

グラフによる 2 次体の類群の 2 巾階数評価

河野美文*) 北村三郎**) 中原 徹***)

*)(Kohno, Yosifumi) **)(Kitamura, Saburo) ***)(Nakahara, Toru)

*)佐賀大学工学系研究科 **)東和大学工学部 ***)佐賀大学理工学部

§ 1 Introduction

2 次体の Ideal 類群の構造については、特にその 2-part について、Gauss による種の理論、及び Rédei-Reichardt の理論がよく知られている。この報告書では Rédei-Reichardt の定理のグラフ版（これは、Lagarias[L] による）を紹介し、特に Ideal 類群の 4-rank についてのグラフ上の Zeta 関数を用いた判定を与える。又、大島の修論 [O] の結果を踏まえて、いくつかの簡単なグラフについて、その 4-rank の計算例を与える。更に今後の希望的見通しを Morton の論文 [M2] の紹介と共に述べる。

§ 2 Results

$G(D)$ を 2 次体 $Q(\sqrt{D})$ に付随するグラフとし、 $\kappa(X)$ をグラフ X のコンプレクシティ [§ 6 参照] とすると、以下のことが成り立つ。

Fact 1 完全グラフ $K(n)$ (*valency* $n-1$ の正則グラフの一つ) に対し

$$G(D) = K(q+2) \quad (q \geq 1)$$

となる判別式 D をとると、

$$\kappa(K(q+2)) = (q+2)^q$$

が成り立ち $Q(\sqrt{D})$ に於いて

$$\begin{cases} q \equiv 0 \pmod{2} \implies e_2 \geq 1 \\ q \equiv 1 \pmod{2} \implies e_2 = 0. \end{cases}$$

ただし、種の理論により $e_1 = q + 1$ である。

Remark 1 この事実は Oshima[O] の結果によってもきっちり示されている。

Fact 2 完全 2 部グラフ $K(k_1, k_2)$ (*valency* (k_1, k_2) の半正則グラフの一つ) に対し

$$G(D) = K(q_1 + 1, q_2 + 1) \quad (q_1, q_2 \geq 1)$$

となる判別式 D をとると、

$$\kappa(K(q_1 + 1, q_2 + 1)) = (q_1 + 1)^{q_2} (q_2 + 1)^{q_1}$$

が成り立ち

$$\begin{cases} q_1 \equiv 0 \pmod{2} \text{ 及び } q_2 \equiv 0 \pmod{2} \implies e_2 = 0 \\ q_1 \equiv 1 \pmod{2} \text{ 又は } q_2 \equiv 1 \pmod{2} \implies e_2 \geq 1. \end{cases}$$

ただし、種の理論により $e_1 = q_1 + q_2 + 1$ である。

Fact 3 連結正則グラフ X に対し $G(D) = X$ となる判別式 D をとると

$$\kappa(X) = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_j + q)$$

が成り立つ。ここに λ_j はグラフ X の固有値、 $n = \#V$, *valency* は $q + 1$, 特に X が 2 部グラフであるときは、 $\lambda_{n-1} = -(q + 1)$ となり

$$\kappa(X) = \frac{2(q + 1)}{n} \prod_{j=1}^{n-2} (1 + q - \lambda_j)$$

が成り立つ。よって $Q(\sqrt{D})$ に於いて

$$\begin{cases} \kappa(X) \equiv 0 \pmod{2} \iff e_2 \geq 1 \\ \kappa(X) \equiv 1 \pmod{2} \iff e_2 = 0 (X : \text{連結正則}). \end{cases}$$

$$\frac{qn}{2} \equiv 1 \pmod{2} \implies e_2 \geq 1. (X: \text{連結正則 2 部}).$$

ただし種の理論により $e_1 = n - 1$.

