

# Rayleigh-Taylor 問題の数値解析

九州大学大学院数理学研究院 田端 正久 (Masahisa Tabata)<sup>1</sup>

Faculty of Mathematics, Kyushu University

## 1 はじめに

Rayleigh-Taylor 問題は重い流体が上方に軽い流体が下方にある状態から以後の流体の動きを求める問題であり、未知の界面を持つ二流体問題である。最近、開発されたエネルギー安定 P1/P2/P1 有限要素スキーム [5] を用いて、この問題の数値シミュレーションをすることが本稿の目的である。このスキームで、密度、流速、圧力は、それぞれ三角形 1 次、2 次、1 次要素で近似される。

二流体問題の数値シミュレーションはいろいろなされている [7], [8] が、我々の知る限り、数値解の厳密解への収束性が示されたスキームは得られていない。最近、我々は密度依存 Navier-Stokes 方程式に対して P0/P1N/P0 有限要素スキームを開発し、厳密解への収束性を示した [4]。ここで、P0, P1N は定数、および非適合 1 次要素を示している。二流体問題を密度依存 Navier-Stokes 問題に転換すれば、P0/P1N/P0 要素を二流体問題に適用することができる。Rayleigh-Taylor 問題をこのスキームで解いたいくつかの結果は [6] に報告されている。

P1/P2/P1 有限要素スキームも密度依存 Navier-Stokes 問題の枠組みの中で Rayleigh-Taylor 問題に適用できる。そこでは、密度は時間と空間の関数として扱われる。このスキームは P0/P1N/P0 スキームに比べて、応力界面条件がより自然に取り扱えること、近似次数が高いことの特長を持っている。不安定平衡状態と摂動非平衡状態を初期値として Rayleigh-Taylor 問題を解き、メッシュ分割の影響を議論する。

## 2 二流体問題

$\Omega$  を滑らかな境界  $\Gamma$  を持つ  $\mathbf{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  の有界領域,  $T$  を時刻を表す正定数とする。時刻  $t = 0$  で領域  $\Omega$  は二つの混じりあわない非圧縮粘性流体で占められている; それぞれの領域を  $\Omega_k^0$ ,  $k = 1, 2$ , その界面  $\partial\Omega_1^0 \cap \partial\Omega_2^0$  を  $\Gamma_{12}^0$  と表記する。時刻  $t \in (0, T)$  で二つの流体は領域  $\Omega_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ , を占めており、その界面  $\partial\Omega_1(t) \cap \partial\Omega_2(t)$  を  $\Gamma_{12}(t)$  とする。二流体の密度と粘性を  $\rho_k$  と  $\mu_k$ ,  $k = 1, 2$ , とする。  $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $p : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$  を求めるべき速度と圧力とする。これらは、各領域  $\Omega_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $t \in (0, T)$ , で Navier-Stokes 方程式

$$\rho_k \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right\} - \nabla (2\mu_k D(u)) - \nabla p = \rho_k f \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1b)$$

<sup>1</sup>E-mail : tabata@math.kyushu-u.ac.jp

を満たしている. ここに,  $f: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^d$  は与えられた関数,  $D(u)$  は変形速度テンソル  $D_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  であり,  $[\nabla (2\mu_k D(u))]_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu_k D_{ij}(u))$  である. 境界  $\Gamma, t \in (0, T)$ , で滑り境界条件

$$u \cdot n = 0, \quad \sigma(\mu, u, p)n \times n = 0 \quad (2)$$

が課される. ここに,  $n$  は  $\Gamma$  への外向き単位法線ベクトルであり,  $\sigma$  は応力テンソル  $\sigma(\mu, u, p) = -pI + 2\mu D(u)$  である. 界面  $\Gamma_{12}(t), t \in (0, T)$ , で速度と応力ベクトルは連続

$$[u] = 0, \quad [\sigma(\mu, u, p)n_{12}] = 0 \quad (3)$$

であり,  $[\cdot]$  は界面への領域  $\Omega_2$  からの極限值と領域  $\Omega_1$  からの極限值との差,  $n_{12}$  は  $\Omega_1(t)$  から  $\Omega_2(t)$  へ向く  $\Gamma_{12}(t)$  への単位法線ベクトルを示している.  $t = 0$  で初期条件

$$u = u^0 \quad (4)$$

が課される.

