

古典的グラム・シュミット法の安定性解析とアダマール積

山本有作

電気通信大学 情報理工学研究科 情報・通信工学専攻 / JST-CREST

1 はじめに

$X \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) を列フルランクの行列とし, X を $X = QR$ ($Q \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$) と QR 分解することを考える. このようなタイプの QR 分解は, 最小 2 乗法, 特異値分解の前処理, ブロッククリロフ部分空間法における直交化など, 科学技術計算の様々な場面で現れる.

QR 分解のアルゴリズムは, 大きく分けて, 直交変換による上三角化と, 上三角行列による直交化に分けられる [1]. 前者は A に対して左から直交行列を掛けていくことにより, A を $m \times n$ の上三角行列に変形する方法であり, ギブンス法やハウスホルダー法が含まれる. 後者は A に対して右から上三角の列基本変形行列をかけていくことにより, A を $m \times n$ の列直交行列に変形する方法であり, 古典的グラム・シュミット法, 修正グラム・シュミット法, コレスキー QR 法などが含まれる.

QR 分解では, 直交性, すなわち計算で得られた $\hat{Q}$ に対する $\|\hat{Q}^T \hat{Q} - I_n\|_F$ (I_n は n 次単位行列, $\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルム) の大きさが問題となることが多い. ギブンス法やハウスホルダー法は無条件安定, すなわち $\|\hat{Q}^T \hat{Q} - I_n\|_F = O(u)$ (u は丸め誤差の単位) である. 一方, 上三角行列による直交化では, 直交性は一般に行列の条件数 $\kappa_2(X)$ に依存し, $\|\hat{Q}^T \hat{Q} - I_n\|_F$ に対する上界として, 古典的グラム・シュミット法では $O((\kappa_2(X))^{n-1}u)$ [2]¹, 修正グラム・シュミット法では $O(\kappa_2(X)u)$ [5], コレスキー QR 法では $O((\kappa_2(X))^2u)$ [6] が得られている. このうち, 修正グラム・シュミット法とコレスキー QR 法の上界はタイトであり, 数値実験でも上界と同様の振る舞いが見られるが, 古典的グラム・シュミット法では, 多くの入力行列について, 直交性は $O((\kappa_2(X))^2u)$ のような振る舞いを示す². すなわち, 古典的グラム・シュミット法では, 直交性に関して理論的な上界と実験結果との間に大きなギャップが存在する. 古典的グラム・シュミット法は広く使われている QR 分解手法であるから, このギャップを埋めようとする取り組みには意味があると考えられる.

そこで本報告では, 安定性解析がうまく行っているコレスキー QR 法の例を振り返り, 同様の方法で古典的グラム・シュミット法の解析を行うことを試みる. 特に, コレスキー QR 法ではアルゴリズムを基本行列演算の単位で記述することにより, 見通しの良い安定性解析が可能となっていることから, 同様の手法を古典的グラム・シュミット法にも適用する. その結果として, 古典的グラム・シュミット法における直交性の誤差が, 上三角因子 $\hat{R}$ に関するアダマール積 $\hat{R}^{-1} \circ \hat{R}^{-1}$ の最小特異値を含む式により押さえられることを示す. この後者の評価の困難さが, 安定性解析の困難さにつながっていると考えられる.

¹文献 [3] では $O((\kappa_2(X))^2u)$ という上界が与えられているが, これは誤りであり, 後に [4] で修正された. なお, [4] では上界が $O((\kappa_2(X))^2u)$ となる CGS-P 法が提案されているが, 本稿では従来の古典的グラム・シュミット法について考察する.

²たとえば文献 [6] の Fig. 4.1 を参照. ただし, $\|\hat{Q}^T \hat{Q} - I_n\|_F$ が $O((\kappa_2(X))^2)$ を大きく超える例も存在する [4].

