

3次元多様体の基本群の表現

筑波大数学 高橋元男

Genus 2 の Poincaré 予想が Thurston その他の人々により肯定的に解決されたので、次の予想を考える:

予想 1. (Haken) M を, closed orientable, connected 3-manifold とする時, $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_n$ ならば, M は lens space である. ($n=1$ の場合が Poincaré 予想)

以下, M は closed orientable connected 3-manifold とする. 予想 1 を拡張して次の予想が考えられる.

予想 2. $\pi_1(M)$ がアーベル群ならば, M は lens space か又は $S^1 \times S^1 \times S^1$ である.

予想 3. $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ならば, M は $S^1 \times S^1 \times S^1$ である.

予想 4. M が genus 2 の Heegaard splitting を持ち, $\pi_1(M)$ がアーベル群ならば, M は lens space である. 即ち, M が Heegaard genus 2 ならば, $\pi_1(M)$ は非アーベル群である.

予想 1, 予想 4 を lens space conjecture と呼ぶことにする.

今、仮に予想1が正しくないとし、 M をその反例とする：
 即ち、 M は lens space でなく、 $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_n$. 更に $n \neq 0$
 と仮定する. M の universal covering space を $\hat{M}$ とす
 れば、 $\mathbb{Z}_n$ は有限だから $\hat{M}$ は closed, simply connected
 3-manifold である. 次の二つの場合が考えられる:

Case 1. $\hat{M}$ は S^3 と homeo. である. この時 $\hat{M}$ は
 Poincaré 予想の反例である.

Case 2. $\hat{M}$ は S^3 と homeo. この時は S^3 の $\mathbb{Z}_n$ による
 free action で orbit space が lens space であるものが
 存在することになる. (即ち free action についての
 Smith conjecture の反例)

いいかえると、Case 2 が起るるとすれば 予想1 ($n \neq 0$)
 は Poincaré 予想と同値である.

Lens space conjecture を解くため、 $\pi_1(M)$ の表現を考
 えることにする. 先ず、次の4つの群を定義する:

$$PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C}) / \{\lambda E\}$$

$$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm E\}$$

M = Möbius 変換 $w = (az+b)/(cz+d)$,
 ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$) の全体のなす群

$$I^+(H^3) = \text{hyperbolic 3-space } H^3 \text{ の orientation-}$$

preserving isometries の全体のなす群.

これらの4つの群は同型であることが知られている:

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \cong M \cong I^+(H^3).$$

以下, 表現といえば, $\pi_1(M)$ から $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ への表現と意味するものとする.

2つの表現 $h, h' : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ が同値であるというのは, $\exists A \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \forall x \in \pi_1(M)$

$$h'(x) = A h(x) A',$$

となることを意味する.

M が closed の時, 表現の同値類は有限の事が多い. (例外: lens spaces の connected sum, sufficiently large manifold のある種のもの^等)

予想5. M が irreducible, not sufficiently large ならば, 表現の同値類は有限個である.

$\delta(M) = \pi_1(M)$ の表現の同値類の個数

とおけば $\delta(M)$ は M の invariant になる.

予想6. M が S^3 と homeo. でないならば, $\pi_1(M)$ の non-trivial な表現が存在する.

(この予想はもちろん Poincaré 予想を imply する.)

Def. 表現が abelian, cyclic, trivial 等というのは, その $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ への像が そうである時とする.

予想7. M が irreducible, not sufficiently large,
 と lens space でなければ, $\pi_1(M)$ は non-abelian な
 表現を持つ.

(この予想は lens space conjecture を imply する.)

例. 次の様を closed 3-manifold M が存在する:

$$\pi_1(M) \cong \langle a, b \mid a^3 b^2 a^3 b^{-1} = b^3 a^2 b^3 a^{-1} = 1 \rangle$$

M は irreducible, sufficiently large

$\pi_1(M)$ は 非アーベル群であるが、表現はすべてアーベル
 的である.

以下、具体例について表現を計算する.

