

磁性流体表面現象解析の 3 次元化

北大大学院工学研究科 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Grad. Sch. of Engineering Sciences, Hokkaido Univ.

1 はじめに

磁性流体自由表面における特異変形や波動などの解析では、界面変形が大きく複雑になるにつれて、流体解析・磁場解析いずれもできるだけ厳密に実行することが重要になってくる。特に磁場解析の結果は、磁性流体の振る舞いに様々な影響を与える。

磁場の分布を理論的に求めることは、調和的、すなわち非回転（無電流）・非発散（磁束保存）な場合に限っても、界面変形が微小であったり形が極めて単純な場合を除けば極めて難しく、数値解析を援用することになる。しかし従来の解析法には、界面上の磁場以外に領域内部の磁場まで求めることが必要、理論解析とのつながりをつけながら界面変形と磁場分布との関係を考察するには不便、などの問題点がある。

本研究ではこれまで、複素解析による 2 次元解析において、Flat Space から Real Space への写像変換に基づいて界面磁場だけで閉じた「界面磁場方程式」を導き [1, 2]、複雑多価形状の界面においても、直接、Flat Space で与えた任意の既知磁場分布から界面磁場を求められるようにした。さらにこの結果を利用して、定常界面形状の特異性について議論した [3]。ここまでは、本稿の 2 節に概略を述べた。

複素解析を用いると、互いに共役な物理量を実部・虚部に置く複素関数の「解析性」から Cauchy-Riemann の関係・等角写像性・調和性・Hilbert 変換などの諸性質が「自動的」に導かれ、特に Hilbert 変換を利用して、界面勾配角からそれに共役な空間収縮率を求めたり、「界面磁場方程式」を解いて界面磁場を効率よく求めることができた。しかし 2 次元解析を 3 次元解析に拡張する場合は、これらの諸性質を「手動」で 3 次元へ移し替えていく必要がある。本稿ではこの手続きについて述べる。最初に、Flat Space と Real

Space の間の対応関係を記述するため、変換行列および変換ベクトルを定義し、これらで界面磁場を表す。次に、直交曲線座標系における変換ベクトルの直交性について述べる。最後に、変換の調和性を反映した積分方程式を導き、これらと複素解析における Hilbert 変換との関係を議論する。

2 複素解析による 2 次元解析 [1, 2]

複素解析による 2 次元解析では、磁性流体領域を $j = 1$ 、真空領域を $j = 2$ として、各領域の磁場・磁束密度・透磁率を $\mathbf{h}_j = (h_{xj}, h_{yj})$, $\mathbf{b}_j = (b_{xj}, b_{yj})$, μ_j と表せば、非回転（無電流） $\text{rot } \mathbf{h}_j = \mathbf{i} = 0$ ($\mathbf{i}$: 電流密度)・非発散（磁束保存） $\text{div } \mathbf{b}_j = 0$ の各条件は、複素磁場 $f_j(z) = b_{xj} - ib_{yj} = \mu_j(h_{xj} - ih_{yj})$ の「解析性」で満たすことができる。

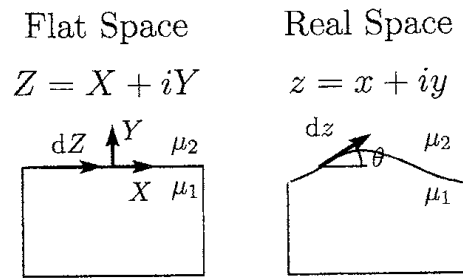


Fig. 1: Flat Space and Real Space in two-dimension

界面が平らな Flat Space と実際通り曲がっている Real Space それぞれで (Fig. 1), 複素磁場をスカラーポテンシャルの勾配から求め、非回転性を満たすようにする。両空間のスカラーポテンシャルの間に対応関係があれば、Real Space の複素磁場は $f_j(z) = F_j(Z)(dZ/dz)$ のように、Flat Space の複素磁場 $F_j(Z) = \mu_j H_X - iB_Y$ と Flat Space-Real Space 写像関係式 $dZ/dz = e^{-i\theta+\tau}$ で表され、界面が変形する前の既知の外場磁場分布 $F_j(Z)$ から直接的に、 $f_j(z)$ を決めることができる。ここで、 H_X, B_Y は Flat Space の界面をはさんで両領域に共通な接線磁場と法線磁束密度、 θ, τ は界面勾配角と空間収縮率である。 $F_j(Z)$ および dZ/dz の解析性が、 $f_j(z)$ の解析性を保証する。

