

THE LEFSCHETZ HYPERPLANE SECTION THEOREM FOR ETALE HOMOTOPY GROUPS

松浦篤司 (東大数理)
ATSUSHI MATSUURA

1. INTRODUCTION

X を複素射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ の d 次元連結閉部分代数多様体とする. このとき, 古典的な Lefschetz hyperplane section theorem は次のようになる.

Lefschetz の定理. (1) H を $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ generic な超平面とすると, $i < d$ なる i にたいし,

$$H_i(X, X \cap H) = 0.$$

(2) さらに, $i < d$ のとき, $\pi_i(X, X \cap H) = 0$ も成り立つ.

M. Raynaud はエタールコホモロジー群に対して類似の結果を示した ([6, XIV]). これは, エタール位相に関して上の定理の (1) に相当する. 本稿では高次エタールホモトピー群に対して, (2) に対応する結果を述べる.

証明のアイデアは, ホモトピー群の結果をコホモロジー群の結果に帰着することである. すなわち, ある種の Whitehead の定理を示すことである. §2 に於いて, 古典的な Whitehead の定理の拡張を pro-homotopy 圏の場合に示し, その応用として §4 で高次エタールホモトピー群に対する Lefschetz hyperplane section theorem を述べる. 主結果 (Theorem 4.3) は次のようになる:

主定理. k を代数閉体とし, X を $\mathbb{P}_k^n$ の d 次元の非特異で連結な閉部分代数多様体とする. $\mathbb{P}_k^n$ の generic hyperplane H に対し $Y = X \cap H$ と置く. また, $d \geq 3$ とする.

$$\pi_i((Y)_{et}^{\wedge}) \rightarrow \pi_i((X)_{et}^{\wedge})$$

は $i < d-1$ で同型, $i = d-1$ で全射となる.

ここで, $\mathbb{L}$ を素数の集合で k の標数を含まないものとし, $(X)_{et}^{\wedge}$, $(Y)_{et}^{\wedge}$ は X および Y のエタールホモトピー型の pro- $\mathbb{L}$ 完備化とする. $\pi_i((X)_{et}^{\wedge})$, $\pi_i((Y)_{et}^{\wedge})$ はその高次 pro-homotopy 群である. これらの定義は本文で述べる.

2. GENERALIZED WHITEHEAD THEOREM FOR PRO-CW-COMPLEXES

古典的な Whitehead の定理は次のようになる (theorem[10, Ch.7, §5, Thm. 9]) :

定理 2.1 (Whitehead). X, Y を弧状連結な基点付き空間, $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ をその間の写像とする. ある $n \geq 1$ に対し,

$$f_{\#}: \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_q(Y, y_0)$$

が $q < n$ で同型で $q = n$ で全射となるならば,

$$f_*: H_q(X, x_0) \rightarrow H_q(Y, y_0)$$

は $q < n$ で同型, $q = n$ で全射.

X および Y が単連結の場合には逆に, f_* が $q < n$ で同型で $q = n$ で全射ならば $f_{\#}$ も $q < n$ で同型, $q = n$ で全射となる.

$\mathfrak{C}$ を圏とする. $\mathfrak{C}$ に fibre products が存在すれば $\mathfrak{C}$ に値を持つ simplicial objects の圏では n -truncation functor は右随伴関手 (n -coskelton functor) を持つ (Artin-Mazur [1, §1]).

以後, CW-複体のホモトピー圏 $\mathcal{H}$ と simplicial sets のホモトピー圏 $\mathcal{K}$ を同一視する (Bousfield-Kan [2, Ch. VIII]). $X \in \mathcal{H}$ に対し, X の n -coskelton を $\text{cosk}_n(X)$ とかく. $\text{cosk}_n(X)$ のホモトピー群は $\geq n$ 次元以上で消え, $i < n$ のとき

$$\pi_i(\text{cosk}_n(X)) \simeq \pi_i(X)$$

となる. また, X からホモトピー次元が n 以下の CW-複体への射に対し,

$$X \longrightarrow \text{cosk}_n(X)$$

は universal .