Lemma.
$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$$

とおく. また x, y の多項式 $\rho_n = \rho_n(x, y)$ を次の様に
 帰納的に定義する:

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_{n+2} = x \rho_{n+1} + y \rho_n$$

$$\text{今 } x = p + s, \quad y = qr - ps \text{ とおけば}$$

$$p_n = p \rho_n + q \rho_{n-1}, \quad q_n = q \rho_n,$$

$$r_n = r \rho_n, \quad s_n = s \rho_n + y \rho_{n-1},$$

である.

証明. n についての帰納法.

$$\rho_2 = x, \rho_3 = x^2 + y, \rho_4 = x^3 + 2xy, \rho_5 = x^4 + 3x^2y + y^2, \dots$$

さて、次の様な基本群の表示を持つ 3-manifold について考える：
 $\pi_1(M_{m,n}) \cong$

$$\langle a, b \mid a^3 b^{-1} a b^3 a b^{-1} = (b^{-3} a^2 b^{-1})^m (a b^2)^n = 1 \rangle,$$

ここに、 m, n は互いに素な整数である。この manifold は、一方の relator の長さが 10 で、 $[\mid]$ において考察されたものである。

$\pi_1(M_{m,n})$ の表現を求めるため、generator a, b に対し

$$(*) \quad a \mapsto \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

という行列を対応させる。我々は $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ で考えているので

$$a^{-1} \mapsto \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}, \quad b^{-1} \mapsto \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

が対応していると考えよう。これにより a, b の ^{任意の} word に対し行列が対応することになる。

(*) が $\pi_1(M_{m,n})$ の表現を与えるためには relators に対応する行列が $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ の単位元、即ちスカラー行列 λE となればよい。

まず、relator $a^3 b^{-1} a b^3 a b^{-1} = 1$ について、計算する。

$$a^3 b^{-1} a b^3 a b^{-1} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} p_3 & q_3 \\ r_3 & s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} p_3 p^2 \lambda^3 \mu^2 + q_3 p r \lambda^4 \mu + p_3 q r \mu^5 + q_3 r s \lambda \mu^4, \\ p_3 p q \lambda^4 \mu + q_3 q r \lambda^5 + p_3 q s \lambda \mu^4 + q_3 s^2 \lambda^2 \mu^3 \\ r_3 p^2 \lambda^3 \mu^2 + s_3 p r \lambda^4 \mu + r_3 q r \mu^5 + s_3 r s \lambda \mu^4, \\ r_3 p q \lambda^4 \mu + s_3 q r \lambda^5 + r_3 q s \lambda \mu^4 + s_3 s^2 \lambda^2 \mu^3 \end{array} \right)$$

であるから, $q_3 = q p_3$, $r_3 = r p_3$ に注意すれば, $\begin{matrix} (q \neq 0 & r \neq 0 & \text{と} & 12) \\ \text{条件は} \end{matrix}$

$$F_1 = p_3 q r \lambda^4 + p_3 p \lambda^3 \mu + p_3 s^2 \lambda \mu^3 + p_3 s \mu^4 = 0 \quad (1)$$

$$F_2 = s_3 p \lambda^4 + p_3 p^2 \lambda^3 \mu + s_3 s \lambda \mu^3 + p_3 q r \mu^4 = 0 \quad (2)$$

$$F_3 = s_3 q r \lambda^5 - p_3 p^2 \lambda^3 \mu^2 + s_3 s^2 \lambda^2 \mu^3 - p_3 q r \mu^5 = 0 \quad (3)$$

の三つとなる。しかし

$$p_3 F_3 = s_3 \lambda F_1 - p_3 \mu F_2$$

なので, $p_3 \neq 0$ のもとでは (1) と (2) から (3) が出る。

$$\text{さて, } q r = y + p s, \quad p_3 = x^2 + y, \quad p_3 = p x^2 + (p+x) y$$

を (1) に代入して計算すると

$$y^2 \lambda^4 + y \{ (x^2 + p s) \lambda^4 + p(p+x) \lambda^3 \mu + s^2 \lambda \mu^3 + s(p+x) \mu^4 \} \\ + \{ p s x^2 \lambda^4 + p^2 x^2 \lambda^3 \mu + s^2 x^2 \lambda \mu^3 + p s x^2 \mu^4 \} = 0 \quad (4)$$

