

# トーラス上の力学系について

東大、理、石井 一平

## §1.

2次元トーラス  $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  上の flow で、 $T^2$  全体を *minimal set* にするものを考える。即ち、以下で考える flow  $P_t$  は次の性質をもつものとする。

$$1) \text{ 任意の } P \in T^2 \text{ に対し、 } \overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} P_t(P)} = T^2$$

さらに、次の仮定を設ける。

2)  $P_t$  は、transversal section (あるいは単に section) を持つ。

ここで、 $P_t$  の transversal section とは、次の性質をもつ、simple closed curve  $C$  のことである。

i) 任意の  $P \in T^2$  に対し、 $\min\{t > 0 \mid P_t(P) \in C\}$  が存在する。

ii)  $C$  の近傍  $U$  と、正数  $\delta$  が存在し、次を満たす。

任意の  $P \in U$  に対し、 $(\bigcup_{-\delta < t < \delta} P_t(P)) \cap C$  は唯一点からなる。

( $P_t$  が non-singular  $C^1$ -flow ならば、section が存在すること

が知られている。(Siegel)

次に flow の同型を定義する。

Def. 二つの flow  $\rho_t^1$  と  $\rho_t^2$  が同型であるとは、 $T^2$  の homeo.  $h$  と、正数  $C$  が存在して、 $\rho_t' = h \circ \rho_{Ct}^2 \circ h^{-1}$  が成り立つことである。

(この定義は、もちろん phase space が一般でもよいが、ここでは必要ないので phase space は  $T^2$  とした。)

性質 1), 2) を持つ flow のうち標準的な flow は、

$$\alpha_t(x, y) = (x+t, y+\alpha t) \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

で与えられるものである。

(但し、 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  で、 $(x+2m, y+2n)$ 、 $m, n \in \mathbb{Z}$  なるものは、すべて identify する。なわ、以下では、“ $\rho_t$ ” は 1), 2) をみたす一般の flow を表わすのに用い、“ $\alpha_t$ ” は上記の特別な flow を表わすのに用いるものとする。)

そこで、我々の目的は、次のように述べることができる。

A. 性質 1), 2) を持つ flow が、ある  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  に対し、 $\alpha_t$  と同型になる条件を求める。

B.  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  を与えて、 $\alpha_t$  と同型な flow を決定する。

§ 2.

$p_t$  を  $T^2$  上の flow で 1), 2) を満たすとする。そして,  $C$  を  $p_t$  の section とする。  $C$  の homeo.  $\Gamma$  を

$$\Gamma(P) = p_{T(P)}(P) \quad ; \quad P \in C, \quad T(P) = \min\{t > 0 \mid p_t(P) \in C\}$$

で定義する。

一 例.  $S = \{e^{2\pi i t} \mid t \in \mathbb{R}\}$  とし,  $S$  の変換  $R_\theta$  を

$$R_\theta(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i(t+\theta)} \quad ; \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ (const.)}$$

で定義する。

その時, 次の定理は, よく知られている。

**Theorem.**  $p_t$  が, 1), 2) を満たすならば,  $S$  から  $C$  への homeo.  $h$  と,  $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  が存在して, 次の diagram を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{R_\theta} & S \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{\Gamma} & C \end{array}$$

この  $\theta$  は, (flow  $p_t$  の section  $C$  に関する) rotation number と呼ばれる。(rotation number は整数差を除いて一意的。)

上の定理の " $h$ " を用いて,  $H; \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  を次のように定義する。

$$H(x, y) = \rho_{T(x, y)}(h(e^{2\pi i(y - rx)}))$$

但し.

$$T(x, y) = \{x\} T(h(e^{2\pi i(y - rx)})) + \sum_{\substack{0 \leq k \leq x-1 \\ \text{or } x \leq k \leq 0}} T(h(e^{2\pi i(y - r(x-k))}))$$

$$(\{x\} \equiv x \pmod{1} \quad \& \quad 0 \leq \{x\} < 1)$$

この  $H$  が連続であることは明らか。又、 $H(x+1, y) = H(x, y+1) = H(x, y)$  を示すことも容易に確かめることができる。さらに、 $\{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$  と  $T^2$  とが一対一に対応していることもすぐわかる。よって、 $H$  は  $T^2$  の座標変換を定義している。しかも、 $H$  によって  $P_t$  は

$$H^{-1} \circ P_t \circ H(x, y) = (x + g(t; x, y), y + r g(t; x, y))$$

という形の flow に変換される。(ただし、 $g(t; x, y)$  は各  $(x, y)$  について  $t$  の単調増加関数。)

従って、1), 2). を示す  $T^2$  上の flow はすべて、上のような形の flow に同型である。

§.3.