dZ/dz の解析性からは, Cauchy-Riemann の関係を通して

$$\bar{\mathbf{X}} \equiv (X_x \ X_y)^t, \bar{\mathbf{Y}} \equiv (Y_x \ Y_y)^t \text{ の直交性: } \bar{\mathbf{X}}^t \bar{\mathbf{Y}} = 0, \quad (1)$$

$$X, Y \text{ の調和性 } (\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}} \text{ の非発散性}): \nabla_R \cdot \bar{\mathbf{X}} = \Delta_R X = 0, \nabla_R \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \Delta_R Y = 0 \quad (2)$$

が導かれる. 同様に,

$$\underline{\mathbf{X}} \equiv (x_X \ y_X), \underline{\mathbf{Y}} \equiv (x_Y \ y_Y) \text{ の直交性: } \underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{Y}}^t = 0 \quad (3)$$

も示される. これは, $dz/dZ = e^{i\theta-\tau}$ の解析性, あるいは, $(\theta + i\tau)(Z)$ の解析性に基いている. (4) で Hilbert 変換演算子を定義するとき,

$$\text{Hh}(X') \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dX'}{X' - X} h(X'), \quad (4)$$

$$\begin{cases} \tau = -s\text{H}\theta, & \left(\begin{array}{l} s = 1 : \theta + i\tau \text{ が上半面で解析的な場合} \\ s = -1 : \theta + i\tau \text{ が下半面で解析的な場合} \end{array} \right) \\ \theta = s\text{H}\tau \end{cases} \quad (5)$$

は, θ から τ を求めたり, 界面磁場だけで閉じた方程式を導く場合に有用である.

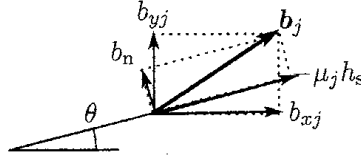


Fig. 2: Interface magnetic field

界面の形状決定や動的解析では, 磁気応力差が重要な役割を果たす. 磁気応力差は, 界面上の磁場の接線成分 $h_s = \mathbf{h} \cdot \mathbf{s}$ と磁束密度の法線成分 $b_n = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$ で $T = [1/(2\mu_j)] (\mu_1 \mu_2 h_s^2 + b_n^2)$ ($[\dots]$ は界面を横切る値の跳び, 上-下) と表されている. ここで, $\mathbf{s}, \mathbf{n}$ は接線ベクトル・法線ベクトルである. これらの界面磁場で定義した複素界面磁場 $g_j \equiv -\mu_j h_s - i b_n$ は, 次のように, $f_j(z)$ または $F_j(Z)$ で簡潔に表される.

$$g_j \equiv -\mu_j h_s - i b_n = f_j(z) e^{i\theta} \quad (6)$$

$$= f_j(z) e^{i\theta-\tau} / e^{-\tau} = F_j(Z) / e^{-\tau}. \quad (7)$$

ただし, Fig. 2に示す b_j と界面磁場の幾何学的関係を, (6) のようにまとめた. (7) は, 既知の $F_j(Z)$ と, θ に共役な τ から界面磁場が求められることを示している.

界面の形状決定や動的解析は, 界面上の力学的条件と運動学的条件から導いた, 「磁場—流体結合発展方程式」に基づいて実行される.

本節では, 複素解析による2次元解析についてまとめたが, ここで得られたいくつかの性質を, 次節以降, 3次元解析へ拡張していく.