$\mathfrak{C}$ の pro-object とは, ある small filtering index category I から $\mathfrak{C}$ への反変関手

$$X: I^{\circ} \rightsquigarrow \mathfrak{C}$$

のことである. これをしばしば $X = \{X_i\}_{i \in I}$ とも書く. $\mathfrak{C}$ の pro-objects のなす圏を $\text{pro-}\mathfrak{C}$ で表わす. $X = \{X_i\}_{i \in I}, Y = \{Y_j\}_{j \in J} \in \text{pro-}\mathfrak{C}$ に対し, $\text{pro-}\mathfrak{C}$ における射を

$$\text{Hom}_{\text{pro-}\mathfrak{C}}(X, Y) := \varprojlim_j \varinjlim_i \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, Y_j)$$

で定義する (詳細は [1, Appendix 2] を参照).

基点付き連結 CW 複体のホモトピー圏を $\mathcal{H}$, $X = \{X_i\}_{i \in I} \in \text{pro-}\mathcal{H}$ を pro-CW 複体とする. このとき, アーベル群 A にたいして X のホモ

トピー群とコホモロジー群を

$$\pi_n(X) := \{\pi_n(X_i)\}_{i \in I} \in \text{pro}-(\text{Groups})$$

$$H^n(X, A) := \varinjlim_i H^n(X_i, A) \in (\text{Groups})$$

で定義する.

$\mathcal{C}$ を群の Serre 類とし, ホモトピー群がすべて $\mathcal{C}$ に含まれる CW 複体からなる $\mathcal{H}$ の部分圏を $\mathcal{CH}$ とすると, 包含関手

$$\text{pro-}\mathcal{C} \hookrightarrow \text{pro}-(\text{Groups})$$

および

$$\text{pro-}\mathcal{CH} \hookrightarrow \text{pro-}\mathcal{H}$$

は左随伴関手

$$\hat{}: \text{pro}-(\text{Groups}) \rightleftarrows \text{pro-}\mathcal{C}$$

および

$$\hat{}: \text{pro-}\mathcal{H} \rightleftarrows \text{pro-}\mathcal{CH}$$

をもつ. これを $\mathcal{C}$ -完備化とよぶ ([1, §3]).

pro-CW 複体 $X = \{X_i\}_{i \in I}$ に対し, X の coskelton を

$$\text{cosk}_n(X) := \{\text{cosk}_n(X_i)\}_{i \in I}$$

とする. 次の定理は Whitehead の定理の pro- ホモトピー圏における拡張である:

定理 2.2. n は 2 以上で, $f: X \rightarrow Y$ を基点付き pro-CW -複体 X, Y の射とする.

(i) $\pi_1(X)^\wedge \simeq \pi_1(Y)^\wedge$ で, 任意の *twisted coefficient module* $M \in \mathcal{C}$ に対して

$$H^q(Y, M) \rightarrow H^q(X, M)$$

が $q < n$ で同型で $q = n$ で単射

と仮定する. このとき

(ii) $\text{cosk}_n(\hat{f}): \text{cosk}_n(\hat{X}) \rightarrow \text{cosk}_n(\hat{Y})$ は同型で

$$\pi_n(\hat{X}) \rightarrow \pi_n(\hat{Y})$$

は全射

となる.

Remark. 実は, (i) と (ii) は同値であるが, ここでは必要ないので証明は略する.

[1, Theorem 4.3] において, M. Artin と B. Mazur は $n = +\infty$ の場合を証明している. 上の定理はその拡張になっている.

Proof. 証明には障害理論を使う.

