

正・準正多面体と菱面体

別宮 利昭 (ユニーク・デザイン・スタジオ)

歴史が古いというか、すでに研究され尽くされていると思われる正多面体等をタイトルにいてみると肩が凝りそうなので、こんなふうになればこんなものができるんだ、とおおよそ理解してもらえれば十分と考えて、まだ完成していない研究を途中経過として述べさせていただきます。

二次元での試み

正 $2n$ 角形の菱形への分割

正 $2n$ 角形を菱形に分割すると n^2 個のタイルが多角形の中を充填している。(図1) これは各多角形の中のタイルで二次元空間を充填できることを意味している。なぜならば $2n$ 個の正 $2n$ 角形の或る頂点 O を固定して A を B に重ねて置くと図2のように一辺が2の相似形になる。一辺が2の各々のタイルで図1のように入れ直して前の操作を繰り返せば、一辺が4の相似形になる。次々にこの操作を繰り返せば平面を埋め尽くす。

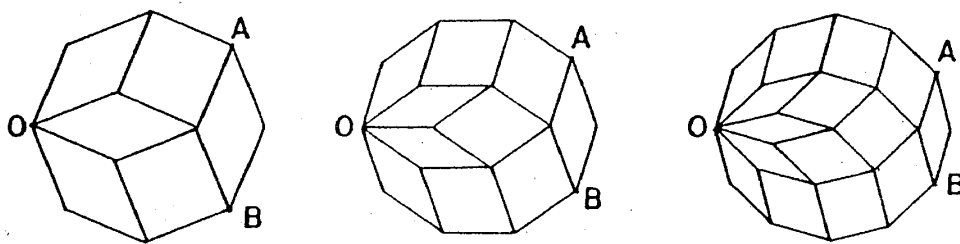


図1 正 $2n$ 角形の菱形への分割

正多角形から菱形を発生させる

いままでは先に正偶数多角形があってそれを菱形に分割していた。こんどは正多角形の辺又は対角線を菱形の対角線になるように正多角形の中心から各頂点へのベクトルの合成として考えると事情が変わってくる。(図3)