Fact 4 連結半正則 2 部グラフ X , *valency* : $(q_1 + 1, q_2 + 1)$ に対し $G(D) = X$ となる判別式 D をとると

$$\kappa(X) = \frac{(1 + q_2)^{n_2 - n_1 + 1}}{n_1} \prod_{j=1}^{n_1 - 1} \{(1 + q_1)(1 + q_2) - \lambda_j^2\}$$

が成り立つ. ここで, λ_j はグラフ X の固有値, $n_i = \#V_i$ ($i = 1, 2$),
よって $Q(\sqrt{D})$ に於いて

$$\begin{cases} \kappa(X) \equiv 0 \pmod{2} \iff e_2 \geq 1 \\ \kappa(X) \equiv 1 \pmod{2} \iff e_2 = 0. \end{cases}$$

ただし種の理論により $e_1 = n_1 + n_2 - 1$.

§ 3 Morton の 結果

有限 Abel 群 H の 2-Sylow subgroup H_2 について、Morton の論文 “*On Rédei's theory of the Pell equation*” [M1] に基づいて述べる。

Proposition 1

$$M = (\chi_j(\mathcal{A}_i)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq e_1).$$

ここで、

$$\begin{cases} m \geq e_1, \\ \chi_j : H \text{ の 2 次指標 のなす群 } X \text{ の基底 } (j = 1, \dots, e_1), \\ e_1 : H_2 \text{ の直積因子の個数}, \\ \mathcal{A}_i : H_2 \text{ の元 } (i = 1, \dots, m). \end{cases}$$

とする。このとき

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & + \\ \hline + & + \end{array} \right)$$

とできる。ここで D_1 は $r_1 \times r_1$ 正方行列（無いときもある）で、対角成分は -1 ，その他の成分が $+1$ とする。

Definition 1 M_1 は “*reduced*” と呼ばれる。

Definition 2 行列 M の *derived sequence* M_n を次のように決める；

- (1) M_1 は M を *reduced* したもの
- (2) それぞれの M_{n+1} は M_n から *derived* された行列。

Definition 3 行列 D_n を $m \times e_1$ 行列 M_n の正方部分行列として次のように定義する；

$$M_n = \left(\begin{array}{c|c} D_n & + \\ \hline + & + \end{array} \right)$$

D_n の次数を r_n とする。

これから考える行列

$$M = (\chi_j(A_i)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq e_1)$$

として 特に

$$\{A_1, \dots, A_m\}$$

が、 $A_1 (\subset H)$ が位数 2 の元全体、の生成元の集合となるときを扱う。

Theorem 1 (Morton [M1]) 行列 M の *derived matrices* $\{M_n\}$ に対して、数 e_{n+1} が、次のようにして与えられる。

$$e_{n+1} = e_1 - r_n \quad (n \geq 1).$$

ただし、 e_n は H_2 の直積因子の中で、その位数が 2^n で割れるものの個数、 r_n は、Definition 3 で定義された行列 D_n の次数を表す。特に、 H_2 の直積因子の最大位数を 2^v とすると（そのとき $e_{v+1} = e_{v+2} = \dots = 0$ ）。

D_v は、sequence $\{D_n\}$ の中で、 e_1 列をもつ最初の行列となる。

さらに、 D_v の行を生成する要素は、 H_2 の基底となる。

§ 4 Rédei-Reichardt の理論

グラフとのつながりを述べる前に、Rédei らによってなされた 2 次体の Ideal 類群の 2-part についての仕事をまとめる. Rédei は、一連の論文で、2 次体の Ideal 類群の 2-part の最初の 3 つの rank について、理論的に記述した. Reichardt による 2 次体 $Q(\sqrt{D})$ の狭義 Ideal 類群 C の 2^n -rank (e_n とかく) の特徴づけから出発して、Rédei は、 D の因子分解と 2 進乗法的記号

$\{a_1, a_2, a_3\}$ を用いて、 e_2, e_3 を特徴づけた. 更に、Rédei は、この記号を用いて、任意に与えられた e_1, e_2, e_3 に対して、無限個の実 2 次体が存在することを、示した. Morton は、1982 年の論文 [M2] で、Rédei の理論を虚 2 次体の場合について拡張している.