3 Flat Space と Real Space の対応関係

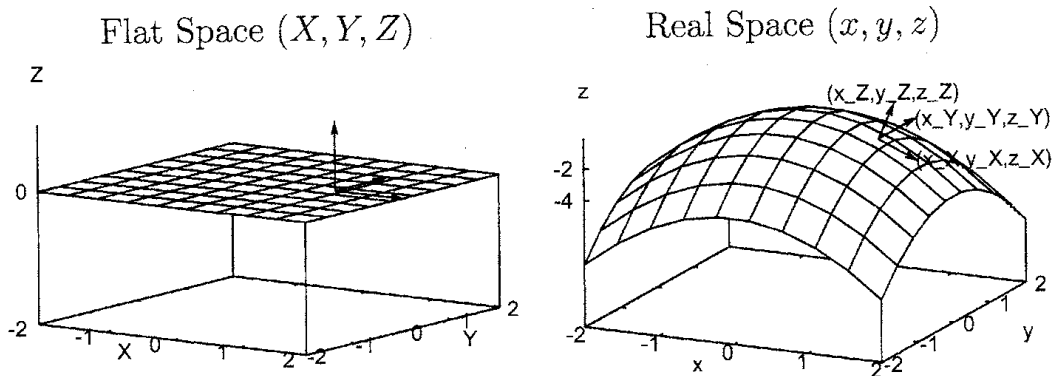


Fig. 3: Correspondence between Flat Space and Real Space

本稿では, Fig. 3に示すように, Flat Space と Real Space の座標の間に $(X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)), (x(X, Y, Z), y(X, Y, Z), z(X, Y, Z))$ のような対応関係があるとして, Flat Space から Real Space への変換行列 $R \cdot R$ 変換ベクトル $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$, Real Space から Flat Space への変換行列 $F \cdot F$ 変換ベクトル $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ を次のように定義する.

$$R \equiv \begin{pmatrix} x_X & y_X & z_X \\ x_Y & y_Y & z_Y \\ x_Z & y_Z & z_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \\ \underline{Z} \end{pmatrix}, \quad F \equiv \begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X} & \overline{Y} & \overline{Z} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

ここで x_X は x の X による偏微分, X_x は X の x による偏微分などを表す. これらは, 2次元複素解析の $dz/dZ, dZ/dz$ に相当する.

$(dz/dZ)(dZ/dz) = 1$ に対応して, R と F は互いに逆行列の関係にある.

$$RF = \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \\ \underline{Z} \end{pmatrix} (\overline{X} \ \overline{Y} \ \overline{Z}) = \begin{pmatrix} \underline{X}\overline{X} & \underline{X}\overline{Y} & \underline{X}\overline{Z} \\ \underline{Y}\overline{X} & \underline{Y}\overline{Y} & \underline{Y}\overline{Z} \\ \underline{Z}\overline{X} & \underline{Z}\overline{Y} & \underline{Z}\overline{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

これを利用すれば, F 変換ベクトル $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ を R 変換ベクトル $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ で表すことができる.

$$\begin{aligned} F &\equiv (\overline{X} \ \overline{Y} \ \overline{Z}) = R^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} x_X & y_X & z_X \\ x_Y & y_Y & z_Y \\ x_Z & y_Z & z_Z \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|R|} \begin{pmatrix} y_Y z_Z - y_Z z_Y & y_Z z_X - y_X z_Z & y_X z_Y - y_Y z_X \\ z_Y x_Z - z_Z x_Y & z_Z x_X - z_X x_Z & z_X x_Y - z_Y x_X \\ x_Y y_Z - x_Z y_Y & x_Z y_X - x_X y_Z & x_X y_Y - x_Y y_X \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|R|} \left((\underline{Y} \times \underline{Z})^t \ (\underline{Z} \times \underline{X})^t \ (\underline{X} \times \underline{Y})^t \right), \quad |R| = [\underline{X} \underline{Y} \underline{Z}]. \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $|R|$ は R の行列式で, $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ による平行 6 面体の体積に等しい.

4 Real Space, Flat Space の磁場

2 次元複素解析で磁束密度 b_j が非回転性 $\text{rot } b_j = 0$ および非発散性 $\text{div } b_j = 0$ を満たすには, Cauchy-Riemann の関係があればよい. Real Space における Cauchy-Riemann の関係は, $f_j(z) = F_j(Z)(dZ/dz)$ が示すように, Flat Space における磁束密度と Flat Space-Real Space 写像関係式の解析性が保証する. 以下では, これを 3 次元解析でも可能にするための条件を導く. なおこれ以後, 下付き添え字は領域でなく, 3 次元空間における各次元の成分を示す.