を得る。同様に (2) を計算すると

$$y^2 \lambda^4 + y \{ p(s+x) \lambda^4 + p^2 \lambda^3 \mu + s(s+x) \lambda \mu^3 + (x^2 + p s) \mu^4 \} \\ + \{ p s x^2 \lambda^4 + p^2 x^2 \lambda^3 \mu + s^2 x^2 \lambda \mu^3 + p s x^2 \mu^4 \} = 0 \quad (5)$$

を得る. (4) - (5) を計算すると

$$y(\lambda^4 - \mu^4) + x(\lambda + p\mu)(\lambda^3 - \mu^3) = 0$$

を得る. $\lambda^4 \neq \mu^4$ と仮定すれば

$$y = - \frac{(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2)(\lambda + p\mu)}{(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2)} x \quad (6)$$

となる. 次に, 計算を簡略化するために relator $a^3 b^{-1} a b^3 a b^{-1} = 0$ を $b^3 a b^{-1} a^3 b^{-1} a = 0$ と変形して計算する.

$$b^3 a b^{-1} a^3 b^{-1} a \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 & q_3 \\ r_3 & s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 p^2 \mu^2 + r_3 p q \lambda \mu + q_3 p r \lambda \mu + s_3 q r \lambda^2, & p_3 p q \mu^2 + r_3 q^2 \lambda \mu + q_3 p s \lambda \mu + s_3 q s \lambda^2 \\ p_3 p r \mu^2 + r_3 p s \lambda \mu + q_3 r^2 \lambda \mu + s_3 r s \lambda^2 & p_3 q r \mu^2 + r_3 q s \lambda \mu + q_3 r s \lambda \mu + s_3 s^2 \lambda^2 \end{pmatrix}$$

より,

$$p_3 p \mu^2 + p_3 (p s + q r) \lambda \mu + s_3 s \lambda^2 = 0$$

即ち,

$$\begin{aligned} y^2 \lambda \mu + y \{ p(p+x) \mu^2 + (x^2 + 2ps) \lambda \mu + s(s+x) \lambda^2 \} \\ + p^2 x^2 \mu^2 + 2ps x^2 \lambda \mu + s^2 x^2 \lambda^2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

を得る.

(7) に (6) を代入して, 計算して簡単にすると

$$p\mu(\lambda^5+2\lambda^4\mu+2\lambda^3\mu^2+3\lambda^2\mu^3+2\lambda\mu^4+\mu^5) \\ + \delta\lambda(\lambda^5+2\lambda^4\mu+3\lambda^3\mu^2+2\lambda^2\mu^3+2\lambda\mu^4+\mu^5)=0$$

を得る. p, q, r, δ は斉次なので

$$p = \lambda(\lambda^5+2\lambda^4\mu+3\lambda^3\mu^2+2\lambda^2\mu^3+2\lambda\mu^4+\mu^5) \quad (8)$$

$$\delta = -\mu(\lambda^5+2\lambda^4\mu+2\lambda^3\mu^2+3\lambda^2\mu^3+2\lambda\mu^4+\mu^5) \quad (9)$$

と考えてよい. これと (6) より

$$y = -\lambda^3\mu^3(\lambda^3-\mu^3)^2 \quad (10)$$

を得る. 逆に (8), (9), (10) をみたす様に $\lambda, \mu, p, q, r, \delta$ を定めれば (但し $p\delta - qr \neq 0, \lambda\mu \neq 0$), relator $a^3b^{-1}a^2b^{-1}a^3b^{-1}=1$ がみたされる.