図 1 に示すように, 密度  $\rho_2$  の重い流体が上に, 軽い流体が下にある初期状態が与えられたとき, 流体の時間発展挙動を考える.

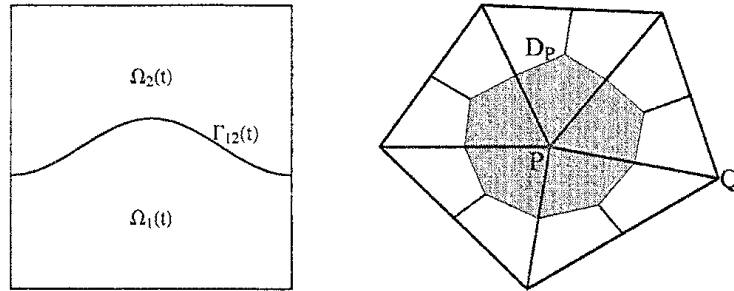


図 1: 界面  $\Gamma_{12}(t)$  (左) と重心領域  $D_P$  (右)

### 3 エネルギー安定有限要素法

[5] で我々は問題 (1)–(4) に対してエネルギー安定な有限要素スキームを開発した. その主たるアイデアは元の問題を密度依存 Navier-Stokes 問題に転換することであり, そこで密度は  $x$  と  $t$  の関数として扱われる. 粘性  $\mu$  は  $\rho$  の関数である. 二流体問題のとき,  $\mu$  は  $\mu(\rho) = \mu_1 \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} + \mu_2 \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$  で定義される. 本稿では P2/P1/P2 スキームのみを記述する, すなわち, 密度, 流速, 圧力はそれぞれ, P1-, P2-, と P1- 要素で近似される. 2次元  $d = 2$  について考える. 3次元への拡張とスキームの導出は [5] を参照していただきたい.

$\Phi_h, V_h, Q_h$  を密度, 流速, 圧力のための P1-, P2-, P1-有限要素空間とする. 空間  $V_h$  には本質的境界条件: 境界上の節点  $P$  で  $(v_h \cdot n)(P) = 0$  を課す.  $Q_h$  に属す関数は領域での積分平均が零である条件を満たしている. 時間刻みを  $\Delta t$  とし,  $N_T = \lceil T/\Delta t \rceil$  と置く.

$(\rho_h^n, u_h^n, p_h^n)$  で時刻  $n\Delta t$  での値を示し,  $\bar{D}_{\Delta t}$  は後退差分作用素  $\bar{D}_{\Delta t}u_h^n = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}$  を示す. 次の方程式を満たす  $\{(\rho_h^n, u_h^n, p_h^n) \in \Phi_h \times V_h \times Q_h; n = 1, \dots, N_T\}$  を求める:

$$(\bar{D}_{\Delta t}\bar{\rho}_h^n, \bar{\phi}_h) + c_{1h}(u_h^{n-1}, \rho_h^n, \phi_h) = 0, \quad \forall \phi_h \in \Phi_h \quad (5a)$$

$$\left( \rho_h^{n-1} \bar{D}_{\Delta t}u_h^n + \frac{1}{2}u_h^n \bar{D}_{\Delta t}\rho_h^n, v_h \right) + a_1(\rho_h^n, u_h^{n-1}, u_h^n, v_h) + a_0(\rho_h^n, u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (\rho_h^n \Pi_h f^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (5b)$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (5c)$$