Real Space の $\mathbf{r} = (x_i) = (x, y, z)$ に対応する Flat Space の点を $\mathbf{R} = (X_J) = (X, Y, Z)$ として, 各々の空間で磁束密度をスカラーポテンシャル ψ, Ψ の勾配から $b_i = -\partial\psi/\partial x_i, B_J = -\partial\Psi/\partial X_J$ のように求めることにすれば, 非回転性 $\nabla_R \times \mathbf{b} = 0, \nabla_F \times \mathbf{B} = 0$ が自動的に満たされる. これ以降このように, Real Space の座標による微分は ∇_R , Flat Space の座標による

微分は ∇_F と表すことにする. このとき $\psi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{R})$ とすれば, b_i と B_J は次のように関係づけられる.

$$b_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\sum_J \frac{\partial X_J}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial X_J} = \sum_J \frac{\partial X_J}{\partial x_i} B_J. \quad (11)$$

(11) に基づけば, Real Space における b_i の非発散性は

$$0 = \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = \sum_{I,J} \left(\sum_i \frac{\partial X_J}{\partial x_i} \frac{\partial X_I}{\partial x_i} \right) \frac{\partial B_J}{\partial X_I} + \sum_J \left(\sum_i \frac{\partial^2 X_J}{\partial x_i \partial x_i} \right) B_J \quad (12)$$

のようになるが, さらに Flat Space-Real Space 変換に

$$\text{直交性: } \sum_i \frac{\partial X_J}{\partial x_i} \frac{\partial X_I}{\partial x_i} = \bar{\mathbf{X}}_J \cdot \bar{\mathbf{X}}_I = |\bar{\mathbf{X}}_J|^2 \delta_{JI}, \quad (13)$$

$$\text{調和性: } \sum_i \frac{\partial^2 X_J}{\partial x_i \partial x_i} = \Delta_R X_J = 0 \quad (14)$$

があれば, (12) は次のようになる.

$$0 = \sum_J |\bar{\mathbf{X}}_J|^2 \frac{\partial B_J}{\partial X_J}. \quad (15)$$

すなわち, 変換に直交性・調和性があれば, b_i, B_J は共に非発散的となる.

2次元複素解析では, 界面上で磁場の接線成分 h_s , 磁束密度の法線成分 b_n が定義される. 3次元解析では, $b_I = \mathbf{b} \cdot (\underline{\mathbf{X}}_I / |\underline{\mathbf{X}}_I|)$ がこれらに相当するが, これは(11)を用いて, 次のように書き換えられる.

$$b_I = \frac{1}{|\underline{\mathbf{X}}_I|} \sum_i b_i \frac{\partial x_i}{\partial X_I} = \frac{1}{|\underline{\mathbf{X}}_I|} \sum_{i,J} \frac{\partial x_i}{\partial X_I} \frac{\partial X_J}{\partial x_i} B_J = \frac{1}{|\underline{\mathbf{X}}_I|} \sum_J \delta_{I,J} B_J = \frac{B_I}{|\underline{\mathbf{X}}_I|}. \quad (16)$$

$B_I = B_X, B_Y, B_Z$ は既知の外部磁場として与えられるので, R 変換ベクトル $\underline{\mathbf{X}}_I = \underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{Y}}, \underline{\mathbf{Z}}$ の大きさを求めれば界面磁場 $b_I = b_X, b_Y, b_Z$ がわかり, 磁気応力差 T を計算することができる.

5 直交性

2次元複素解析における等角写像性は, $\underline{\mathbf{X}} \equiv (x_X \ y_X)$, $\underline{\mathbf{Y}} \equiv (x_Y \ y_Y)$ と定義するとき, Cauchy-Riemann の関係から $\underline{\mathbf{X}} \underline{\mathbf{Y}}^t = 0$ と表される. このとき, $\bar{\mathbf{X}} \equiv (X_x \ X_y)^t$, $\bar{\mathbf{Y}} \equiv (Y_x \ Y_y)^t$ に対しても同時に, $\bar{\mathbf{X}}^t \bar{\mathbf{Y}} = 0$ が成り立つ.