Definition 4 D -分解 $\{D_1, D_2\}$

$$D = D_1 \cdot D_2 = D_2 \cdot D_1$$

ここで、 D は 2 次体 $Q(\sqrt{D})$ の判別式, D_i は判別式 ($i=1,2$) 又、1 も判別式と見なし、

$$\{1, D\} : \text{自明な } D\text{-分解}$$

とする。

Definition 5 第 2 種 D -分解 $\{D_1, D_2\}$ は、次の条件をみたすものとする;

$$\begin{cases} \left(\frac{D_1}{p_i}\right) = 1, & \forall p_i | D_2 \\ \left(\frac{D_2}{p_i}\right) = 1, & \forall p_i | D_1. \end{cases}$$

ここで $\left(\frac{\cdot}{p_i}\right)$ は、Kronecker 記号を表す.

自明な D -分解は、第 2 種となる。

Theorem 2 (Gauss, Rédei-Reichardt) Gauss の種の理論により、

$$\#\{D\text{-分解}\} = 2^{e_1}.$$

Rédei-Reichardt の定理より

$$\sharp\{\text{第 2 種 } D\text{-分解}\} = 2^{e_2}.$$

ここで、 e_i は 2^i -rank を表す.

§ 5 Rédei-Reichardt 理論のグラフ化

2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ の判別式 D に対して随伴グラフ $G(D)$ が構成される. それは, Rédei-Reichardt の定理の Rédei による初等的証明に基づくものである.

Definition 6 $D = p_1^* \cdots p_N^*$, p_i^* は素判別式すなわち,

$$p_j^* = \begin{cases} (-1)^{\frac{p_j-1}{2}} p_j & , \quad (p_j : \text{奇素数}) \\ -4, -8 \text{ 又は } 8, & (p_j = 2) \end{cases}$$

に対し行列 $A_D = (a_{ij})$ を次の条件で定める:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \left(\frac{p_i^*}{p_j}\right) = -1 \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

Proposition 2 2 次体 $k = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ の判別式 D に対して,

$G(D)$ が対応 $\iff A_D$: グラフの頂点随伴行列 i.e. A は対称行列.

Proposition 3 D がちょうど 1 つの素判別式からなるとき,
 A_D は対称行列 (1×1) .

Lemma 1 (Lagarias[L], Oshima[O]) 判別式 D が少なくとも 2 つの異なる素判別式を因子としてもつとき, その随伴行列 A_D が対称行列となるのは次の場合に限る.

- (1) $D = \Pi p, D = -q \Pi p, \quad p \equiv 1, q \equiv 3 \pmod{4}$
- (2) $D = -4 \Pi p, D = (-4)(-q) \Pi p, \quad p \equiv 1 \pmod{4}, q \equiv 3 \pmod{8}$
- (3) $D = \pm 8 \Pi p, D = 8(-q) \Pi p, \quad p \equiv 1, q \equiv 3 \pmod{4}$

Proposition 4 任意の N 頂点の単純グラフは, ある判別式 D に対してその随伴グラフ $G(D)$ として得られる.

Definition 7 D -分解 $\{D_1, D_2\}$ は, $G(D)$ の頂点の集合 V の 2 つの互いに素な集合 $\{V_1, V_2\}$ への分割を決定する. ここで 頂点 $i \in V_j$ となるのは,

$$p_i^* \mid D_j \quad (j = 1, 2)$$

となるとき, 又そのときのみ成り立つ.

Proposition 5 頂点の分割 $\{V_1, V_2\}$ は, V_1 と V_2 とを結ぶ辺のみからなる $G(D)$ の部分グラフの全ての頂点の次数が偶数であるとき, 第 2 種 D -分割に対応している.

(証) 第 2 種 D -分割の意味から

$$\left(\frac{D_1}{p}\right) = 1, \forall p \mid D_2, \quad \left(\frac{D_2}{p}\right) = 1, \forall p \mid D_1.$$

また

$$a_{ij} = 1 \iff \left(\frac{p_i^*}{p_j}\right) = -1.$$

Definition 8 $G(D)$ の部分グラフで全ての辺が, V_1 と V_2 との各点を結ぶものであるとき, 全ての頂点の次数が偶数 (0 を含む) ならば, $\{V_1, V_2\}$ を *Eulerian vertex decomposition* という.