写像

$$\text{cosk}_n(\hat{f}): \text{cosk}_n(\hat{X}) \rightarrow \text{cosk}_n(\hat{Y})$$

が同型であることは次と同値:

ホモトピー次元 $< n$ の任意の CW-複体 $W \in \mathcal{CH}$ にたいして

$$\begin{aligned} [\text{cosk}_n(\hat{Y}), W] &= [\hat{Y}, W] \\ &= [Y, W] \\ &\xrightarrow{f^*} [X, W] \\ &= [\hat{X}, W] \\ &= [\text{cosk}_n(\hat{X}), W] \end{aligned}$$

は同型. すなわち任意の写像 $\varphi: X \rightarrow W$ にたいし, homotopy-commutative な図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \varphi & \swarrow \psi \\ & W & \end{array}$$

が存在し, ψ ホモトピーをのぞいて一意. 仮定 (i) の $\pi_1(X) \hat{\simeq} \pi_1(Y)$ により, 写像 $\varphi: X \rightarrow W$ は一意に

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(Y) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \pi_1(W) & \end{array}$$

と分解される. 従って

$$\begin{array}{ccc} K(\pi_1(X), 1) & \xrightarrow{\quad} & K(\pi_1(Y), 1) \\ & \searrow & \swarrow \\ & K(\pi_1(W), 1) & \end{array}$$

は可換で f^* は $n = 2$ のとき同型.

一般の n に対しては, f^* の全射性を帰納法で示す. ホモトピー次元 $< n$ の任意の W に対し,

$$[Y, \operatorname{cosk}_{n-1}(W)] \rightarrow [X, \operatorname{cosk}_{n-1}(W)]$$

は全射と仮定する.

仮定により, 任意の射 $\varphi: X \rightarrow W$ に対し, ある添字 i および homotopy commutative な図式

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & \operatorname{cosk}_{n-1}(W) \end{array}$$

が存在する. このとき, ある $i \rightarrow i''$ および持ち上げ $\psi: Y_{i''} \rightarrow W$ で, 図式

$$\begin{array}{ccc} X_{i''} & \xrightarrow{\quad} & Y_{i''} \\ \downarrow & \nearrow \psi & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\quad} & \operatorname{cosk}_{n-1}(W) \end{array}$$

を homotopy-commutative にするものが存在することを示す.

このような ψ の存在に対応する障害類は

$$\alpha_i \in H^n(Y_i, X_i, \pi),$$

である. ここで $\pi := \pi_{q-1}(W)$.

長完全列

$$\cdots \rightarrow H^{n-1}(Y_i, \pi) \rightarrow H^{n-1}(X_i, \pi) \xrightarrow{\delta} H^n(Y_i, X_i, \pi) \xrightarrow{\eta} H^n(Y_i, \pi) \rightarrow \cdots$$

および仮定 (i) より, $i \rightarrow i'$ で

$$\eta \alpha_i = 0 \quad \text{in} \quad H^n(Y_{i'}, X_{i'}, \pi)$$

となるものが存在する. ただし, このとき次の図式

$$\begin{array}{ccc} X_{i'} & \longrightarrow & Y_{i'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \longrightarrow & Y_i \end{array}$$

が実際に可換となるように i' を選ぶ. これは, up to homotopy で可換だけでなく, CW 複体の射として実際に可換であることを意味する. すると,

$$H^n(Y_i, X_i, \pi) \rightarrow H^n(Y_{i'}, X_{i'}, \pi),$$

による α_i の像は $\alpha_{i'}$ になる. よって $\eta\alpha_{i'} = 0$.

また、上と同様のコホモロジー長完全列によって、

$$\chi' \in H^{n-1}(X_{i'}, \pi)$$

で $\delta\chi' = \alpha_{i'}$ となるものをえる. さらに

$$H^{n-1}(Y, \pi) \simeq H^{n-1}(X, \pi)$$

だから、 $H^{n-1}(X_{i''}, \pi)$ における χ' の像 χ'' がある $\varrho'' \in H^{n-1}(Y_{i''}, \pi)$ から来ている様な $i' \rightarrow i''$ が存在する. 図式

$$\begin{array}{ccc} X_{i''} & \longrightarrow & Y_{i''} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{i'} & \longrightarrow & Y_{i'} \end{array}$$

を実際に可換にする i'' を選ぶ. 構成から、障害類 $\alpha_{i'}$ の写像

$$H^n(Y_{i'}, X_{i'}, \pi) \longrightarrow H^n(Y_{i''}, X_{i''}, \pi)$$

による像は 0. 従って、持ち上げ ψ の存在がいえた.