3次元解析でも、 R 変換ベクトルの間に直交性があれば、 F 変換ベクトルの間にも直交性がある。 R 変換ベクトル $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{Z}$ の直交性は、変換行列 R により、

$$RR^t = \begin{pmatrix} \underline{X}\underline{X}^t & \underline{X}\underline{Y}^t & \underline{X}\underline{Z}^t \\ \underline{Y}\underline{X}^t & \underline{Y}\underline{Y}^t & \underline{Y}\underline{Z}^t \\ \underline{Z}\underline{X}^t & \underline{Z}\underline{Y}^t & \underline{Z}\underline{Z}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\underline{X}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |\underline{Y}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\underline{Z}|^2 \end{pmatrix} \equiv \Lambda \quad (17)$$

と表される。これを

$$R = \Lambda (R^t)^{-1} = \Lambda (R^{-1})^t = \Lambda F^t, \quad F = R^t \Lambda^{-1} \quad (18)$$

と書き換えると、対角行列 Λ の逆行列もまた対角的であることから、

$$F^t F = (R^t \Lambda^{-1})^t (R^t \Lambda^{-1}) = \Lambda^{-1} R R^t \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \quad (19)$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{X}^t \overline{X} & \overline{X}^t \overline{Y} & \overline{X}^t \overline{Z} \\ \overline{Y}^t \overline{X} & \overline{Y}^t \overline{Y} & \overline{Y}^t \overline{Z} \\ \overline{Z}^t \overline{X} & \overline{Z}^t \overline{Y} & \overline{Z}^t \overline{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\underline{X}|^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & |\underline{Y}|^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & |\underline{Z}|^{-2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} |\overline{X}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |\overline{Y}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\overline{Z}|^2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

となり、 F 変換ベクトル $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ にも直交性があることが示される。

F 変換ベクトルの直交性は、次のように導くこともできる。 R 変換ベクトルの間に直交性があれば、互いを

$$\underline{X} = \frac{|\underline{X}|}{|\underline{Y}||\underline{Z}|}(\underline{Y} \times \underline{Z}), \quad \underline{Y} = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{Z}||\underline{X}|}(\underline{Z} \times \underline{X}), \quad \underline{Z} = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{X}||\underline{Y}|}(\underline{X} \times \underline{Y}) \quad (22)$$

と表すことができ、また、 $|R| = [\underline{X}\underline{Y}\underline{Z}] = |\underline{X}||\underline{Y}||\underline{Z}|$ となる。(10)のように F 変換ベクトルを R 変換ベクトルで表した後、これらを用いれば、

$$\overline{X} = \frac{(\underline{Y} \times \underline{Z})^t}{|R|} = \frac{\underline{X}^t}{|\underline{X}|^2}, \quad \overline{Y} = \frac{(\underline{Z} \times \underline{X})^t}{|R|} = \frac{\underline{Y}^t}{|\underline{Y}|^2}, \quad \overline{Z} = \frac{(\underline{X} \times \underline{Y})^t}{|R|} = \frac{\underline{Z}^t}{|\underline{Z}|^2} \quad (23)$$

のように、 F 変換ベクトルは R 変換ベクトルと平行になる。したがって、 R 変換ベクトルの直交性が F 変換ベクトルの直交性に反映される。このこと

はより直観的に, たとえば, 面 $X = \text{const.}$ の法線ベクトルである $\bar{\mathbf{X}}$ と, $Y = \text{const.}$, $Z = \text{const.}$ の交線の接線ベクトルである $\underline{\mathbf{X}}$ の方向が, 直交曲線座標系では一致する, と説明できる.

6 調和性

$X_J = X, Y, Z$ とすれば, 調和性の条件は,

$$\sum_i \frac{\partial^2 X_J}{\partial x_i \partial x_i} = \Delta_R X_J = 0 \quad (24)$$

である. これを積分型に直し, 界面条件を組み込んだ形で使えるようにする. 磁性流体領域・真空領域いずれかの領域内部とそれを囲む界面および無限遠の表面において, X_J と, Laplace 方程式の基本解 ψ に対する Green の定理は次のようになる.

$$\iiint dV'_R (X'_J \Delta'_R \psi - \psi \Delta'_R X'_J) = \oint d\mathbf{S}'_R \cdot \{X'_J (\nabla'_R \psi) - \psi (\nabla'_R X'_J)\}, \quad (25)$$

$$\Delta'_R \psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \quad (26)$$

ψ は Real Space におけるソース点座標 $\mathbf{r}'$ と観測点座標 $\mathbf{r}$ の差の関数である (Table 1 参照). (25) で $X'_J = X_J(\mathbf{r}')$ は $\mathbf{r}'$ の関数, ∇'_R, Δ'_R は $\mathbf{r}'$ による微分, $dV'_R, d\mathbf{S}'_R$ は $\mathbf{r}'$ による積分を表している. なお, $\mathbf{r}$ によるこれらの操作には “'” をつけない.