Theorem 3 (Rédei - Reichardt criterion) D を随伴グラフ $G(D)$ をもつ判別式とするととき $G(D)$ の *Euler vertex decomposition* の数は 2^{e_2} である. ここで e_2 は $Q(\sqrt{D})$ の 4-rank を表す. したがって

$$e_2 \geq 1 \iff G(D) \text{ の Euler vertex decomposition の数が偶数である.}$$

Theorem 4 (Pumplün [P]) 判別式 D に対して

$$D = p_1^* \cdots p_N^*, \quad p_i^* (> 0) : \text{素判別式} \quad (i = 1, \dots, N)$$

となるとき, $h^*(D)$ を 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数とするならば

$$h^*(D) \equiv \sum_T \sum_{(i,j) \in T} \left(1 - \left(\frac{p_i^*}{p_j}\right)\right) \pmod{2^N}.$$

ここで, T は N 頂点の完全グラフの全ての spanning trees をわたるものとする.

Theorem 5 (Pumplün criterion) 判別式 D に対して

$$D = p_1^* \cdots p_N^*, \quad p_i^* (> 0): \text{素判別式} \quad (i = 1, \dots, N)$$

とせよ. このとき 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数 $h^*(D)$ は

$$h^*(D) \equiv 2^{N-1} |ST| \pmod{2^N}$$

を満たす. ここで, $|ST|$ は $G(D)$ の spanning trees の数を表す. したがって

$$e_2 \geq 1 \iff G(D) \text{ の spanning trees の数が偶数である.}$$

更に, Lagarias は, 上の 2 つの criterion の同値性を与える次の定理を純グラフ的に証明した.

Theorem 6 (Lagarias [L]) 任意の単純グラフ G に対して

$$|EVD| \equiv |ST| \pmod{2}.$$

ここで, $|EVD|$ は G の Eulerian vertex decomposition の数を表し, $|ST|$ は G の spanning trees の数を表す.

Proposition 6 (Oshima [O]) K_n を完全グラフ, $V(K_n)$ を K_n の頂点集合とするとき

$$\sharp V(K_n) = n. \quad (n \geq 2)$$

$\widetilde{K}_n$ を K_n より 1 本の edge を取り除いたグラフ ($n \geq 4$) とすると

$$\begin{aligned} 1) \quad |EVD|_{K_n} &= \begin{cases} 2^0, & n: \text{odd} \\ 2^{n-2}, & n: \text{even}(n \geq 2) \end{cases} \\ 2) \quad |EVD|_{\widetilde{K}_n} &= \begin{cases} 2^0, & n: \text{odd} \\ 2^{n-3}, & n: \text{even}(n \geq 4). \end{cases} \end{aligned}$$

§ 6 グラフ上の Zeta 関数

Theorem 7 (Ihara [I]) X を *valency* は $q+1$ の連結正則多重辺グラフとし, A をその随伴行列とする. そのとき

$$Z_X(u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det[I_n - Au + qu^2].$$

ここで $r = (q-1)n/2$ はグラフ上の p_0 を始点とする基本群 $\Gamma = \pi_1(X, p_0)$ の rank 及び $n = \sharp(VX)$ を表す.