一意性の証明も同様である.

最後に、

$$\pi_n(\hat{X}) \longrightarrow \pi_n(\hat{Y})$$

が全射であることを示す.

補題 2.3. $V \in \text{pro-}\mathcal{H}$ とする. 任意の $k \geq 1$ および任意のアーベル群 $G \in \mathcal{C}$ にたいし、

$$\text{Hom}_{(\text{pro-group})}(\pi_k(\hat{V}), G) \simeq [V, K(G, k)].$$

Proof. $\hat{V} = \{V_i\}$ とおく. 胞体近似定理および coskelton functor の普遍性より、

$$[V_i, K(G, k)] \simeq [K(\pi_k(V_i), k), K(G, k)].$$

一方、普遍係数定理と Hurewicz の定理により

$$\begin{aligned} [K(\pi_k(V_i), k), K(G, k)] &\simeq H^k(K(\pi_k(V_i), k), G) \\ &\simeq \text{Hom}(H_k(K(\pi_k(V_i))), k), G) \\ &\simeq \text{Hom}(\pi_k(V_i), G). \end{aligned}$$

となる. よって、任意の i に対して $\text{Hom}(\pi_k(V_i), G) \simeq [V_i, K(G, k)]$ である. ここで順極限をとって、

$$\varinjlim_i \text{Hom}(\pi_k(V_i), G) \simeq \varinjlim_i [V_i, K(G, k)].$$

さらに, $K(G, k) \in \mathcal{CH}$ だから

$$[V, K(G, k)] \simeq [\hat{V}, K(G, k)].$$

従って補題 2.3. が示された. $\square$

定理の証明にもどる. $G \in \mathcal{C}$ をアーベル群とする. 補題 2.3 によって

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{(\mathrm{pro-group})}(\pi_n(\hat{Y}), G) &\simeq \varinjlim_i [Y_i, K(G, n)] \\ &\simeq \varinjlim_i H^n(Y_i, G) \\ &\hookrightarrow \varinjlim_j H^n(X_j, G) \\ &\simeq \varinjlim_j [X_j, K(G, n)] \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{(\mathrm{pro-group})}(\pi_n(\hat{X}), G), \end{aligned}$$

であるが, これは $\pi_n(\hat{X}) \rightarrow \pi_n(\hat{Y})$ の全射性と同値. $\square$

3. REVIEW OF THE COHOMOLOGICAL LEFSCHETZ HYPERPLANE SECTION THEOREM

X を scheme とし, $\mathcal{F}$ を etale site X_{et} 上のアーベル層とする. 任意の点 $x \in X$ にたいして x 上の geometric point を $\bar{x}$ と書く. $\bar{x}$ における X の strict henselization を $\bar{X}$ とし, $\bar{X}$ 上の $\mathcal{F}$ の inverse image を $\bar{\mathcal{F}}$ とする.

定義 3.1. $\bar{x}$ における etale cohomological depth が n 以上である, すなわち

$$\mathrm{prof}_{\bar{x}}(\mathcal{F}) \geq n,$$

とは $q < n$ のとき常に $\mathcal{H}_{\bar{x}}^q(\bar{\mathcal{F}}) = 0$ となることである. ここで $\mathcal{H}_{\bar{x}}^q(\bar{\mathcal{F}})$ は前層 $(X' \rightarrow \bar{X}) \mapsto H_{X'}^q(X', \mathcal{F}')$ に付随する層である.

このとき, エタールコホモロジー群に対する Lefschetz の定理は次のようになる ([6, XIV, 4.6]):

定理 3.2 (Raynaud). k を体, X/k を proper scheme とする. $U \subset X$ は open subscheme で, $c+1$ 個の affine open subscheme の合併になっているものとする. $Y \subset X$ を closed subscheme で, その underlying space は $X \setminus U$ であるとする. 包含写像を $j: Y \rightarrow X$ とする.