正多角形が奇数の場合は外角の数が倍になるが、偶数の場合は外角の数は変わらず一辺の長さが倍になり、中の菱形の数もかすも少なくなっている。こ

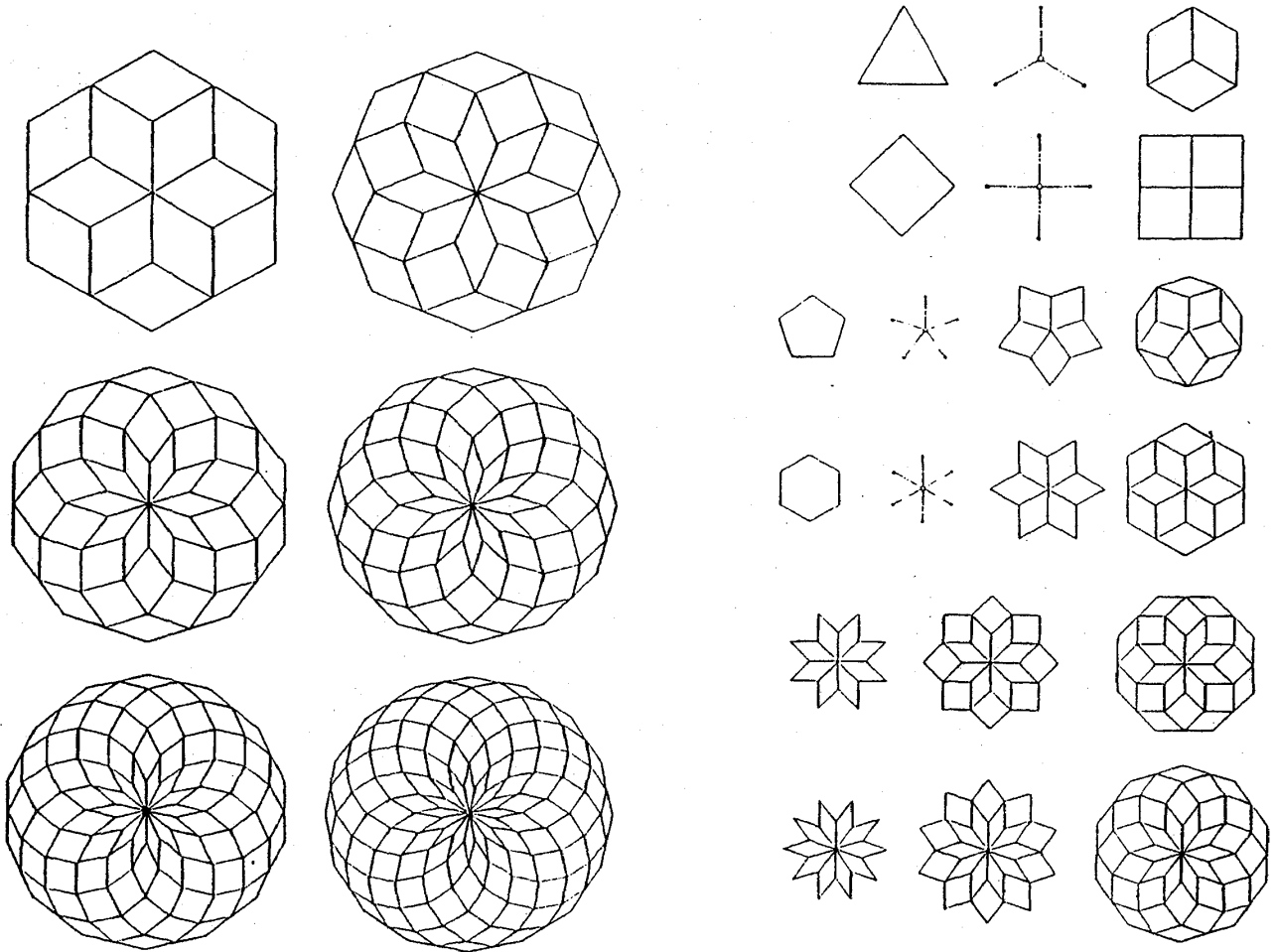


図3

図2 1辺が2の相似形

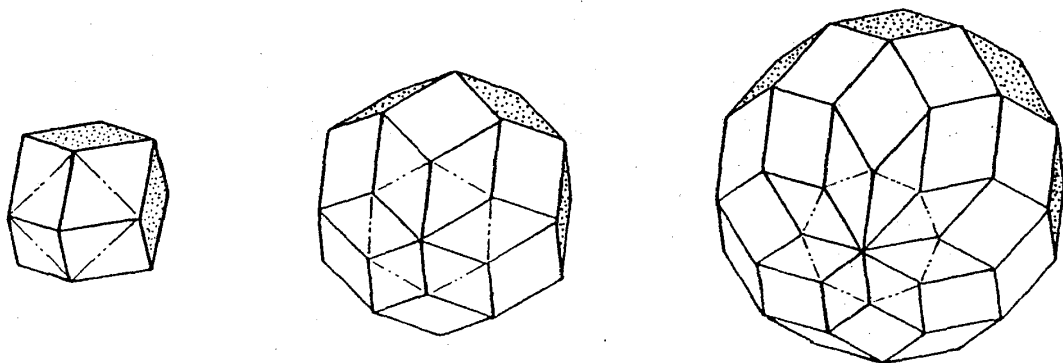


図4 線に退化した菱形を探す

これは元の正多角形が偶数であるため二つの頂点と中心点が一直線に並んでしまいベクトルの合成である菱形が直線に退化してしまったと考えられる。そこで直線に退化してしまった菱形が幾つあるのかを知るために中心点を少しずらしてみる(図4)。つまり中心を通る対角線の数だけ足りないことが判明した。

三次元での試み

正多角錐からゾーン多面体をつくる

二次元の正多角形からの場合と同様の操作を三次元でおこなうと、正多角錐の頂点から底面の多角形の頂点にむかうベクトルの合成になり、できるかたちはゾーン多面体になる。底面が n 角形の場合できあがるのはゾーン $n(n-1)$ 面体である。この中は平行6面体で充填するがその入り方は一様ではない、しかし数は決まっています。 $n=3$ のときゾーン6面体で平行6面体は1個、 $n=4$ のときゾーン12面体で6面体は4個、 $n=5$ のときゾーン20面体で6面体は10個、 $n=6$ のときゾーン30面体で6面体は20個、 $n=8$ のときゾーン56面体になり6面体の数は56個になる。