初期条件は

$$\rho_h^0 = \Pi_h \rho^0, \quad u_h^0 = \Pi_h u^0 \quad (6)$$

である. ここに,  $\rho^0$  は

$$\rho^0(x) = \begin{cases} \rho_1 & (x \in \Omega_1^0) \\ \rho_2 & (x \in \Omega_2^0) \end{cases}$$

で定義される関数,  $\Pi_h$  は対応する有限要素空間への補間作用素である.  $(\cdot, \cdot)$  は  $L^2(\Omega)$  または  $L^2(\Omega)^2$  での内積を, 線形形式  $a_1, a_0, b$  は

$$a_1(\rho, w, u, v) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2}(w \cdot \nabla \rho)u + \frac{1}{2}\rho(\nabla \cdot w)u + \rho(w \cdot \nabla)u \right) \cdot v \, dx$$

$$a_0(\rho, u, v) = \int_{\Omega} \mu(\rho)D(u) : D(v) \, dx, \quad b(v, q) = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v)q \, dx.$$

で定義される. (5a) は [1] で開発された風上近似であり, 次で定義される. まず, 領域  $\Omega$  の双対分割  $\{D_P\}$  を作る.  $D_P$  は節点  $P$  の重心領域と呼ばれ辺の中点と三角形の重心とを結んでつくられる (図 1 参照). 節点  $P$  が境界  $\Gamma$  上にあるときは, (近似) 境界の一部も使われる.  $\Phi_h$  から  $L^2(\Omega)$  への集中質量作用素<sup>-</sup>を

$$\phi_h \mapsto \bar{\phi}_h(x) \equiv \sum_P \phi_h(P) \chi_P(x)$$

で定義する. ここに,  $\chi_P$  は  $D_P$  の特性関数である.  $\Lambda_P$  で節点  $P$  に隣接している節点集合を表示する. 形式  $c_{1h}$  は

$$c_{1h}(u_h, \rho_h, \phi_h) = \sum_P \phi_h(P) \sum_{Q \in \Lambda_P} \beta_{PQ}^-(u_h)(\rho_h(P) - \rho_h(Q)), \quad (7)$$

で定義される. ここに,

$$\beta_{PQ}^-(u_h) = \max\left(- \int_{\Gamma_{PQ}} u_h \cdot n_{PQ} \, ds, 0\right), \quad \Gamma_{PQ} = \partial D_P \cap \partial D_Q$$

であり,  $n_{PQ}$  は  $D_P$  から  $D_Q$  への  $\Gamma_{PQ}$  の単位法線ベクトルである. (7) は  $c_1(u, \rho, \phi) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho) \phi \, dx$  の風上近似であり, その導出は [1] の (4.13) を参照されたい.  $\Delta t$  に関して無条件に, (5a) の解  $\rho_h$  は最大値の原理を満たし, スキーム (5) は  $n = 0, \dots, N_T$  に関して一様にエネルギー  $\int_{\Omega} \rho_h^n |u_h^n|^2 \, dx$  が安定であることを証明することができる [1], [5].

## 4 数値結果

$\Omega \equiv (0, 1) \times (0, 1)$  を単位正方形とする. 連続関数  $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  に対して, 領域

$$\Omega_2^0 \equiv \{x \in \Omega; x_2 \geq \eta(x_1)\}, \quad \Omega_1^0 \equiv \{x \in \Omega; x_2 < \eta(x_1)\}.$$

を定義する. 二流体の密度, 粘性を

$$(\rho_1, \mu_1) = (10, 1), \quad (\rho_2, \mu_2) = (100, 2)$$

とし, 初期速度, 外力を

$$u^0 = (0, 0)^T, \quad f = (0, -1)^T.$$

とする. 領域  $\Omega$  を三角形に分割する. 図 2 に示す 3 種類のメッシュ, Union-Jack 型 (UJ), Friedrichs-Keller 型 (FK), と FreeFEM 型 (Free) を用いる. 最後のメッシュ作成には FreeFEM [2] を用いている. 各辺は 32 等分に分割されている.  $\Delta t = \frac{1}{2}$  とし,  $\eta$  を  $\int_0^1 \eta(x_1) dx_1 = \frac{1}{2}$  を満たすようにとる. 以下の図は数値計算で得られた近似界面  $\Gamma_{12}(t)$  を示している. それらは, 二流体の面積が等しくなるように描かれている. 外力  $f$  により重い流体は下方に動き, 時間が経つと重い流体が下半分を占める. 時間  $[0, 10]$  の遷移過程を観察する.