$P_t$  は  $T^2$  上の flow で、各  $(x, y)$  について、 $t$  の単調増加関数  $g(t; x, y)$  を用いて

$$P_t(x, y) = (x + g(t; x, y), y + r g(t; x, y)) ; \quad r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

と表わされているとする。(この  $P_t$  が, 1), 2), を満たすことは, 明らかである.)

そのとき, 次の命題が成り立つ.

Prop.  $P_t$  が almost periodic flow (a. p. flow) であるならば,

$P_t$  は  $\alpha_t$  に同型である.  $T_0$  に対し,  $\alpha = \sigma$ .

証明)  $P_t$  が  $T^2$  上の a. p. flow ならば,  $\exp(2\pi i q(t; x, y))$  は,

a. p. function. 従って, a. p. function の一般論により,

$q(t; x, y) = \lambda(x, y)t + \psi(t; x, y)$ ;  $\psi(t; x, y)$  は a. p. function

と表わすことができる.

$\lambda(x, y)$  は, 実は,  $(x, y)$  によらない定数である.

実際,  $P_t$  は a. p. flow 故, 任意の  $(x_0, y_0)$  と任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $\delta > 0$  が存在して,

$d((x_0, y_0), (x, y)) < \delta$  ならば

$d(q(t; x_0, y_0), q(t; x, y)) < \varepsilon$  for all  $t \in \mathbb{R}$ .

が成り立つ。(d は Euclid metric)

従って,  $d((x_0, y_0), (x, y)) < \delta$  ならば

$d(\lambda(x_0, y_0)t + \psi(t; x_0, y_0), \lambda(x, y)t + \psi(t; x, y)) < \varepsilon$

がすべての  $t \in \mathbb{R}$  に対して成り立つ。ところが  $\psi(t; x, y)$  は

a. p. function. 故, 有界。  $\rightarrow \lambda(x_0, y_0) \neq \lambda(x, y)$  ならば

$d(\lambda(x_0, y_0)t, \lambda(x, y)t) \rightarrow \infty$  (as  $t \rightarrow \infty$ ) .

即ち,  $\lambda(x_0, y_0) \neq \lambda(x, y)$  であるとするとき,  $d(q(t; x_0, y_0), q(t; x, y)) \rightarrow \infty$

(as  $t \rightarrow \infty$ ) となり、 $p_t$  が a.p. flow であることに矛盾する。  
 従って、 $d((x_0, y_0), (x, y)) < \delta$  ならば  $\lambda(x_0, y_0) = \lambda(x, y)$  となり得  
 ばならない。 $(x_0, y_0)$  は任意で、 $\delta$  は一様、故に、 $\lambda(x, y) = \text{const.}$

この定数を  $\lambda$  とおく。さらに、 $\lambda \neq 0$  であることが、 $\varphi(t; x, y)$   
 が単調増加函数であることからわかる。

そこで  $T^2$  の座標変換を次のように定義する。

$$\begin{cases} x' = x + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t; x, y) dt \\ y' = y + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t; x, y) dt \end{cases}$$

この変換が  $T^2$  の座標変換として、well-defined であること  
 は、T. Saito [2] の証明を全く、同様である。(ここは省略)

この座標変換を  $h$  と置く。

$$h \circ p_t \circ h^{-1}(x', y') = (x' + \lambda t, y' + \lambda t)$$

$$\textcircled{\text{D}} \quad h^{-1}(x', y') = (x, y), \quad h \circ p_t \circ h^{-1}(x', y') = x'(t; x, y)$$

と置く。

$$\begin{aligned} x'(t; x, y) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x + \varphi(t+s; x, y) - \lambda s) ds \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} (x + \varphi(\tau; x, y) - \lambda \tau + \lambda t) d\tau \\ &= \lambda t + \left( x + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} \varphi(\tau; x, y) d\tau \right) \\ &= x' + \lambda t \end{aligned}$$

同様に、

$$y'(t; x, y) = y' + \lambda y t$$

以上のことから、 $C = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\alpha = \lambda$ , そして  $h$  を上に構成したものにすれば、

$$h \circ \rho_t \circ h^{-1} = \alpha_t$$

が成り立つ。

証明終り  $\square$

この命題と、§.2. で述べたことから、次の定理が導かれる。

**Theorem.** 1), 2) を満たす  $T^2$  上の flow  $\rho_t$  が、ある  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  に對する  $\alpha_t$  に同型であるための必要十分条件は  $\rho_t$  が a.p. flow であることである。