正多面体から菱面体をつくる

正多面体はその面を底面とする正多角錐に分割できる。正多面体の頂点の数の少ないほうから順に図示する。

正4面体は菱形12面体になる(図5)。

正8面体は一辺が2の立方体になる(図6)。

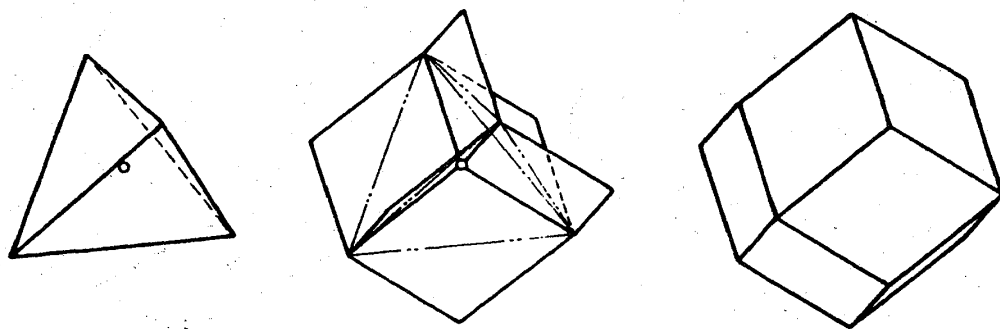


図5 正4面体から菱形12面体へ

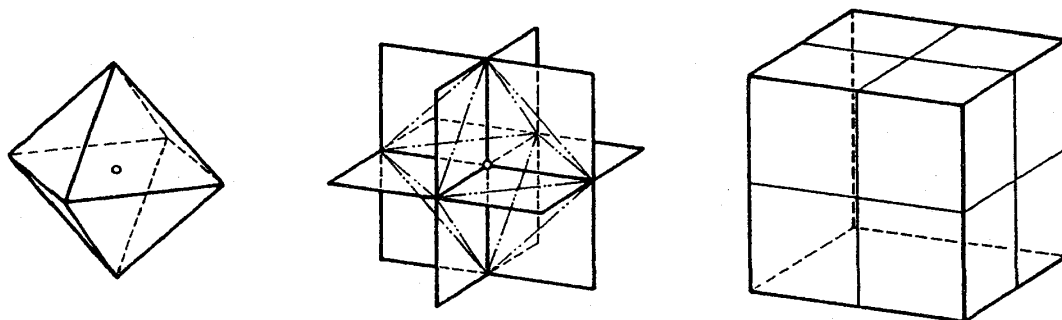


図6 正8面体から立方体へ

立方体は一辺が2の菱形12面体になる(図7)。この立方体の場合は6個の表面の正方形を底面とする4角錐が菱形12面体になり、三つの菱形12面体が合さる3回対称軸上の8個の凹部に菱形6面体が埋まって凸多面体になる。

正20面体からは一辺が2の菱形30面体ができる。(図8)

正20面体の表面の三角形から菱形6面体が20個出てきて(図8-1)花形12面体ができる。(図8-2) この5枚の花びらは5角錐からでてきたゾーン20面体の一部ともみられるので、思考と手間を省くためにどの