Definition 9 (Hashimoto [H]) X を有限連結多重グラフ, $\Gamma = \pi_1(X, p_0)$ を X の基本群及び $EX = \{e_1, \dots, e_m\}$ を X の非有向辺の集合とすると, EX の *labelling* によって,

$$e_j \longrightarrow u_j \quad (1 \leq j \leq m)$$

と対応する独立変数 u_j をとり, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$

とかく. このとき, Γ の共役類 $\mathbf{P} = \{\gamma\}_\Gamma$ に対して

$$\mathbf{u}^{\mathbf{P}} = \mathbf{u}^{C_\gamma} := \prod_{k=1}^d u_{i_k}.$$

ここで, $C_\gamma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_d})$ ($y_{i_k} \in e_{i_k}$ ($1 \leq k \leq d$)) は, $\mathbf{P}$ に対応する簡約閉道とする. 又

$$\deg \mathbf{P} := d = \deg \mathbf{u}^{\mathbf{P}} = |C_\gamma| \quad (= \text{簡約道 } C_\gamma \text{ の長さ})$$

と定義する. 更に, $\langle C \rangle$ をグラフ X の長さ d の簡約閉道の類 $[C]$ に対応する Γ の共役類の元とし

$$\rho: \Gamma \longrightarrow U(n) \text{ を } \Gamma \text{ の } n \text{ 次元 unitary 表現}$$

とするとき $(\rho, \mathbf{u})$ に付随するグラフ X の Zeta 関数を次の同値な (形式的) 無限積

$$\begin{aligned} Z_X(\mathbf{u}; \rho) &:= \prod_{\mathbf{P}=\{\gamma\}_\Gamma: \text{primitive}} \det\{I_n - \rho(\gamma)\mathbf{u}^{\mathbf{P}}\}^{-1} \\ &= \prod_{[C]: \text{primitive}} \det\{I_n - \rho(\langle C \rangle)\mathbf{u}^C\}^{-1} \end{aligned}$$

によって定義する．ここで $\mathbf{P} = \{\gamma\}_\Gamma$ (resp. $[C]$) は Γ の原始的共役類 (resp. *cycle*) の集合をわたる．特に $\mathbf{u} = (u, \dots, u)$, $\rho = 1$ のとき

$$Z_X(u) := Z_X(\mathbf{u} : 1)$$

とかく．

この定義は, $PSL(Q_p)$ の離散部分群に付随して定義された伊原 Zeta 関数のグラフ版となっている．また このことは Serre によって指摘され ([S]), 1985 年砂田により名古屋大学に於ける講義の中で具体化された．

今回, 引用した定義は, それらを踏まえ更に一般のグラフに対して, 橋本により定義されたものである．Theorem 7 は, 橋本のグラフ研究の出発点ともなった基本的な結果である．

Theorem 8 (Hashimoto [H]) X を *valency* (q_1+1, q_2+1) ($q_1 \geq q_2$) の連結半正則 2 部多重グラフ $\sharp(V_i) = n_i$ ($i = 1, 2$) 及び $A^{[i]}$ を付随多重グラフ $X^{[i]}$ の随伴行列とするとき

$$\begin{aligned} Z_{X,b}(u)^{-1} &= (1-u)^{r-1} (1+q_2u)^{n_2-n_1} \det[I_{n_1} - (A^{[1]} - q_2 + 1)u + q_1q_2u^2] \\ &= (1-u)^{r-1} (1+q_1u)^{n_1-n_2} \det[I_{n_2} - (A^{[2]} - q_1 + 1)u + q_1q_2u^2]. \end{aligned}$$

ここで, $Z_{X,b}(u) := Z_X(u^{1/2})$ と定め,

$$\begin{aligned} r &= n_1q_1 - n_2 + 1 \\ &= n_2q_2 - n_1 + 1 \\ &= \text{the rank of } \Gamma = \pi_1(X, p_0) \end{aligned}$$

である．特に

$$\text{Spec}(X) = \{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_{n_1}, 0, \dots, 0\} \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n_1} \geq 0.)$$

とすると

$$\det[I_{n_1} - (A^{[1]} - q_2 + 1)u + q_1q_2u^2] = \prod_{j=1}^{n_1} \{1 - (\lambda_j^2 - q_1 - q_2)u + q_1q_2u^2\}.$$