2 コレスキー QR 法の安定性解析

本節では、古典的グラム・シュミット法の安定性解析を行う準備として、コレスキー QR 法の安定性解析を振り返る。コレスキー QR 法のアルゴリズムは次のように書ける。

$$A = X^T X, \quad (1)$$

$$R^T R = A, \quad (2)$$

$$Q = X R^{-1}. \quad (3)$$

ここで、式 (2) は対称正定値行列 A の上三角コレスキー因子 R を求める計算である。(1), (2) より、 $R^T R = X^T X$ が成り立つ。この式を使うと Q の直交性が次のように証明できる。

$$Q^T Q = (X R^{-1})^T (X R^{-1}) = R^{-T} X^T X R^{-1} = R^{-T} R^T R R^{-1} = I_n. \quad (4)$$

安定性解析を行うには、式 (1)~(3) に浮動小数点演算による誤差を導入し、その結果、式 (4) がどのように変わるかを見ればよい。浮動小数点演算により計算した行列をハットを付けて表すと、式 (1)~(3) は次のようになる。

$$\hat{A} = X^T X + E_1, \quad (5)$$

$$\hat{R}^T \hat{R} = \hat{A} + E_2, \quad (6)$$

$$\hat{Q} = (X + \Delta X) \hat{R}^{-1}. \quad (7)$$

ここで、 E_1 は行列乗算 $X^T X$ の前進誤差、 E_2 はコレスキー分解の後退誤差、 ΔX は前進消去 (3) の後退誤差である。基本行列演算に対する誤差解析の結果 [7] を使うと、これらの誤差は次のように評価できる [6]。

$$\|E_1\|_2 \leq 1.1mn\mathbf{u}\|X\|_2^2, \quad (8)$$

$$\|E_2\|_2 \leq \frac{\gamma_{n+1}n}{1 - \gamma_{n+1}n} \|\hat{A}\|_2, \quad (9)$$

$$\|\Delta X\|_F \leq \frac{\gamma_n \sqrt{n} \kappa_2(\hat{R})}{1 - \gamma_n \sqrt{n} \kappa_2(\hat{R})} \|X\|_F. \quad (10)$$

ただし、自然数 k に対して $\gamma_k = k\mathbf{u}/(1 - k\mathbf{u})$ とする。式 (5)~(7) を基に式 (4) と同様の式を導いてみると、 $\hat{R}^T \hat{R} = X^T X + E_1 + E_2$ であるから、

$$(X \hat{R}^{-1})^T (X \hat{R}^{-1}) = \hat{R}^{-T} (\hat{R}^T \hat{R} - E_1 - E_2) \hat{R}^{-1} = I_n - \hat{R}^{-T} (E_1 + E_2) \hat{R}^{-1}. \quad (11)$$

したがって、

$$\|(X \hat{R}^{-1})^T (X \hat{R}^{-1}) - I_n\|_2 \leq (\sigma_n(\hat{R}))^{-2} (\|E_1\|_2 + \|E_2\|_2) = O((\kappa_2(X))^2 \mathbf{u}). \quad (12)$$

となり、 $X \hat{R}^{-1}$ の直交性からのずれは $O((\kappa_2(X))^2 \mathbf{u})$ であることがわかる。最終的に求めたいのは、 $\hat{Q} = (X + \Delta X) \hat{R}^{-1}$ の直交性からのずれであるが、これは、評価式 (10) を使って計算すると、やはり $O((\kappa_2(X))^2 \mathbf{u})$ であることが示せて、安定性解析が完了する。

以上を振り返ると、コレスキー QR 法の安定性解析は次の手順で行えることがわかる。

- (i) 対象とするアルゴリズムを行列の関係式として記述する.
 - (ii) それらの関係式から, $Q^T Q - I_n = O$ という式を導く.
 - (iii) 上記 (i) の関係式に丸め誤差を導入した関係式を記述する.
 - (iv) 上記 (i) から (ii) を導いたのと同様にして, (iii) より, $\|\hat{Q}^T \hat{Q} - I_n\|$ の値を評価する.
- この方式では, アルゴリズムを構成する漸化式のそれぞれに対して丸め誤差を考慮する標準的なやり方と比べて, 基本行列演算に対する既存の誤差解析結果を用いて安定性を見通し良く解析できるという利点がある.

3 古典的グラム・シュミット法の場合

3.1 アルゴリズムの行列による表現

古典的グラム・シュミット法のアルゴリズムを以下に示す.