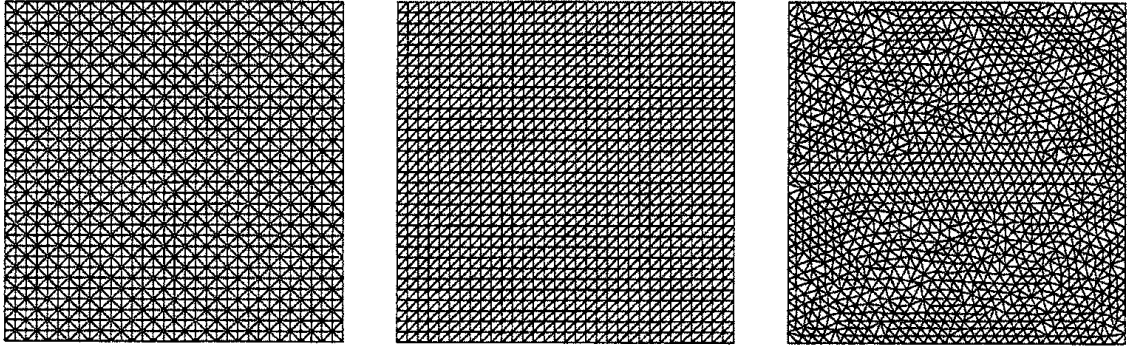


図 2: メッシュ UJ, FK, Free

### 4.1 Rayleigh-Taylor 不安定問題

関数  $\eta$  を

$$\eta(x_1) = \frac{1}{2} \tag{8}$$

で定義する. 初期状態は偏微分方程式の解として不安定な平衡解である. 図 3, 4 はメッシュ FK と Free の時刻  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  での界面を示している. メッシュ Free は一様でない. メッシュ FK は  $x_1 = 1/2$  に関して対称でなく, それが運動を引き起こすが, 界面形状はメッシュ Free と大きく異なる. メッシュ UJ では  $[0, 10]$  の間, ほとんど変化がないので, 図示していないが, 非常に小さい変化がやがては大きい運動を引き起こし最終的に

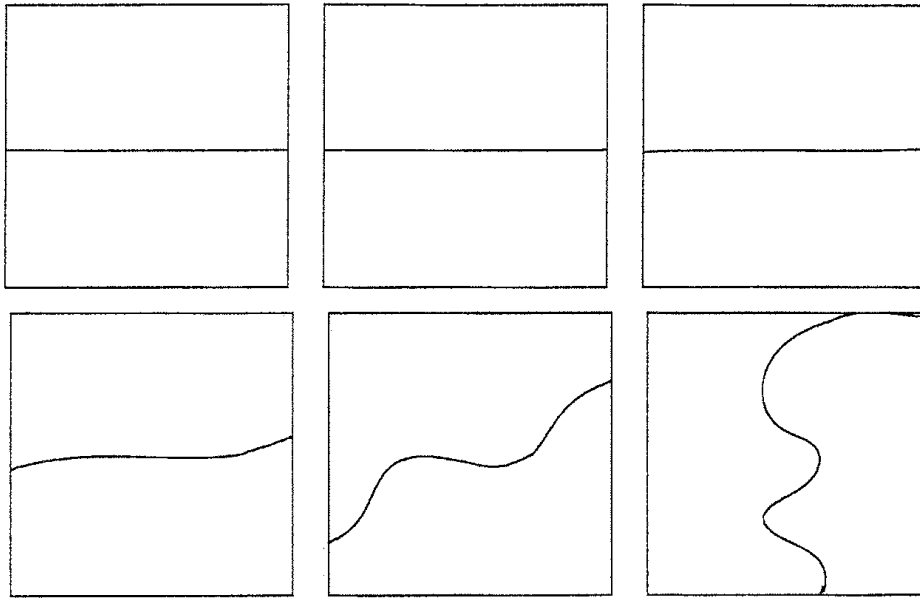


図 3: 時刻  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  での界面:幽霊解.  $\eta(8)$ , メッシュFK