次に, $\mathcal{A}$ の relator $(b^{-3}a^2b^{-1})^m(a^2b^2)^n=1$ について考える. 先ず $\mathcal{A}$ の relator のもとで $b^{-3}a^2b^{-1}$ と a^2b^2 は可換なことに注意する.

$$a^2b^2 \mapsto \begin{pmatrix} p & q \\ r & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\lambda^2 & q\mu^2 \\ r\lambda^2 & \delta\mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

とおく. これの固有値を $\kappa\xi, \kappa\eta$ とすると (但し $\kappa \neq 0, \xi \neq \eta$)

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2\xi\eta &= -\lambda^2\mu^2y = \lambda^5\mu^5(\lambda^3-\mu^3)^2 \\ \kappa(\xi+\eta) &= \lambda^2p + \mu^2\delta = (\lambda^2-\mu^2)(1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1) \end{aligned} \right\} (11)$$

となる. ただし $(1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1)$ は

$$\lambda^6 + 2\lambda^5\mu + 4\lambda^4\mu^2 + 3\lambda^3\mu^3 + 4\lambda^2\mu^4 + 2\lambda\mu^5 + \mu^6$$

の略である.

(11)から K を消去すると, 齊次方程式

$$\xi \eta (\lambda + \mu)^2 (1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1)^2 = (\xi + \eta)^2 \lambda^5 \mu^5 (1 \ 1 \ 1)^2, \quad (12)$$

を得る. 次に,

$$\begin{aligned} \ell^{-3} a^2 \ell^{-1} &\mapsto \begin{pmatrix} \mu^3 & 0 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu^4 p_2 & \lambda \mu^3 q_2 \\ \lambda^3 \mu r_2 & \lambda^4 s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく. また

$$D = \begin{pmatrix} K\eta - \alpha & -\beta \\ -K\xi + \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

とおくと

$$D \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} D^{-1} \sim \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$$

となる. ($\sim$ は $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ で等しいという意味.)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \text{ は可換であるから}$$

$$D \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} D^{-1}$$

も対角行列になるはずである. これを計算すると

$$\begin{pmatrix} A\xi - B\eta & 0 \\ 0 & B\xi - A\eta \end{pmatrix}$$

をなし,

$$A = \alpha\alpha' + \beta\gamma' + \gamma\beta' + \delta\delta'$$

$$B = \alpha\delta' - \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha'$$

である。したがって

$$ae^2 \mapsto D^{-1} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} D$$

$$e^{-3}a^2e^{-1} \mapsto D^{-1} \begin{pmatrix} A\xi - B\eta & 0 \\ 0 & B\xi - A\eta \end{pmatrix} D$$

となるので, $\star$ の relator $(e^{-3}a^2e^{-1})^m (ae^2)^n = 1$ がみえ
られる条件は

$$\begin{pmatrix} (A\xi - B\eta)^m & 0 \\ 0 & (B\xi - A\eta)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^m & 0 \\ 0 & \eta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A\xi - B\eta)^m \xi^n & 0 \\ 0 & (B\xi - A\eta)^n \eta^n \end{pmatrix} = 1$$

即ち

$$(A\xi - B\eta)^m \xi^n = (B\xi - A\eta)^n \eta^n \quad (13)$$

となる。ここで A, B を計算すると (関数表は省略して)

$$A = \lambda^5 \mu^5 (1, 2, 4, 5, 4, 2, 1)$$

$$B = (1, 6, 22, 56, 113, 185, 261, 316, 339, 316, 261, 185, 113, 56, 22, 6, 1)$$

$$= (1, 1, 1)^2 (1, 4, 11, 20, 31, 37, 43, 37, 31, 20, 11, 4, 1)$$

となる。(12), (13) の解で

$$\lambda\mu \neq 0, \lambda \neq \mu, \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 \neq 0, \xi\eta \neq 0, \xi \neq \eta, \xi \neq -\eta$$

をみたすものが, 求める表現を与える。

(12) の次数は $(2, 14)$ (つまり ξ, η に関して 2 次, λ, μ に関して 14 次の意味), (13) の次数は $(|m|+n, 16|m|)$ である. (但し $n \geq 0$ とする.)