証明) 十分性は、上の命題と §.2. の結果であり、必要性は、 $\rho_t$  が a.p. flow であることと、 $\rho_t$  が Liapunov stable であることが同値であることに注意すれば、簡単に証明することができる。(略)  $\square$

#### §.4.

この §.4 では、 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  を与えて、 $\alpha_t$  に同型の flow を決定することを考える。

flow  $\rho_t$  は 1), 2) を満たしているとし、 $C$  を  $\rho_t$  の section とする。

Def.  $T(P) = \min \{t > 0 \mid P_t(P) \in C\}$  が  $P \in C$  に与らない定数であるとき、 $C$  を constant section と呼ぶ。

このとき、次の Lemma が成り立つ。

Lemma 1.  $\alpha_t$  の  $(0,0)$  を通る constant section は

$$C_{m,n} = \{(mt, nt) \mid 0 \leq t < 1, (m,n) = 1, m,n \in \mathbb{Z}\}$$

で、すべて尽くさる。

証明)  $C$  が  $\alpha_t$  の constant section で  $(0,0) \in C$  とする。

$C$  が constant section であるから、 $T(P) = a(\text{const}) (P \in C)$ 。

従って、 $(0,0) \in C$  ならば、 $(na, \alpha na) \in C$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ 。

集合  $\{(na, \alpha na) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  を含む  $T^2$  上の curve が存在する

のは、 $a, \alpha a$  が

$$ka + l\alpha a \in \mathbb{Z} \quad \text{ならば} \quad k = l = 0 \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

という関係を満足する場合のみであり、それらの curve は

$C_{m,n}$  のいくつかである。 $(\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  であることに注意) 証明終り。]

Lemma 2.  $P_t$  は、1), 2) を満たし、 $P'_t = h \cdot P_{\frac{1}{t}} \cdot h^{-1}$  ( $C > 0$ ,  $h$  は homeo.) とする。

このとき、 $C$  が  $P_t$  の constant section ならば、 $h(C)$  は  $P'_t$  の constant section である。

証明) 明らか。



Lemma.3.  $P_t$  を 1), 2) を満たす flow,  $C$  を  $P_t$  の section とする。 $\forall t \in \mathbb{Z}$ ,  $P'_t = h \circ P_{ct} \circ h^{-1}$  ( $c > 0$ ,  $h$  は homeo.) とする。  
 このとき、 $P_t$  の  $C$  に関する rotation number と  $P'_t$  の  $h(C)$  に関する rotation number とは、等しい。

証明) 明らか。

Lemma.4.  $T^2$  の座標変換、 $h(x, y) = (x', y')$  が次を満たしているとする。

$$i), h(0, 0) = (0, 0)$$

$$ii) h \circ \alpha_t \circ h^{-1}(x', y') = (x' + t, y' + \alpha t) \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

このとき、 $h$  は恒等写像。即ち、 $h(x, y) = (x, y)$  である。

証明) Lemma.1, 2 によって、 $h(C_{0,1})$  は  $C_{m,n}$  のいずれかとなりなければならない。とすると、 $(m, n) \neq (m', n')$  ならば、 $\alpha_t$  の  $C_{m,n}$  に関する rotation number と  $C_{m',n'}$  に関する rotation number とは相異なる。従って、Lemma.3. によって  $h(C_{0,1}) = C_{0,1}$  である。

仮定 ii) と  $h(C_{0,1}) = C_{0,1}$  によって、

$h(0, 0) = (0, 0)$  故、 $h(0, \alpha) = (0, \alpha), \dots, h(0, n\alpha) = (0, n\alpha), \dots$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )。  $h$  は  $T^2$  の座標変換、 $h(0, \delta + m) = h(0, \delta)$  と  $\delta \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$  且つ、 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 。従って、任意の  $y$  に対し、 $h(0, y) = (0, y)$  が成り立つ。

仮定 ii) より

よって、 $(x, y) = \alpha_x(0, y - \alpha x)$  であるから、すべての  $(x, y)$  に対し、 $h(x, y) = (x, y)$  が成り立つ。 証明終り。  $\square$