重い流体が下部を占める．これらの三つの動きはすべて異なりメッシュに大きく依存している．このような解は，偏微分方程式には現れず離散近似でのみ現れるもので，”幽霊解 (ghost solution)” と呼ばれる．不安定問題の数値計算にしばしば生じる現象である．次節では，我々のスキームは適切な問題には良好に適用できることを示す．

## 4.2 摂動 Rayleigh-Taylor 問題

関数  $\eta$  を

$$\eta(x_1) = \frac{1}{2} - a \cos 2\pi x_1, \quad a = 0.01. \quad (9)$$

で定義する．初期状態は，重い流体が両側から少し浸入するように摂動されている．図 5, 6, 7 はそれぞれ，メッシュ UJ, FK, Free での結果である．これらの図は互いに似ており，メッシュ依存性は小さい．その違いはメッシュ長が零に近づけば減少する．

## 4.3 その他の問題

他の初期状態の問題をメッシュ UJ で解く．

図 8 は関数  $\eta$  が

$$\eta(x_1) = \frac{1}{2} - a \cos 2\pi x_1, \quad a = -0.01. \quad (10)$$

で与えられる場合である．初期状態は，重い流体が少し中央部で浸入するように摂動が加えられている．それが中央部から重い流体の移動を引き起こしている．

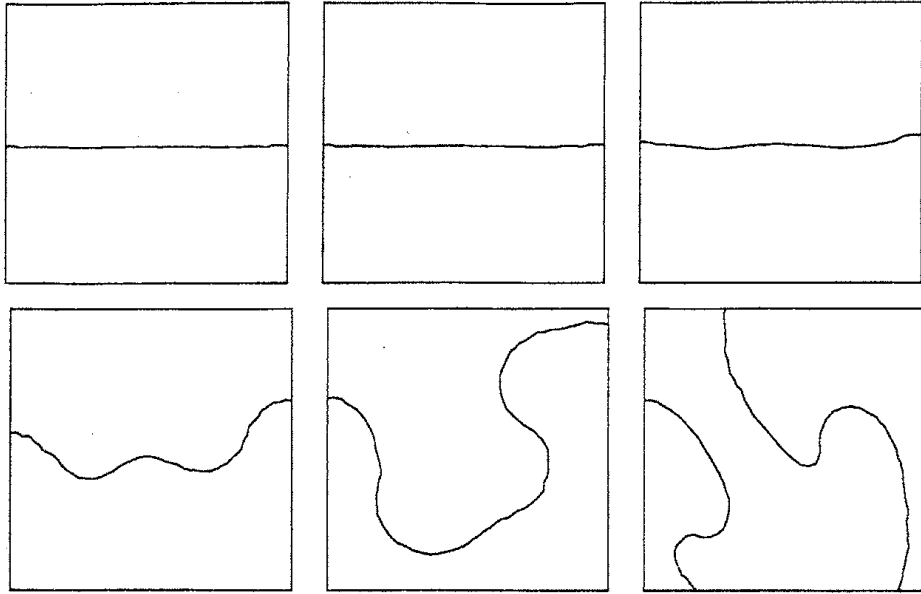


図 4: 時刻  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  での界面:幽霊解.  $\eta(8)$ , メッシュFree

図 9 は

$$\eta(x_1) = \frac{1}{2} - a \cos 4\pi x_1, \quad a = 0.01. \quad (11)$$

の場合である. 重い流体の両側と中央部からの浸入がこれらからの大きい移動を引き起こしている.