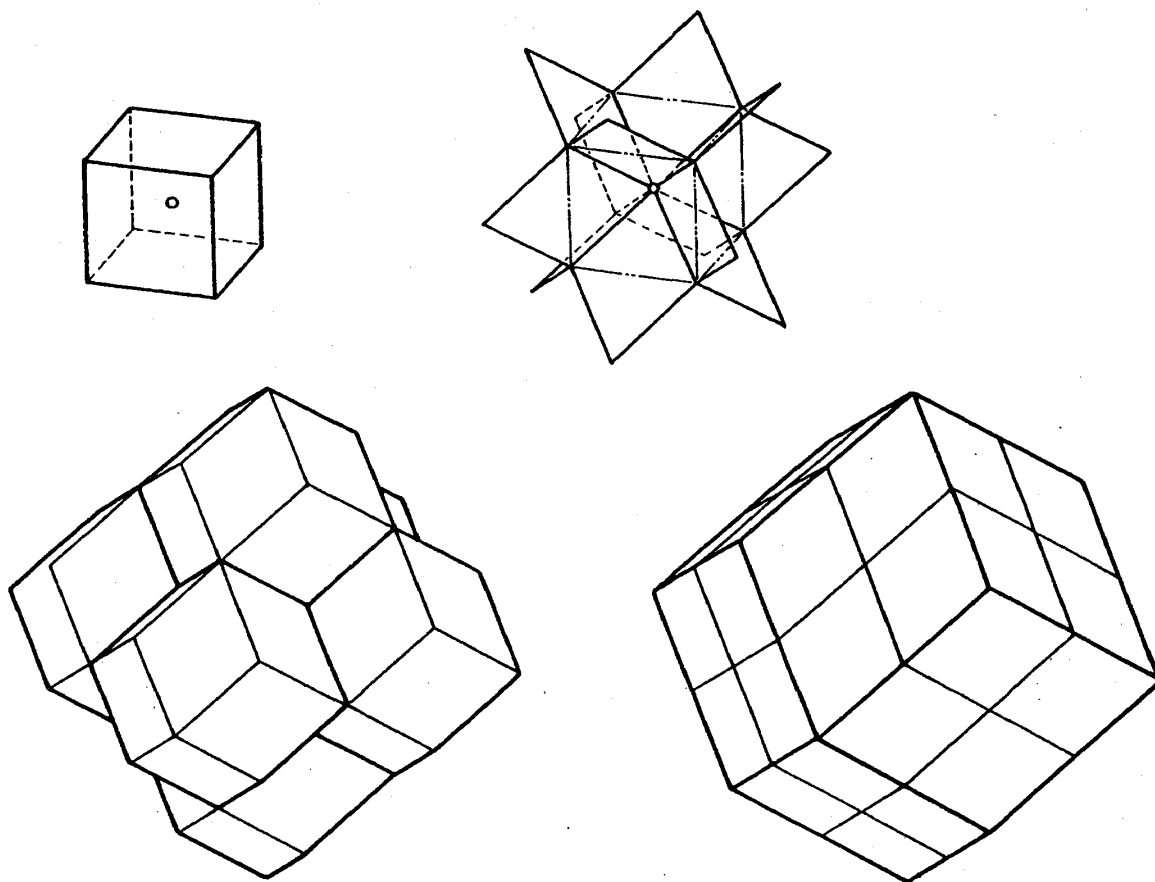


図7 立方体から菱形12面体へ

ように平行6面体が入っているかということは気にしないで、ゾーン20面体をのせる。このかたちは12個の菱形30面体がオーバーラップしてかたまっている様子に見える。(図8-3) 更に20個の凹部に菱形6面体を埋めて一辺が2の菱形30面体ができあがる。(図8-4)

正12面体からは一辺が2の菱形90面体ができる。(図9)

まずはじめに表面の5角形からゾーン20面体が出てくる。(図9-1) 3個のゾーン20面体に囲まれた凹みに菱形6面体がいる。この菱形6面体の表面は菱形12面体の表面と同じ菱形である。(図9-2) 次に2個の菱形6面体と2個のゾーン20面体とで囲まれた凹みに菱形12面体をの