Table 1: Basic solutions of Laplace equation and their derivatives in two- and three-dimension (Real Space)

Dim.	$\psi(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$	$\nabla'_R \psi$	$\Delta'_R \psi$
2	$\frac{\ln \mathbf{r}' - \mathbf{r} }{2\pi}$	$\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{2\pi \mathbf{r}' - \mathbf{r} ^2}$	$\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$
3	$\frac{-1}{4\pi \mathbf{r}' - \mathbf{r} }$	$\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{4\pi \mathbf{r}' - \mathbf{r} ^3}$	$\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$

$\mathbf{r}$ が界面上にあるとき, Green の定理に (24), (26) を用い, さらに $\bar{\mathbf{X}}'_J = \nabla'_R X'_J$ とおけば,

$$X_J = 2 \iint_I d\mathbf{S}'_R \cdot \{X'_J (\nabla'_R \psi) - \psi \bar{\mathbf{X}}'_J\} \quad (27)$$

となる。右辺積分前の2は、 $\mathbf{r}$ が界面上にあって、(26)のデルタ関数の体積分領域が半分になることによる。また、無限遠の表面で被積分関数が十分小さくなるとして、面積分の範囲を界面(I)に限った。

(27)の両辺で $\mathbf{r}$ についての勾配を取れば、右辺で ∇_R は ψ だけに作用するため、

$$\bar{\mathbf{X}}_J = \nabla_R X_J = 2 \iint_I d\mathbf{S}'_R \cdot \left\{ X'_J \nabla'_R (\nabla_R \psi) - (\nabla_R \psi) \bar{\mathbf{X}}'_J \right\} \quad (28)$$

が導かれる。

ここで(23)より、面積素ベクトルが $d\mathbf{S}_R = dX dY (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = dX dY \frac{|\mathbf{R}|}{|\mathbf{Z}|^2} \mathbf{Z}$ と表され、また $\nabla_R = \bar{\mathbf{X}} \frac{\partial}{\partial X} + \bar{\mathbf{Y}} \frac{\partial}{\partial Y} + \bar{\mathbf{Z}} \frac{\partial}{\partial Z}$ となることから、

$$d\mathbf{S}'_R \cdot \nabla'_R = dX' dY' \frac{|\mathbf{R}'|}{|\mathbf{Z}'|^2} \frac{\partial}{\partial Z'}, \quad d\mathbf{S}'_R \cdot \bar{\mathbf{X}}'_J = dX' dY' \frac{|\mathbf{R}'|}{|\mathbf{Z}'|^2} \mathbf{Z}' \cdot \bar{\mathbf{X}}'_J. \quad (29)$$

(27),(28)では、 $X_J = X, Y$ のとき、 $\mathbf{Z} \cdot \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{Z} \cdot \bar{\mathbf{Y}} = 0$ より第2項が消え、 $X_J = Z$ のとき、 $Z = 0$ より第1項が落ちて、次式が導かれる。

$$\begin{cases} X = 2 \iint_I X' d\mathbf{S}'_R \cdot \nabla'_R \psi = 2 \iint_I dX' dY' \frac{|\mathbf{R}'|}{|\mathbf{Z}'|^2} X' \frac{\partial \psi}{\partial Z'}, \\ Y = 2 \iint_I Y' d\mathbf{S}'_R \cdot \nabla'_R \psi = 2 \iint_I dX' dY' \frac{|\mathbf{R}'|}{|\mathbf{Z}'|^2} Y' \frac{\partial \psi}{\partial Z'}, \\ Z = -2 \iint_I \psi d\mathbf{S}'_R \cdot \bar{\mathbf{Z}}' = -2 \iint_I dX' dY' \frac{|\mathbf{R}'|}{|\mathbf{Z}'|^2} \psi, \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{X}} = 2 \iint_I X' d\mathbf{S}'_R \cdot \nabla'_R (\nabla_R \psi) = 2 \iint_I dX' dY' \frac{|\mathbf{R}'|}{|\mathbf{Z}'|^2} X' \frac{\partial (\nabla_R \psi)}{\partial Z'}, \\ \bar{\mathbf{Y}} = 2 \iint_I Y' d\mathbf{S}'_R \cdot \nabla'_R (\nabla_R \psi) = 2 \iint_I dX' dY' \frac{|\mathbf{R}'|}{|\mathbf{Z}'|^2} Y' \frac{\partial (\nabla_R \psi)}{\partial Z'}, \\ \bar{\mathbf{Z}} = -2 \iint_I (\nabla_R \psi) d\mathbf{S}'_R \cdot \bar{\mathbf{Z}}' = -2 \iint_I dX' dY' \frac{|\mathbf{R}'|}{|\mathbf{Z}'|^2} (\nabla_R \psi). \end{cases} \quad (31)$$