## 5 おわりに

Rayleigh-Taylor 問題をエネルギー安定な P1/P2/P1 有限要素スキームで解いた. 非平衡な初期状態を持つ Rayleigh-Taylor 問題の界面はほとんどメッシュに依存しない数値計算結果が得られた. 不安定平衡解を初期状態に持つ問題では幽霊解が観察された. このような現象は不安定問題の数値計算でしばしば現れるものである.

## 謝辞

この研究は日本学術振興会の科学研究費 (S) No.16104001 と文部科学省による 21 世紀 COE プログラム「機能数理学の構築と展開」から援助を受けた. ここに謝意を表する.

## 参考文献

- [1] K. Baba and M. Tabata. On a conservative upwind finite element scheme for convective diffusion equations. *R.A.I.R.O., Analyse numérique/Numerical Analysis*, Vol. 15, pp. 3-35, 1981.

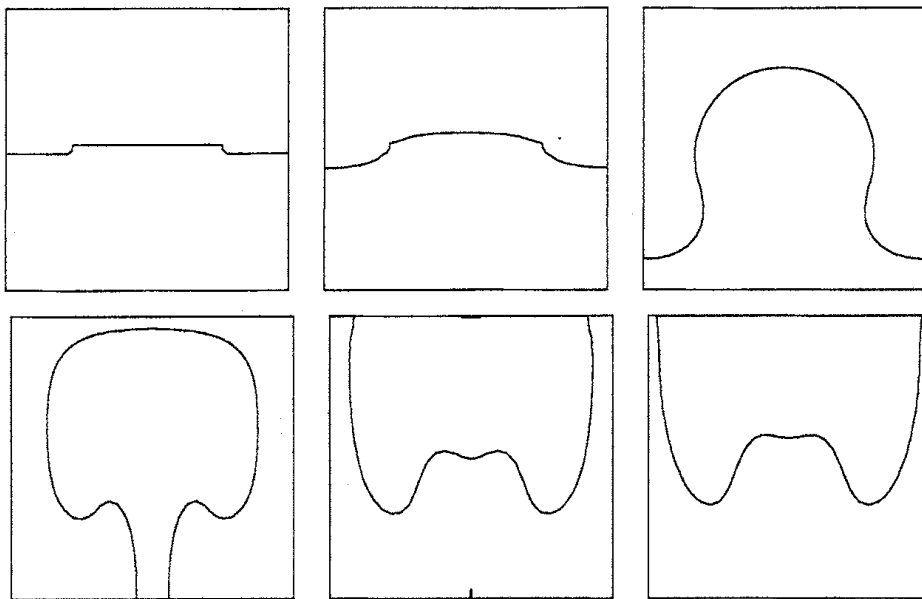


図 5: 時刻  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  での界面.  $\eta:(9)$ , メッシュ UJ

- [2] <http://www.freefem.org/>.
- [3] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*. Springer, 1986.
- [4] S. Kaizu and M. Tabata. A finite element analysis of the density-dependent Navier-Stokes equations, to appear.
- [5] M. Tabata and S. Kaizu. Finite element schemes for two-fluids flow problems. To appear in *Proceedings of 7th China-Japan Joint Seminar for Computational Mathematics and Scientific Computing*, Science Press, Beijing.
- [6] M. Tabata and Y. Fukushima. A Finite Element Approximation to Density-Dependent Navier-Stokes Equations and Its Application to Rayleigh-Taylor Instability Problem. In S. M. Sivakumar *et al.*, editors, *Advances in Computational & Experimental Engineering and Sciences*, pp. 455–460. Tech Science Press, India, 2005.
- [7] T. E. Tezduyar, M. Behr, and J. Liou. A new strategy for finite element computations involving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 94, pp. 339–351, 1992.
- [8] T. Yabe, F. Xiao, and T. Utsumi, T. The constrained interpolation profile method for multiphase analysis. *Journal of Computational Physics*, Vol. 169, pp. 556–593, 2001.