橋本はこれらを用いて Lagarias が $|ST|$ と表現したグラフの spanning trees

の個数を

$$\kappa(X) : X \text{ のコンプレキシティ}$$

と定め、以下の定理で Zeta 関数の $u = 1$ に於ける特殊値を用いて求めている。

Theorem 9 (Hashimoto [H]) (1) X を *valency* は $q + 1$ ($q > 1$) の連結正則多重グラフ, $\sharp VX = n$ 及び $r = \dim_{\mathbf{C}} H_1(X, \mathbf{C})$ とするとき

$$\kappa(X) = \frac{-1}{n(q-1)2^{r-1}} \frac{1}{(1-u)^r Z_X(u)} \Big|_{u=1}.$$

(2) X を *valency* は $(q_1 + 1, q_2 + 1)$ ($q_1 q_2 > 1$) の連結半正則 2 部多重グラフ, 及び $\sharp(V_i) = n_i$ とするとき

$$\kappa(X) = \frac{1+q_2}{n_1} \frac{1}{1-q_1 q_2} \frac{1}{(1-u)^r Z_{X,b}(u)} \Big|_{u=1}.$$

§ 7 Example

(1) $G(D) = K(k_1, k_2)$: 完全 2 部グラフ, $q_1 = 2, q_2 = 2$ の場合

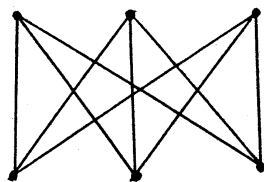
$$\kappa(K(q_1 + 1, q_2 + 1)) = (1 + q_1)^{q_2} (1 + q_2)^{q_1}$$

より

$$\kappa(K(q_1 + 1, q_2 + 1)) = 3^2 3^2 = 3^4 \equiv 1 \pmod{2}.$$

したがって,

$$K(2 + 1, 2 + 1) = K(3, 3) \quad G(D) :$$



に対応する 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ の

$$4 - \text{rank} = e_2 = 0$$

と解る。種の理論より,

$$2 - \text{rank} = e_1 = (q_1 + 1) + (q_2 + 1) - 1 = q_1 + q_2 + 1 = 5$$

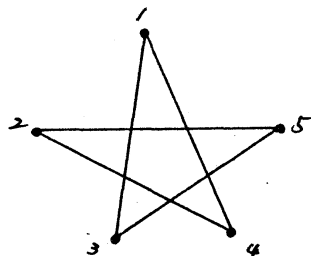
と与えられる。即ち、 $2^5 | h^*(D)$ ，故に

$$H_2 = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2.$$

(2) 連結正則グラフ $X = G(D)$ ， $q = 1$ の場合，

$$A_D : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$G(D) :$



のとき 固有多項式

$$f_A(x) = |xE - A_D| = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & x & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2(x-2)(x^2+x-1)$$

となり、 λ_j : 固有値 ($j = 1, \dots, 5$) とすると、

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0$$

と解る。 X : 連結正則グラフのとき

$$\kappa(X) = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_j + q) \quad (\text{ただし, } \lambda_n = q + 1)$$

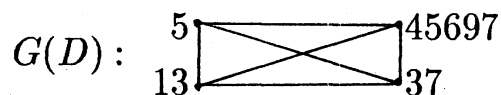
であるから、上の場合、 $n = 5$ ， $q = 1$ となり

$$\kappa(X) = \frac{1}{5} 2^2 \frac{(5 - \sqrt{5})}{2} \frac{(5 + \sqrt{5})}{2} = \frac{1}{5} 2^2 5 = 4 \equiv 0 \pmod{2}.$$

故に

$$4 - \text{rank} = e_2 \geq 1.$$

(3) $G(D) = K(q+2)$: 完全グラフ， $q = 2$ の場合 ([O])



のとき $D = 109901285 = 5 \times 13 \times 37 \times 45697$ として与えられ, $|EVD| = 2^2$ となることと, 種の理論とにより,

$$e_1 = 3, \quad e_2 = 2$$

と解り, $h^*(D) = 32$ より,

$$H_2 = C_{2^2} \times C_{2^2} \times C_2$$

となることが解る. このとき, $q = 2$ より $\kappa(K(q+2)) = (2+q)^q$ より $\kappa(G(D)) = (2+2)^2 = 4^2 = 16$ となり

$$\kappa(G(D))|h^*$$

となることも解る.