F 変換ベクトル $\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{Z}}$ の大きさの逆数は、(20),(21)より R 変換ベクトル $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ の大きさになるが、これらは、(16)に示したとおり、界面磁場 $b_I = b_X, b_Y, b_Z$ を求めるために必要な量である。

[1, 2] では, 2次元解析について, 磁性流体・真空両領域の場合から合成場を定義し, 「磁束密度の法線成分と磁場の接線成分が連続」という界面条件を, 「合成場が界面に直交, あるいは, 界面に平行」というより単純な境界条件に置き換えた. (30),(31) は, これを3次元へ拡張するための予備的な関係になっている.

7 Flat Space における調和性

この節では, (25) の代わりに, Flat Space における Green の定理を考える [4]. 体積分・面積分は磁性流体または真空いずれかの領域全体で, それぞれ無限遠まで広がっている.

$$\iiint dV'_F (x'_i \Delta'_F \psi - \psi \Delta'_F x'_i) = \oint d\mathbf{S}'_F \cdot \{x'_i (\nabla'_F \psi) - \psi (\nabla'_F x'_i)\}. \quad (32)$$

ψ と x_i は, (33),(34) および Table 2 を満たすとする.

$$\Delta'_F \psi = \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}), \quad (33)$$

$$\sum_J \frac{\partial^2 x'_i}{\partial X'_J \partial X'_J} = \Delta'_F x'_i = 0. \quad (34)$$

Table 2: Basic solutions of Laplace equation and their derivatives in two- and three-dimension (Flat Space)

Dim.	$\psi(\mathbf{R}' - \mathbf{R})$	$\nabla'_F \psi$	$\Delta'_F \psi$
2	$\frac{\ln \mathbf{R}' - \mathbf{R} }{2\pi}$	$\frac{\mathbf{R}' - \mathbf{R}}{2\pi \mathbf{R}' - \mathbf{R} ^2}$	$\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R})$
3	$\frac{-1}{4\pi \mathbf{R}' - \mathbf{R} }$	$\frac{\mathbf{R}' - \mathbf{R}}{4\pi \mathbf{R}' - \mathbf{R} ^3}$	$\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R})$

(25) と同様に, ψ は Flat Space の界面上にあるソース点座標 $\mathbf{R}'$ と観測点座標 $\mathbf{R}$ の差の関数であり, ∇' は, $\mathbf{R}'$ の関数と $\mathbf{R}'$ による微分・積分を表す. (32) において, 左辺には (33),(34) を適用し, 右辺では, 無限遠の表面で被積分関数が十分小さくなるとして, 界面上の面積分だけ残す. Flat Space の

界面は平らなので, $d\mathbf{S}_F = dXdY(\bar{\mathbf{Z}}/|\bar{\mathbf{Z}}|)$ は常に Z 方向を向き, また $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ はいずれも界面上の点なので, $d\mathbf{S}_F \cdot (\nabla_F \psi) = 0$ となる. 以上より,

$$x_i = 2 \iint_I d\mathbf{S}'_F \cdot \{x'_i (\nabla'_F \psi) - \psi (\nabla'_F x'_i)\} = -2 \iint_I dX' dY' \psi \frac{\partial x'_i}{\partial Z'}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_J} = -2 \iint_I dX' dY' \frac{\partial \psi}{\partial X_J} \frac{\partial x'_i}{\partial Z'} = 2 \iint_I dX' dY' \frac{\partial \psi}{\partial X'_J} \frac{\partial x'_i}{\partial Z'}. \quad (36)$$

ここで $x_i = x, y, z$ であるが, $X_J = X, Y$ は界面内座標に限る.