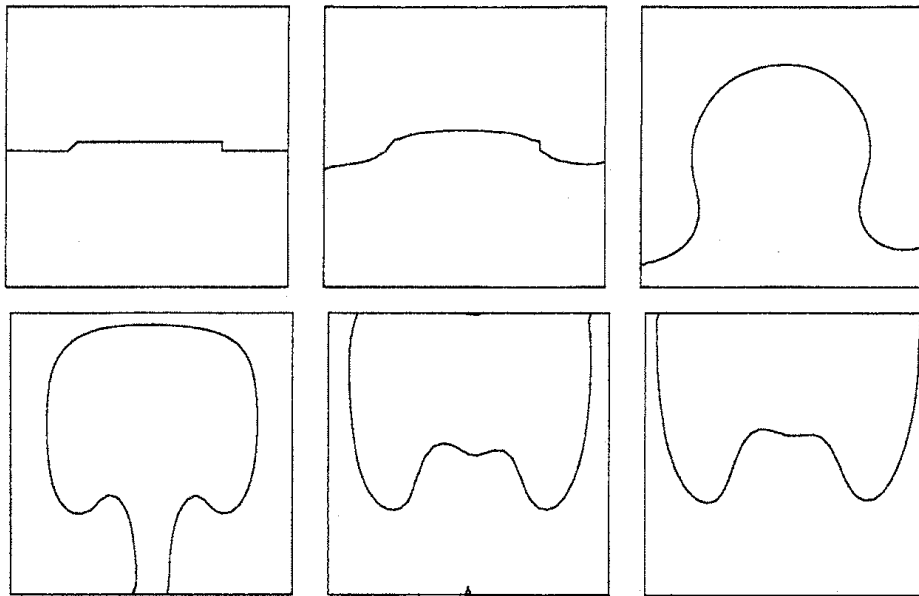


図 6: 時刻  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  での界面.  $\eta(9)$ . メッシュFK

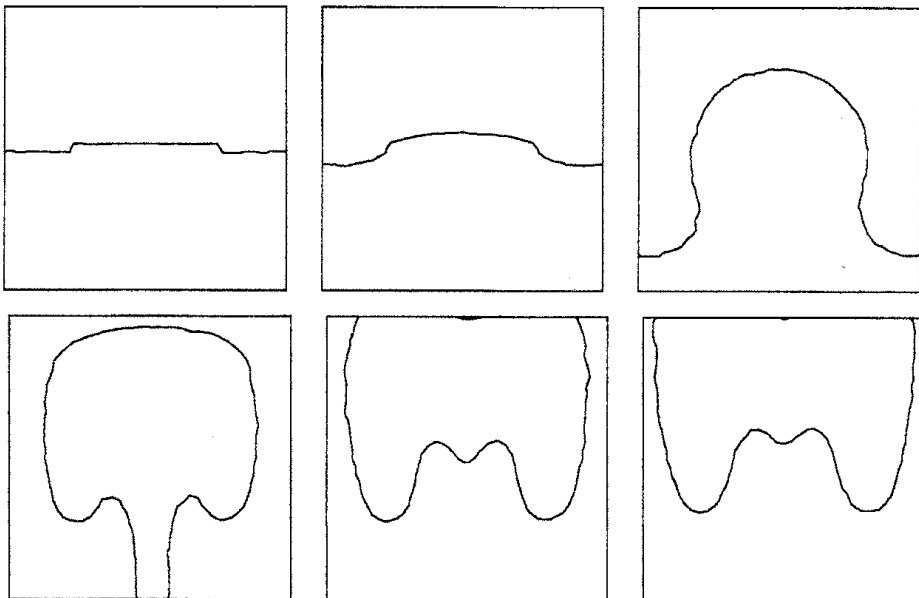


図 7: 時刻  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  での界面.  $\eta(9)$ , メッシュFree