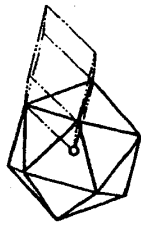


図8-1 正20面体

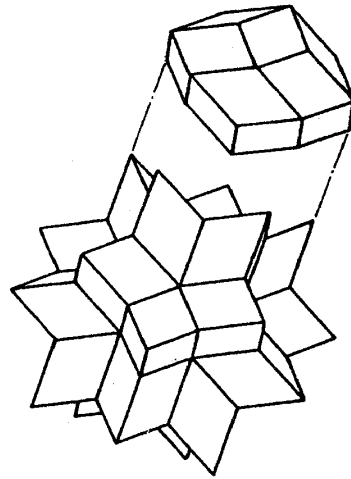


図8-2 花形12面体

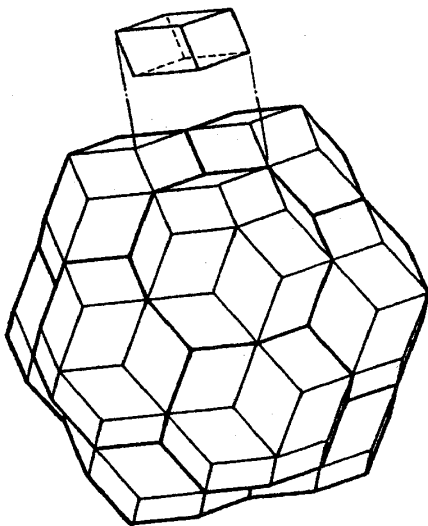


図8-3

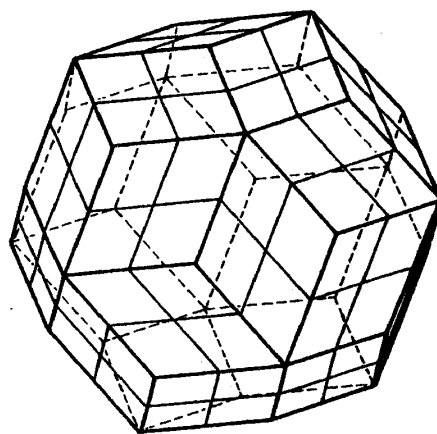


図8-4 一辺が2の菱形30面体

図8 正20面体から菱形30面体へ

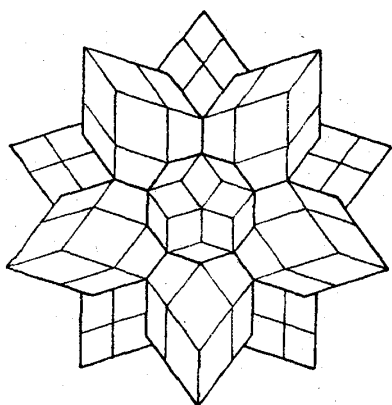


図 9 - 1

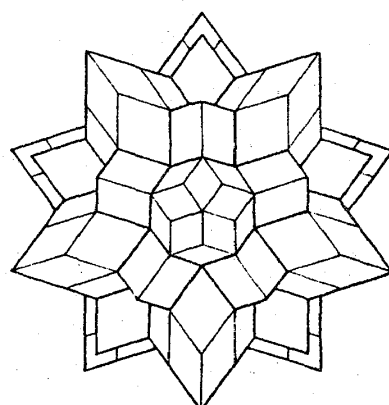


図 9 - 2

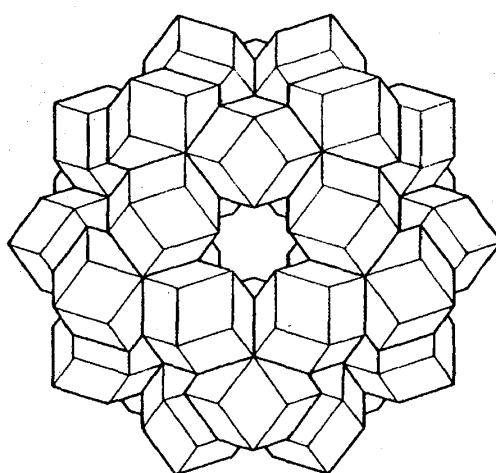


図 9 - 3 30 個の菱形 12 面体

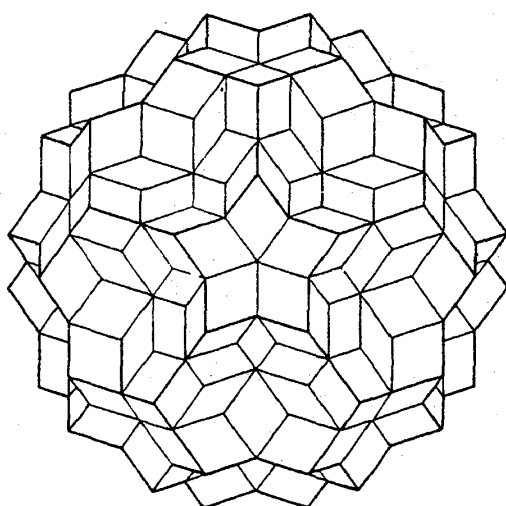


図 9 - 4 花形サッカーボール

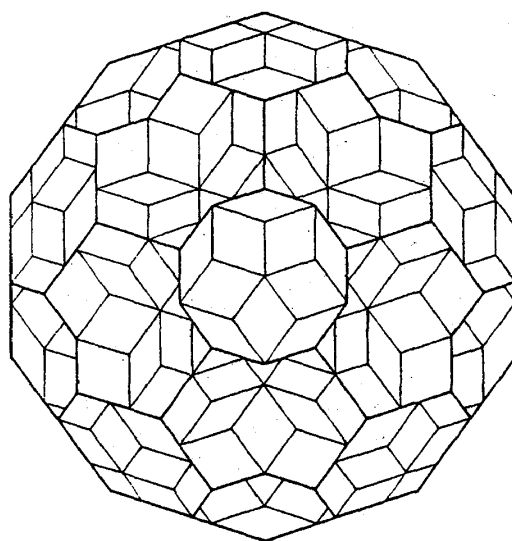


図 9 - 5 5 回対称軸の花に
ゾーン 20 面体を乗せる

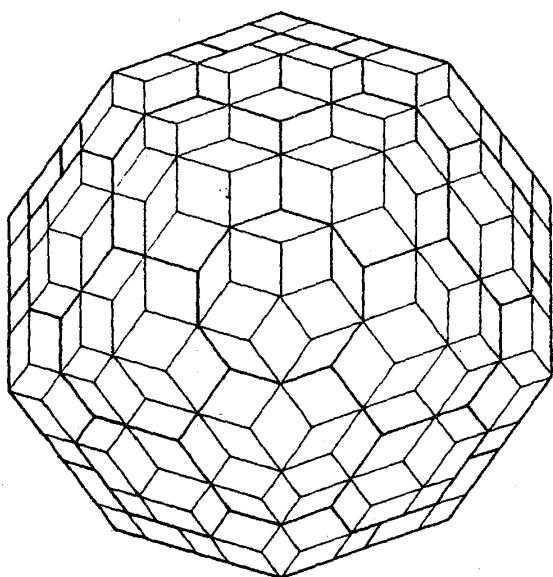


図 9-6 3 回対称軸の花に
ゾーン 30 面体を乗せる

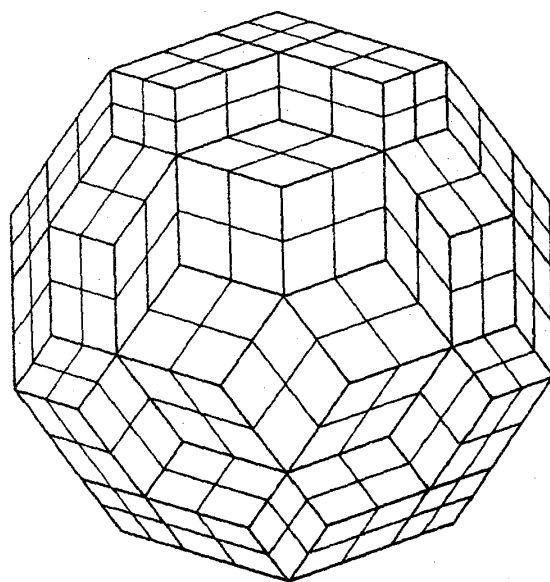


図 9-7 1 辺が 2 の菱形 90' 面体

図 9 正 12 面体から菱形 90 面体へ

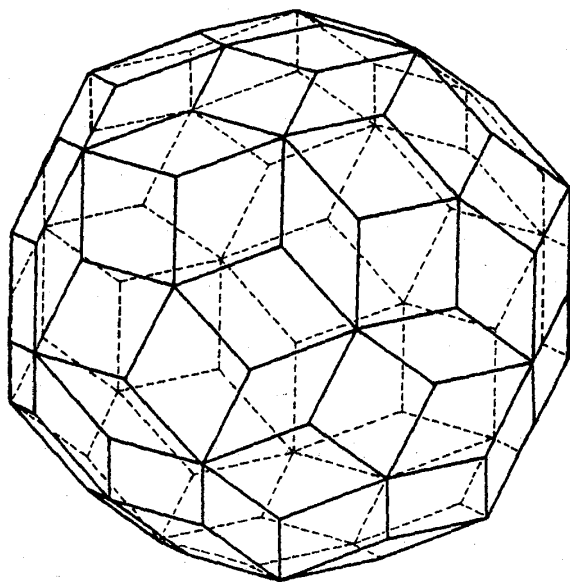


図 10 菱形 90 面体