次に, (35), (36) を $X-Z$ 平面内 および $x-z$ 平面内で2次元化する. このとき, 下半面 (磁性流体領域) で $s = -1$, 上半面 (真空領域) で $s = +1$ として, $\iint_I dX' dY'$ を $-s \int_{-\infty}^{\infty} dX'$, $\frac{\partial \psi}{\partial X'_J}$ を $\frac{1}{2\pi(X' - X)}$ で置き換えれば,

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = 2s \int_{-\infty}^{\infty} dX' \psi \begin{pmatrix} x'_Z \\ z'_Z \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\begin{pmatrix} x_X \\ z_X \end{pmatrix} = -\frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dX'}{X' - X} \begin{pmatrix} x'_Z \\ z'_Z \end{pmatrix} = -sH \begin{pmatrix} x'_Z \\ z'_Z \end{pmatrix}. \quad (38)$$

(38) は, (4) の Hilbert 変換演算子で表した. 複素解析による2次元解析では, x, z が X, Z の関数であるとき, $x + iz$ が $X + iZ$ の下半面全体または上半面全体で解析的ならば, $Z = 0$ 上で次の Hilbert 変換が成り立つ.

$$\begin{cases} z = -sHx', \\ x = sHz'. \end{cases} \quad (39)$$

H の中の X と X' の違いに注意して (39) の両辺を X で微分し, 右辺で部分積分を行う. さらに, Cauchy-Riemann の関係 $x_X = z_Z$, $z_X = -x_Z$ を用いる. こうして得られる次の結果は, (38) に一致している.

$$\begin{cases} z_X = -sHx'_X = -sHz'_Z, \\ x_X = sHz'_X = -sHx'_Z \end{cases} \quad (40)$$

2次元解析の場合, 確かに (38) と (40) が一致することが示されたが, それぞれの導き方には大きな違いがある. (38) では, Flat Spaceにおける x, z の調和性と Laplace 方程式の基本解 ψ を Green の定理に用いた. それに対

して(40)では、 x と z が互いに共役であること、およびCauchy-Riemannの関係性を前提としている。 x, z の調和性はCauchy-Riemannの関係からすぐ導けるので、(40)が(38)に一致するのは当然であるが、Hilbert変換(39)やCauchy-Riemannの関係といった x と z の間の関係を用いる(40)より、 x, z それぞれ独立に調和性を用いる(36)の方が、3次元への拡張を考える際には便利である。

なお、この節の議論はFlat Spaceにおける調和性(34)に基づいているため、このままの形で実際の調和場解析に適用することはできない。(24)に基づく前節の(30),(31)を発展させて用いることが必要である。

8 まとめ

Flat Space-Real Space対応関係と複素解析に基づく磁性流体自由表面解析の、3次元への拡張に着手した。複素解析による2次元解析で複素関数の「解析性」から自動的に導かれ使われていた諸性質を、複素解析に特有な部分と次元によらず普遍的な部分に切り分けてみて、2次元解析と同様の流れで解析を行うことが可能、という感触が得られた。

Flat Space-Real Space相互の変換ベクトルには、 $R = \begin{pmatrix} \underline{X} & \underline{Y} & \underline{Z} \end{pmatrix}^t$ と $F = \begin{pmatrix} \overline{X} & \overline{Y} & \overline{Z} \end{pmatrix}$ がある。 F は R で表され、 R に直交性があれば、 F にも直交性がある。

変換関係の調和性を積分型に直し界面条件を適用すると、積分方程式群が得られる。これらのうち、Flat Spaceにおける調和性から導いた方程式群の2次元版は、複素解析のHilbert変換とただちに対応がつけられる。しかし、Real Spaceにおける調和性から導いた積分方程式群が、そのままHilbert変換になるわけではない。これらの式に基づいて、2次元解析と同様な「界面磁場方程式」を界面条件を考慮しつつ導き、任意の既知磁場分布から界面磁場を求められるようにする必要がある。

参考文献

- [1] 水田 洋: 磁性流体自由表面解析における界面磁場方程式; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の構造と力学」, **1271**, p.61 (2002).
- [2] 水田 洋: 磁性流体自由表面解析における界面磁場方程式の解の検証; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」, **1311**, p.111 (2003).
- [3] 水田 洋: 磁性流体の表面形状決定における不連続性; 京都大学数理解析研究所講究録「波動の非線形現象とその応用」, **1368**, p.127 (2004).
- [4] 水田 洋: 磁性流体自由表面の非線形波動解析における解析性; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象のメカニズムと数理」, **1209**, p.46 (2001).