§ 8 Problem

4-rank の決定について, Lagarias によりグラフ理論的方法が導入され, $|EVD|$ によって

$$|EVD| = 2^{e_2} \quad (e_2 : 4\text{-rank})$$

と決定された. 又存在, 非存在については $|ST|$ 又は $\kappa(X)$: コンプレクシティの偶奇によって判定できた.

我々の今後の目標は, 同様の判定法によって 8-rank の存在, 非存在, 又更には具体的な計算法を与えることである.

Rédei-Reichardt 理論は実の 2 次体について 任意の 2-rank, 4-rank, 8-rank について それらをもつ無限個の実 2 次体とその ideal 類群の構成を与えている. 又 Morton は虚の 2 次体にもそれを拡張している.

§ 2 に現れているのと本質的に同じ有限 Abel 群の理論を用いて 8-rank の決定を有限 Abel 群 G に対して G^2 の 4-rank を求めることに帰着させている. Morton は特定の判別式をもつ 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-Dq})$ について, 4-rank を *size* とする $e_2 \times e_2$ matrix M を構成する *algorithm* を与え

$$e_3 = e_2 - \text{rank } M$$

によって $e_3 (= 8 - \text{rank})$ が決定されることを示している. そのグラフ化, 又 $8 - \text{rank}$ をもつ場合, もたない場合のグラフの特徴づけはまだなされていない.

References

- [B] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press (1974).
- [C-O] J. E. Cremona and R. W. K. Odoni, *Some density results for negative Pell equations ; An application of Graph theory*, Journal of London Math. Soc. (2) **39** (1989) 16-28.
- [F] R. Forman, *Determinants of Laplacians on Graphs*, preprint. (1991).
- [H] 橋本 喜一郎 (K. Hashimoto), *Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of p -adic Groups*, Advanced Studies in Pure Mathematics **15** (1989), 211-280 .
- [I] 伊原 康隆 (Y. Ihara), *On Discrete Subgroups of the Two by Two Projective Linear Group over p -adic Fields*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 219-235.
- [K] F. H. Koch, *Über den 4-Rank der Klassengruppe quadratischer Zahlkörper* J. Number Theory **19**, 219-227 (1984).
- [L] J. C. Lagarias, *On Determining the 4-Rank of the Ideal Class Group of a Quadratic Field*, J. Number Theory **12** (1980), 191-196 .
- [M1] P. Morton, *On Rédei's theory of the Pell equation*, J. Reine Angew. Math., **307/308** (1979), 373-398.
- [M2] ———, *Density results for the 2-classgroups of imaginary quadratic fields*, J. Reine Angew. Math., **332** (1982), 156-187.
- [M3] ———, *The quadratic number fields with cyclic 2 -classgroups*, Pacific Journal of Mathematics Vol. **108**, No. 1, (1983).
- [N] 中野 伸 (S. Nakano), *On the $\hat{2}$ -rank of the ideal class groups of pure number fields*, Sonderdruck aus Arch. Math., Vol. **42**, 53-57 (1984).

- [O] 大島 豊 (Y. Oshima), グラフの彩色多項式に関する Unimodal 予想及び 2 次体の類群の Euler グラフを用いた 4-階数評価, 佐賀大学大学院理工学研究科修士論文 (1987), 1-63.
- [P] D. Pumplün, *Über die Klassenzahl und die Grundeinheit des reellquadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. **230**(1968), 167-210.
- [R-R] L. Rédei und H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers* J. Reine Angew. Math. **170**(1933), 69-74.
- [R] H. Reichardt, *Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **170**(1933), 75-82.
- [S] J. P. Serre, *Trees* Springer Verlag, Berlin, (1980).
- [Su] 砂田 利一 (T. Sunada), 基本群とラブラシアン, 紀伊国屋書店, (1987)
- [U] 上原 健 (T. Uehara), *On the 4-Rank of the Narrow Ideal Class Group of a Quadratic Field* preprint(1989).