せる。ここで面白いと思うのは菱形12面体の表面と同じ菱形でできた尖った6面体と菱形12面体をつなぐと(図9-3)のようになることで、はじめはマラルディ・アングルには黄金比が隠されていたのかと驚いた。さらに2種類の菱形6面体を加えると、花形32面体というよりも花形サッカーボールと呼ぶべきか、(図9-4)になる。5回対称軸上の花にはゾーン20面体をのせる。(図9-5) 3回対称軸上の花にはゾーン30面体をのせる。(図9-6) そしてゾーン20面体とつながった二つのゾーン30面体に囲まれた凹みに菱形6面体がいると一辺が2の菱形90面体ができる。(図9-7) 正12面体から菱形90面体への変化を5回対称軸上から見た図を載せたので解りにくい、(図10)は菱形90面体の斜視図である。

準正多面体から菱面体をつくる その1 (未完成)

正・準正多面体のなかにはの稜線を2等分したところで正多角錐を切り落としたタイプのものがある。この種の準正多面体には大きな特徴があり、多面体を一周した稜線または稜線と対角線でできる一平面上に多面体の中心があるのでゾーン多面体が退化して多角形になり、その多角形は表面に現われ別の正・準正多面体になる。表面に現われた多角形も、二次元で試みたときのように菱形が線に退化しているので、ベクトルの数から6面体の数を推定するのは難しい。

正4面体は角を落して正8面体になり、その中心から頂点へ向かうベクトルの合成は一辺が2の立方体になる。(図5・図6)

正8面体と立方体は角を落して立方8面体になり、その中心から頂点へ向かうベクトルの合成は一辺が2のケルビンの14面体になる。(図11) このケルビンの14面体の表面の6角形は3個の菱形に分けられるので、ここでは菱形30面体の一種と考えることにする。30面体ならば20個の菱形6面体に分けられるはずだが実際には16個しかない、これは6面体が平面に退化しているためである。

12面体と正20面体は角を落して12・20面体になり、その中心から頂点へ向かうベクトルの合成は一辺が2の切頭12・20面体になる。(図12)