従って (12), (13) は $CP^1 \times CP^1$ において, 重複度を含めて,

$$2 \cdot 16|m| + 14(|m|+n) = 46|m| + 14n \quad (14)$$

個の交点を有する. (Bezout の定理, [2] 参照)

上にも述べた様に, この中で

$\lambda\mu=0, \lambda=\mu, \lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=0, \xi\eta=0, \xi=\eta, \xi=-\eta$
のどれかが成り立つ時のみ, 表現を与えたい. (12) を考慮すると

(i) $\lambda\mu=0, \xi\eta=0$

(ii) ~~$\lambda\mu=0$~~ , $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=0, \xi\eta=0$

(iii) $(\lambda+\mu)(1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1)=0, \xi+\eta=0$

(iv) $\xi=\eta, \dots$ (長くなるので省略)

のどれかの時である. これらの点における交点数 (重複度) を求めると

(i) の 4 点の各々で, $\min(5n, 8m)$ ($(m,n) \neq (5,8)$ の時),

0, ($m < 0$ の時), 41 , ($(m,n) = (5,8)$ の時),

となる.

(ii) の 4 点の各々で $\min(2n, -2m)$ ($m < 0, (m,n) \neq (-1,1)$ の時),

0, ($m \geq 0$), 12 , ($(m,n) = (-1,1)$ の時), となる

(iii) の各点での交点数の合計は $12|m|$,

(iv) の各点での交点数の合計は

$$\begin{cases} 14m+14, & n \text{ が奇数} \\ 14m+16, & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

となる. 以上を (14) から引くと (それを D とすると)

$8m > 5n$ の時

$$D = 20m - 6n - \begin{matrix} 14 & (n \text{ 奇}) \\ 16 & (n \text{ 偶}) \end{matrix}$$

$5n > 8m > 0$ の時

$$D = -12m + 14n - \begin{matrix} 14 \\ 16 \end{matrix}$$

$0 > 2m > -2n$ の時

$$D = -12m + 14n - \begin{matrix} 14 \\ 16 \end{matrix}$$

$0 > -2n > 2m$ の時

$$D = -20m + 6n - \begin{matrix} 14 \\ 16 \end{matrix}$$

$(m, n) = (5, 8)$ の時 $D = 32$

$(m, n) = (-1, 1)$ の時 $D = 8$

となる.

しかし $n = \text{偶数}$ の時には上の解以外に $a^2=1, c^2=1, (ac)^2=1$ から得られる表現が存在する. これを 2 と数えれば上の式 $\text{\textcircled{2}}$ に加えて, $\sqrt[n]{\text{\textcircled{2}}}$ の偶奇の区別する必要がなくなる. (何故 2 と数えるかについては II で述べる.) この様にしな結果を D^* とすれば

$$D^* = \begin{cases} 2|5n-8m| + 4|m+n| - 14, & (m,n) \neq (5,8), (-1,1) \\ " & " & -18=32, & (m,n) = (5,8) \\ " & " & -18=8 & (m,n) = (-1,1) \end{cases}$$

となる. (なお $(m, n) = (0, 1), (1, 0)$ の場合も区別して計算しなければならぬが, 丁度上の結果と一致する.)

次に, D^* がどのような値を取るかを調べる. 上の

D^* の式において m, n を任意の実数とすれば $(m, n) = (5, 8)$

と $m:n = -1, 1$ の所を除いて piecewise linear な関数になる. $D^* = 0$ とする (m, n) は丁度平行四辺形上にあり, その内部で $D^* < 0$, 外部で $D^* > 0$ とする. (図1参照)

図1から、わかるように、この平行四辺形は原点以外の格子点を内部に含まず周上に $(m, n) = (0, 1), (0, -1), (1, 1), (-1, -1)$ がある。つまり $(0, 1), (1, 1)$ の時のみ D^* は 0 となりその他の (m, n) ($m, n \in \mathbb{Z}$ ($m, n) \neq 1, n \geq 0$) においては $D^* > 0$ となり、従って non-abelian な表現が存在する。従って $(0, 1), (1, 1)$ 以外の manifold は lens space ではない。($\pi_1(M)$ は non-abelian である。)

