ ($\mathcal{M}$ 上で) となるから $A(\sum_\alpha e_\alpha y_\alpha) \in V\{\pi_1(M)'a\}$ となり A の連続性により $A\{V\{\pi_1(M)'a\}\} \subset V\{\pi_1(M)'a\}$, i.e. $AE(a) = E(a)AE(a)$ ($\forall A \in \pi_1(M)'$) から $E(a) \in \pi_1(M)''$ となる。

定理. $\pi_1(M) = \pi_1(M)''$ ($B(\mathcal{M})$ 上で), すなわち M は中心を Σ とする 1 型 $AW^\ast$ -代数の中に 2 重交換子代数として埋蔵できる。

略証) スパクトル定理から $\pi_1(M)''$ の射影元が $\pi_1(M)$ に入ることを示せば充分。 $P \in \pi_1(M)''$ の射影元とすると, $\pi_1(M)''$ の巡回射影元の族 $\{E(x)\}$ があって, $P = \sum_x E(x)$ ($B(\mathcal{M})$ 上で) と書けるから [12, 補題 4.5] 及び 補題 5.1. から $E(x) \in \pi_1(M) \forall x \in \mathcal{M}$ を示せば充分である。 $x \in \mathcal{M}$ を $x = u|x|$ と極分解すると, $E(x) = \pi_1(u)E(|x|)\pi_1(u)^*$ が成立するから $x \geq 0$ として充分であ

る。スペクトル分解及び重の性質から $\{x\}''$ の中に射影元の列

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ があって、 $\sum (LP(e_n x)) \in \mathbb{Z}^+$ 且つ $e_n x \in M^+(V_n)$, 且つ,

$(e_n x - x, e_n x - x) \rightarrow 0(0)$ とできる。従って、 $E(e_n x) \uparrow E(x) (B(\mathcal{M}) \text{ 上})$

となるから 上と同じ理由から $E(e_n x) \in \pi_*(M)$ を示せば充分。

ところが補題 2.1 (6) 及び [12, 補題 4.2] から $E(x e_n) = LP_{B(\mathcal{M})}(\pi(e_n x))$

($LP_{B(\mathcal{M})}(\cdot)$ は $B(\mathcal{M})$ に於ける左射影元) が成立する。故に

補題 5.1. 及び [6] により $E(e_n x) \in \pi_*(M)$ となり証明が終る。

以上。

系. B を $\mathbb{Z}$ を中心とする 1 型の AW^* -代数とし、 $\mathcal{A}$ を $\mathbb{Z}$ を

含む B の半有限型 AW^* -部分代数とすると B で $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$ が

成立する。

証明は [12, 定理 4.4] と同じなので省略する。

上の定理を使えば

以上。

References

- [1] J. Dixmier: Sur certains espaces considérés par M.H. Stone, *Summa Brasil. Math.*, 2(1951), 151-182.
- [2] J. Feldman: Embedding of AW^* -algebras, *Duke Math. J.*, 23(1956), 303-307.
- [3] M. Goldman: Structure of AW^* -algebras I., *Duke Math. J.*, 23(1956), 23-34.
- [4] H. Halpern: Embedding as a double commutator in a type 1 AW^* -algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 148(1970), 85-98.
- [5] I. Kaplansky: Projections in Banach algebras, *Ann. of Math.*, 53(1951), 235-249.
- [6] _____: Algebras of type 1, *Ann. of Math.*, 56(1952), 460-472.
- [7] _____: Modules over operator algebras, *Amer. J. Math.*, 45(1953), 839-858.
- [8] T. Ogasawara and K. Yoshinaga: Extension of h -application to unbounded operators, *J. Sci. Hiroshima*, 19(1955), 273-299.
- [9] K. Saitô: On the algebra of measurable operators for a general AW^* -algebra, *Tôhoku Math. J.*, 21(1969), 249-270.
- [10] _____: A non-commutative theory of integration for a semi-finite AW^* -algebra and a problem of Feldman,

- Tôhoku Math. J., 22(1970), 420-461.
- [11] _____: On the algebra of measurable operators for a general AW^* -algebra II, to appear.
- [12] H. Widom: Embedding in Algebras of type I, Duke Math. J., 23(1956), 309-324.
- [13] Ti Yen: Trace on finite AW^* -algebras, Duke Math. J., 22(1955), 207-222.