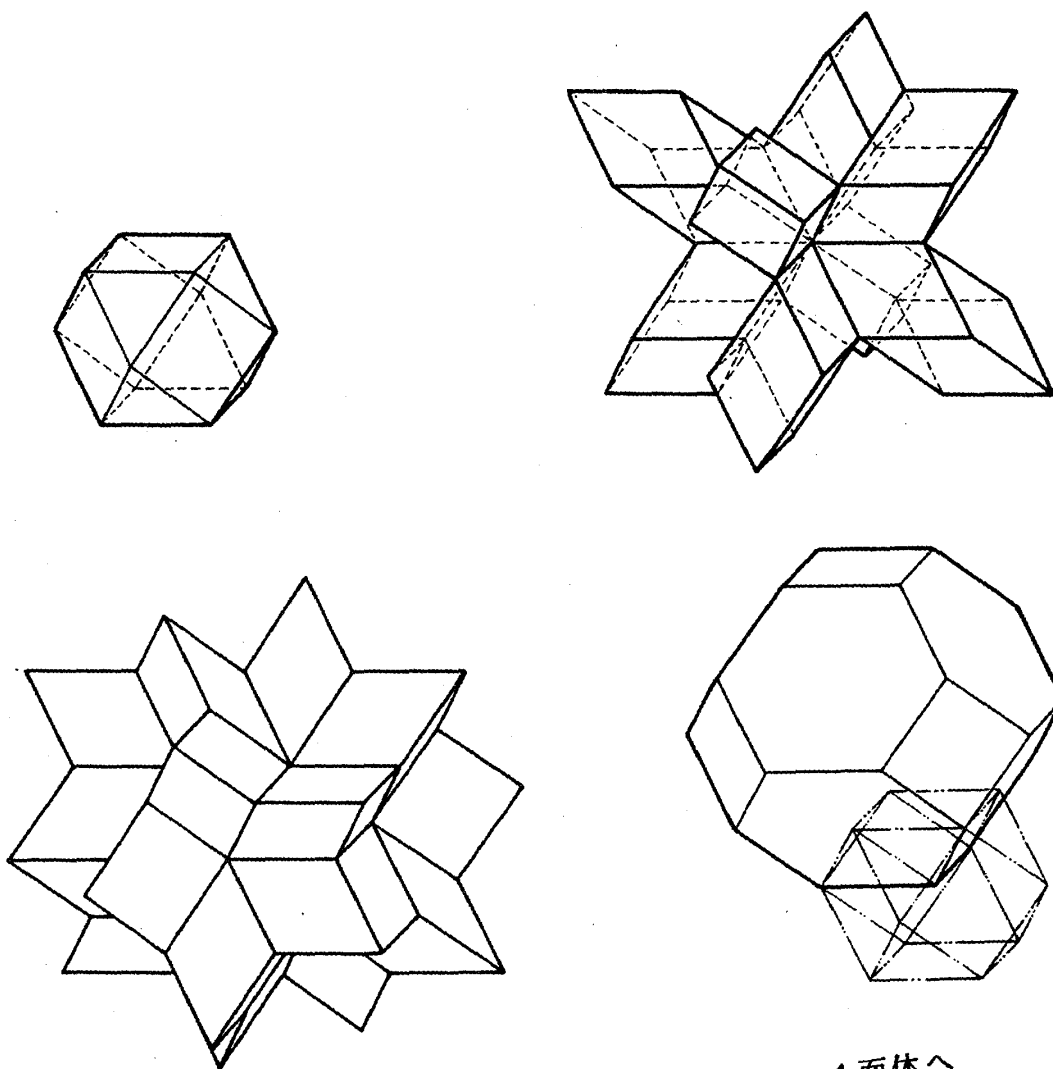
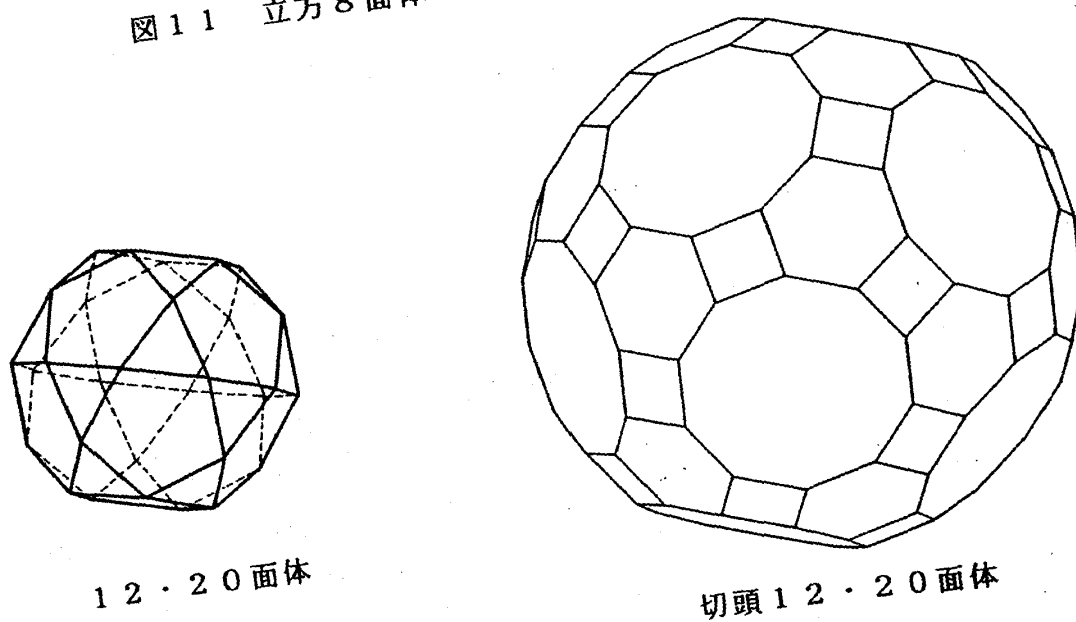