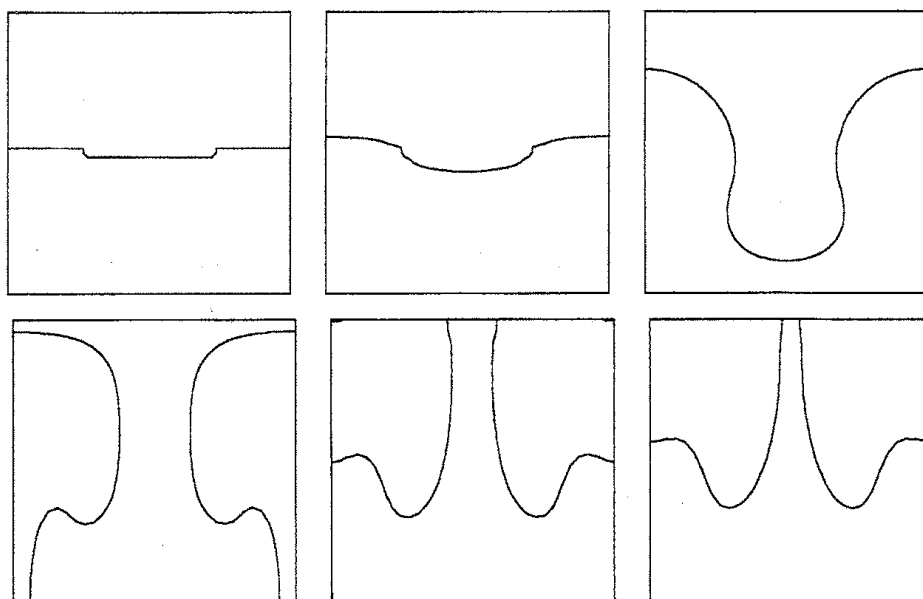


図 8: 時刻  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  での界面.  $\eta(10)$ , メッシュ UJ

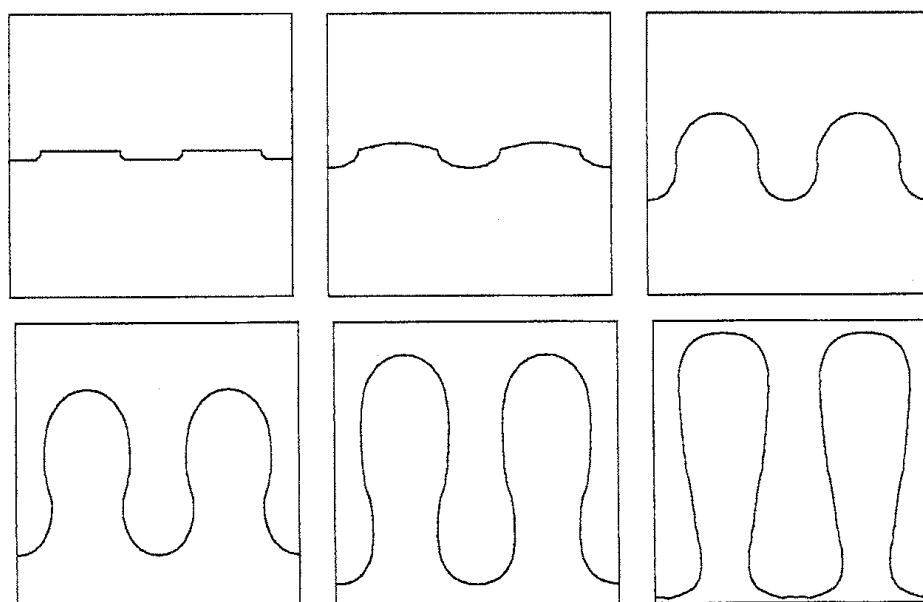


図 9: 時刻  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  での界面.  $\eta(11)$ , メッシュ UJ