X_{et} 上の $\mathbb{Z}/m$ -加群の constructible sheaf $\mathcal{F}$ および整数 n に対し, 各点 $u \in U$ で

$$\mathrm{prof}_u(\mathcal{F}) \geq n - \dim(\overline{\{u\}})$$

であるとする. このとき

$$H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(Y, j^* \mathcal{F})$$

は $i < n - c - 1$ で同型, $i = n - c - 1$ で単射.

4. HOMOTOPICAL LEFSCHETZ THEOREM

まず, エタールホモトピー型の定義を説明する. ([1], [4]). X を連結で局所 noetherian なスキーム, $\bar{x}$ をその geometric point とする. X_{et} を X 上の (基点付き) エタール site とする.

定義 4.1. *etale hypercovering* $U_{\bullet}$ とは, X_{et} に値を持つ基点付きの simplicial object で, 次の条件をみたすものである:

- (1) 写像 $U_0 \rightarrow X$ はエタール被覆.
- (2) $n \geq 0$ に対し, 標準写像

$$U_{n+1} \rightarrow (\cosk_n(U_{\bullet}))_{n+1}$$

はエタール被覆.

$HR(X)$ で X 上の基点付き etale hypercoverings のなす圏を表わすことにすると, connected component functor Π によって $HR(X)$ を添数集合とする simplicial sets

$$U_{\bullet} \in HR(X) \rightsquigarrow \Pi(U_{\bullet}) \in (s.sets)$$

が得られる. 双対圏 $HR(X)^{\circ}$ は filtering である. (Verdier's Theorem, [7, V, Th. 7.3.2]). こうして, pro-simplicial set

$$\{\Pi(U_{\bullet})\}_{U_{\bullet} \in HR(X)}$$

が定まる. simplicial sets の幾何的实现は CW 複体なので我々は pro-CW 複体 $(X)_{et}$ を得る. これを X の エタールホモトピー型と呼ぶ.

次の定理は J.L. Verdier によって示された. ([7, V, Th. 7.4.1]):

定理 4.2 (Verdier). $\mathcal{F}$ を X_{et} 上のアーベル層とすると, $q \geq 0$ に対して標準的な同型

$$H^q(X_{et}, \mathcal{F}) = \varinjlim_{U_{\bullet} \in HR(X)} H^q(\mathcal{F}(U_{\bullet}))$$

が定まる. ここで, 右辺は cosimplicial group $\mathcal{F}(U_{\bullet})$ のコホモロジー群である.

さらに, X_{et} の任意の局所定数アーベル層 A に対し, 対応する局所系も A で表わすと, 自然な同型

$$H_{et}^q(X, A) \simeq H^q((X)_{et}, A)$$

が存在する.

代数閉体 k 上の射影空間 $\mathbb{P}^n$ に対し, X をその非特異で連結な d 次元閉部分代数多様体とする. $\mathbb{P}^n$ の generic hyperplane H に対し, $Y = X \cap H$ とおく. $\iota: Y \hookrightarrow X$ を包含写像とする. Y も連結な $n-1$ 次元 smooth variety としてよい.

素数の集合 $\mathbb{L}$ で k の標数を含まないものを考える. 位数が $\mathbb{L}$ の元の積になっているものからなる有限群の Serre 類を $\mathcal{C}_{\mathbb{L}}$ とするとき, $\mathcal{C}_{\mathbb{L}}$ -完備化を $\widehat{}$ で表わす.

定理 4.3. 上の仮定において, $\dim(X) = d \geq 3$ とする. このとき, 写像

$$\pi_i((Y)_{et}^{\widehat{}}) \rightarrow \pi_i((X)_{et}^{\widehat{}})$$

は $i < d-1$ で同型, $i = d-1$ で全射.

Proof. 定理を証明するためにまず次を示す.

命題 4.4. 定理 4.3 が成り立つには

$$H_{et}^i(Y, M) \longrightarrow H_{et}^i(X, M)$$

が $i < d-1$ で同型で, $i = d-1$ で単射になることが必要十分である.