Lemma. 5.  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ,  $h$  は  $T^2$  の座標変換,  $c$  は正の定数  
で次を満たすとする。

$$i) \quad \alpha'_t = h \circ \alpha_t \circ h^{-1}$$

$$ii) \quad h(0,0) = (0,0)$$

このとき,  $h$  は線型変換で, 且つ,  $\alpha' = \frac{k+l\alpha}{m+n\alpha}$

但し,  $k, l, m, n$  は  $h(x,y) = (kx+ly, mx+ny)$  なる整数。

$$(\det \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \pm 1)$$

証明) Lemma. 1, 2 と  $\alpha$  Lemma. 4. より明らか。

次の定理は Lemma. 5 と §. 3. の定理から得られる。

Theorem.  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  は与えられているとする。

このとき,  $P_t$  が  $\alpha_t$  に同型であるための必要十分条件は,  $P_t$  が次の二つの条件を満足することである。

i)  $P_t$  は 1), 2) を満たす, a.p. flow である。

ii)  $P_t$  のある section に対する rotation number を  $\sigma$  とすると,

$$\sigma = \frac{k+l\alpha}{m+n\alpha} \quad ; \quad k, l, m, n \in \mathbb{Z} \quad \det \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \pm 1$$

と書ける。

### §. 5.

次に,  $P_t$  が  $C^r$ -vector field ( $1 \leq r \leq \infty$ ) で生成され, かつ, smooth な invariant measure を持つ場合を考える。

つまり、 $P_t$  は vector field  $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y}$  で生成されていて、  
 $X_1, X_2$  がある正値函数  $M$  に対し

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial y} \equiv 0$$

を満たしていると仮定する。(  $X$  と  $M$  は一円連続微分可能とする。)

この場合、至る所  $X \neq 0$  で  $\int_{T^2} MX_1 dx dy / \int_{T^2} MX_2 dx dy$  が無理数ならば、 $P_t$  は 1), 2) を満たすことが知られている。[1]

$P_t$  の section  $C$  に関する rotation number  $\sigma$  は

$$\sigma = \frac{k + l\sigma_0}{m + n\sigma_0} \quad ; \quad \sigma_0 = \int_{T^2} MX_1 dx dy / \int_{T^2} MX_2 dx dy$$

$$k, l, m, n \in \mathbb{Z}, \det \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \pm 1$$

と表わされることが容易にわかる。(  $k, l, m, n$  は  $C$  のとり方に依存する。くわしく言えば、 $C$  の homotopy class によつて決まる。)

従つて定理は次の様に書ける。

Theorem.  $\frac{\partial(MX_1)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial y} \equiv 0$  ( $M \in C^1, M > 0$ ) を満足する

$C^1$ -vector field  $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y}$  で生成される flow が与えられた  $X_t$  ( $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ) に同型であるための必要十分条件は、 $X$  が次を満たすことである。

i). 至る所  $X \neq 0$

$$ii) \quad \int_{T^2} \mu X_1 dx dy / \int_{T^2} \mu X_2 dx dy = \frac{k+l\alpha}{m+n\alpha}$$

$$; k, l, m, n \in \mathbb{Z}, \det \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \pm 1$$

iii)  $X$  で生成される flow は a. p. flow

最後に、vector field によって生成される flow が a. p. であるための十分条件を与える。

Theorem. vector field  $X$  が次の条件を満たせば、 $X$  によって生成される flow は a. p. flow である。

$$i) \quad X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{は} \quad \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} \equiv 0 \quad \text{を満たす。}$$

$$ii) \quad \sigma = \int_{T^2} X_1 dx dy / \int_{T^2} X_2 dx dy \quad \text{に対し、正の定数 } K, \nu$$

が存在し、任意の整数  $p$  と任意の自然数  $q$  に対し、

$$|\sigma - \frac{p}{q}| \geq K q^{-\nu}$$

を満たす。

$$iii) \quad X \text{ は } C^\mu \text{-vector field である。} T_2 T_1^{-1} L, \mu \geq \nu.$$

証明は省略する。

S. Sternberg [3] によれば、上の定理と同じ条件で、 $X$  によって生成される flow は、 $\alpha_t$  に同型であり、 $(\alpha=\sigma)$ 、且つ、同型写像  $h$  は、~~必ずしも~~ 連続微分可能にとれるとしているが、その証明には疑問があると、思われる。

## — 参考文献 —

- [1] Saito. T, On the measure-preserving flow on the torus,  
Journ. Math. Soc. Jap. 3. No. 2 (1951) 279-284
- [2] ———, On dynamical systems in  $n$ -dimensional torus  
Funk. Ekvac. 7. (1965) 91-102
- [3] Sternberg. S, Celestial Mechanics Part II.  
Benjamin (1969)