$(m, n) = (1, 1)$ の時, $type(13, 3)$ の lens space

$(m, n) = (0, 1)$ のとき type $(9, 2)$ の lens space

であることは Heegaard 分解を調べることによりわかる。

故にこの標を manifold においては予想1, 予想4は

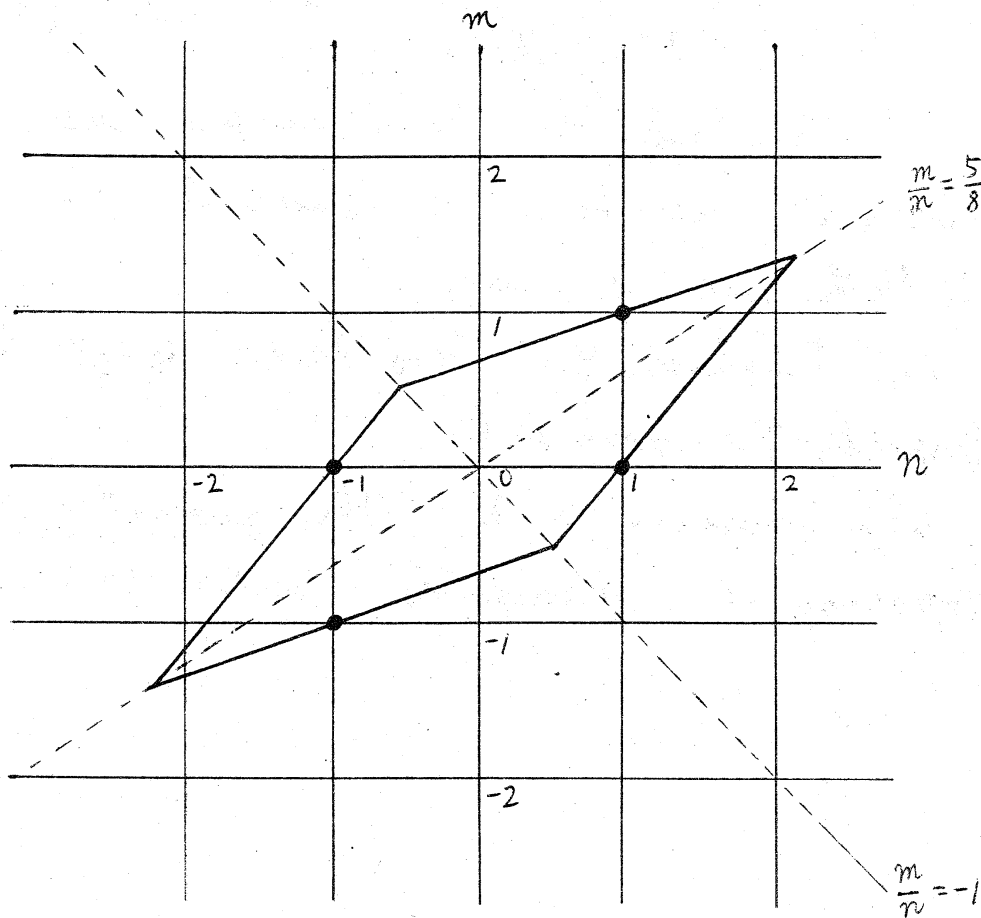


図 1.

成り立っている。

なお、 $(m, n) = (5, 8), (-1, 1)$ の場合 manifold は sufficiently large となる。もちろん $H_1(M)$ が無限になる $(m, n) = (9, 22)$ の場合も sufficiently large となる。これ以外の場合 sufficiently large とはならないことが Haken-Thurston の方法で証明出来る。

参考文献

[1] Takahashi M. Some simple cases of Poincaré conjecture, to appear in Journal of Math. Soc. of Japan

[2] Takahashi M. Two bridge knot have Property P. preprint.

[3] Thurston W. P. The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Note.