Proof of Proposition 4.4. Y が正規で次元が 2 以上のとき, Grauert's theorem の etale analogue により, 基本群の写像

$$\pi_1((Y)_{et}) \rightarrow \pi_1((X)_{et})$$

は同型. ([6, XII Cor.3.5]). さらに, 任意の pro-CW 複体に対し, $\mathcal{C}$ -完備化をとる操作と基本群をとる操作は可換. (Artin-Mazur [1, Cor. 3.7]). したがって, 定理 2.2 より

$$\iota_*: \pi_i((Y)_{et}^{\widehat{}}) \longrightarrow \pi_i((X)_{et}^{\widehat{}})$$

が $i < d-1$ (resp. $i = d-1$) に対して同型 (resp. 全射) となるのは, 任意の twisted module $M \in \mathcal{C}_{\mathbb{L}}$ に対して

$$H^i((Y)_{et}, M) \longrightarrow H^i((X)_{et}, M)$$

が $i < d-1$ (resp. $i = d-1$) に対して同型 (resp. 単射) となることと同値.

ここで,

$$H^i((X)_{et}, M) \simeq H_{et}^i(X, M)$$

および

$$H^i((Y)_{et}, M) \simeq H_{et}^i(Y, M)$$

が成り立つのでこれは次と同値となる: 写像

$$H_{et}^i(Y, M) \longrightarrow H_{et}^i(X, M)$$

は $i < d-1$ で同型, $i = d-1$ で単射. □

我々の場合, $U = X \setminus Y$ は smooth であり, $\mathcal{F}$ の torsion は k の標数と互いに素である. 従って smooth purity theorem ([7, XVI Th. 3.7]) から, $i < 2\text{codim } \bar{u}$ の時

$$\mathcal{H}_{\bar{u}}^i(\bar{\mathcal{F}}) = 0$$

となる. よって,

$$\text{prof}_u(\mathcal{F}) \geq d - \dim\{\bar{u}\}.$$

U は affine なので, 定理 3.2 により

$$H_{et}^i(Y, M) \longrightarrow H_{et}^i(X, M)$$

$i < d - 1$ で同型, $i = d - 1$ で単射. □

上の定理からすぐ次のことがわかる.

系 4.5. $n \geq 2$ とする. 次数 d の generic hypersurface $X \subset \mathbb{P}^n$ of に対し,

$$\pi_i((X)_{et}^\wedge) \longrightarrow \pi_i((\mathbb{P}^n)_{et}^\wedge)$$

は $i < n - 1$ で同型, $i = n - 1$ で全射.

Acknowledgment. The author would like to thank his thesis advisor Professor Takayuki Oda, for suggesting the problem and for valuable discussions.

REFERENCES

- [1] M. Artin and B. Mazur: *Etale Homotopy*, L. N. M. 100, Springer-Verlag, Berlin and New York (1969).
- [2] A.K. Bousfield and D.M. Kan: *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, L. N. M. 304, Springer-Verlag, Berlin and New York (1972).
- [3] E. Freitag and R. Kiehl: *Etale Cohomology and The Weil Conjecture*, Springer-Verlag, Berlin and New York (1988).
- [4] E.M. Friedlander: *Etale Homotopy of Simplicial Schemes*, Princeton Univ. Press (1982).
- [5] M. Goresky and R. MacPherson: *Stratified Morse Theory*, Springer-Verlag, Berlin and New York (1980).
- [6] A. Grothendieck: *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, North-Holland Publishing Company (1962).
- [7] A. Grothendieck (with M. Artin and J.L. Verdier): *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, L. N. M. 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin and New York (1972-73).
- [8] J.S. Milne: *Étale Cohomology*, Princeton Univ. Press (1980).
- [9] J. Milnor: *Morse Theory*, Princeton Univ. Press (1969).
- [10] E.H. Spanier: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill (1966).

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES
UNIVERSITY OF TOKYO
JAPAN

E-mail address: matsuura@ms.u-tokyo.ac.jp