図11 立方8面体からケルビンの14面体へ



12・20面体

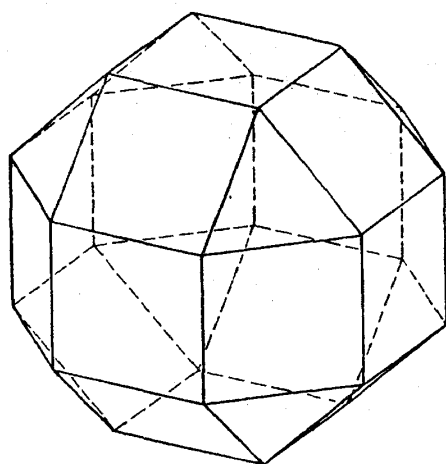
切頭12・20面体

図12 12・20面体から切頭12・20面体へ

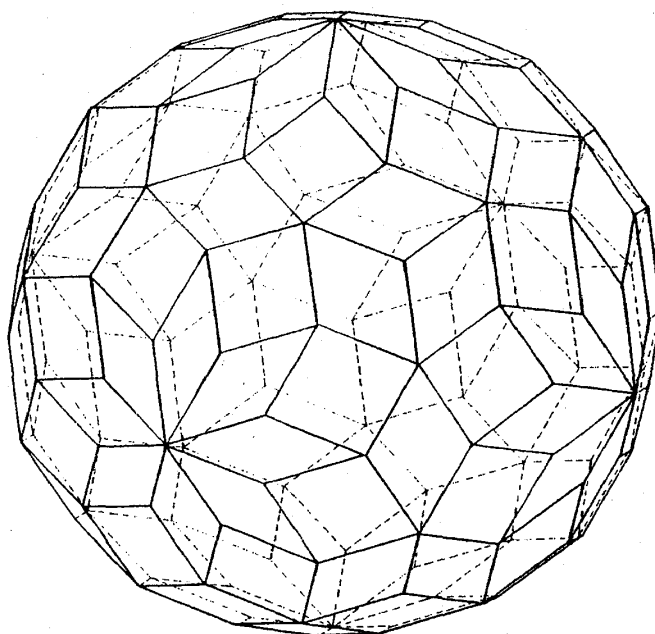
準正多面体から菱面体をつくる その2 (未完成)

菱形立方8面体からできる菱面体は菱形132面体である。(図13)

この菱形132面体は ${}_{12}C_3 = 220$ 個の菱形6面体がはいる。



菱形立方8面体



菱形132面体

図13 菱形立方8面体から菱形132面体へ

今回発表できるのはここまでで、次回があるかは分からない。しかし、方法が理解されれば目的は達した。この延長線には、(球面に無数の点を取り球の中心点から菱面を発生させれば、限りなく球に近い菱面体ができる。)とか、菱面体は $n(n-1)$ で表わされ、この (n) は次元の数であり、 n または $(n-1)$ が3の倍数ならば3回対称軸を持ち、5の倍数ならば5回対称軸を持つ。という私の独断的解釈がある。

討論 (DISCUSSION)

正・準正多面体と菱面体

別宮 利昭 (ユニーク・デザイン・スタジオ)

Q. 別宮さんの研究の方法について。

模型をまず作ってそれから研究を進めるのか、数値的な理論が先か。それとも直感が最初か。

細矢 治夫 (お茶大・理・化学)

A. 連想の繰り返しでネットワークを広げようとしています。パターン認識の一種かも知れませんが、AとBが似たものであれば、Aに見られる現象がBにはどのようなになっているかを考えますので推理の近いものです。

模型を作るのは他人に見せるためと、推理に自信が無いときにかぎります。失敗しても模型を作った経験はその後の推理に役立ちます。

Q. 1: 「育てる」という言葉の確認

2: 正12面体的に20本のベクトルの場合の花形12面体の場合のように対称性が良いと、その先の「育て方」は一義とは限らないように思われますが。

小川 泰 (筑波大・物理工)

A. 1: 最初に二つのベクトルの合成によってできた菱面は他の二つの菱面にそって平行移動し、平行6面体を作ります。凹部に平行6面体を次々に加えてゆくと新しくできた凹部は浅くなり、全体としては大きくなり最後に凸多面体になります。1986年のサイエンス 9月号にて花形12面体と名付けられたのを知り、“花が咲いたあとは実が成る”と思っていましたので「育てる」を使ってしまいました。

2: 例えば花形12面体の場合、菱形6面体をどのように加えてゆくかは一義ではありません。しかしどのように加えても、菱形6面体10個の集まりでできるゾーン20面体になってしまいます。そこで凹部に集まっている花びらが

3枚の場合	・・・	6面体
4	〃	・・・ ゾーン12面体
5	〃	・・・ ゾーン20面体
6	〃	・・・ ゾーン30面体
8	〃	・・・ ゾーン56面体

をのせて手間をはぶきます。