[Algorithm 1: 古典的グラム・シュミット法]

1. **do** $j = 1, n$
2. $\mathbf{v} = \mathbf{x}_j$
3. **do** $i = 1, j - 1$
4. $r_{ij} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{x}_j$
5. $\mathbf{v} := \mathbf{v} - r_{ij} \mathbf{q}_i$
6. **end do**
7. $r_{jj} = \|\mathbf{v}\|_2$
8. $\mathbf{q}_j = \mathbf{v} / r_{jj}$
9. **end do**

このアルゴリズムに対して前節の安定性解析手法を適用する際の問題点は, アルゴリズムが行列の関係式としては書かれておらず, 漸化式の形になっていることである. これに対してそのまま安定性解析を行おうとすると, 各式に対して誤差を導入した式を書き下した上で, 漸化式による誤差の伝搬を追っていく必要があり, 見通しが悪くなってしまう.

そこで, まずアルゴリズムを行列の関係式として書き直す. 以下, 上三角因子を $R = D + U$ (D : 対角部分, U : 狭義上三角部分) とおき, 行列の狭義上三角部分を $\text{striu}(\cdot)$ で表すことにする. すると, アルゴリズムの第4行目は (i, j が動くことを考えると) U が Q^T と X の積 (の狭義上三角部分) であるという式になる. 第5行目の式は, i に関するループをまとめて書き, 第7行目より最終的な $\mathbf{v}$ が $\mathbf{q}_j$ の r_{jj} 倍であることに注意すると,

$$r_{jj} \mathbf{q}_j = \mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} \mathbf{q}_i \quad (13)$$

となる. これを j について並べると行列の式となる. 残りは第8行目の式であり, これは, $Q^T Q$ の対角要素が1に等しいという式になる. 以上をまとめると, 古典的グラム・シュ

ミット法のアルゴリズムは行列を用いて次のように記述できる.

$$U = \text{striu}(Q^\top X), \quad (14)$$

$$QD = X - QU, \quad (15)$$

$$\text{diag}(Q^\top Q) = I_n. \quad (16)$$

この行列表現と、コレスキーQR法の行列表現との違いは2つある. 1つは, 式(14)~(16)はそのまま計算できる形にはなっていないことである. 実際, 式(14)では Q を用いて U が定義されており, 式(15)では U を用いて Q が定義されているので, これらは再帰的な式になっている. 計算を行うには, まず式(14)の右辺第1列より U の第1列を計算し³, 次に式(15)の右辺第1列より Q の第1列を定数倍を除いて計算し, 次に式(16)の第1列より Q を規格化して同時に D の(1,1)要素 r_{11} を求める, というように, 式(14), (15), (16)を順番に繰り返し使う必要がある. 式(14), (15), (16)はこのような繰り返し計算を行列表記を用いて簡潔にまとめたものである. もう1つの違いは, コレスキーQR法の場合と異なり, アルゴリズムが行列の加算, 乗算, コレスキー分解などの基本行列演算のみでは記述できず, striu , diag など, 行列の一部を取り出す演算が必要なことである. 以下に見るように, 安定性解析においては, 後者の特徴が解析を難しくする.

3.2 $Q^\top Q - I_n = O$ の導出

次に, 安定性解析の準備として, 式(14), (15), (16)から $Q^\top Q - I_n = O$ を導く. まず, 式(15)より $X = Q(D + U) = QR$ だから,

$$Q^\top QR = Q^\top X, \quad (17)$$

$$\text{striu}(Q^\top QR) = \text{striu}(Q^\top X) = U = \text{striu}(R). \quad (18)$$

さて, $Q^\top Q$ の対角要素は1だから, ある狭義下三角行列 V が存在して,

$$Q^\top Q = V + I_n + V^\top. \quad (19)$$

これを式(18)の左辺に代入すると,

$$\text{striu}((V + I_n + V^\top)R) = \text{striu}(R), \quad (20)$$

すなわち,

$$\text{striu}((V + V^\top)R) = O. \quad (21)$$

これは, ある広義下三角行列 L が存在して,

$$(V + V^\top)R = L \quad (22)$$

と書けることを意味する. 式(22)に左から $R^\top$ をかけると,

$$R^\top(V + V^\top)R = R^\top L. \quad (23)$$

³右辺の striu より, 右辺第1列の計算には Q は不要なことに注意.

ここで、左辺は対称行列、右辺は広義下三角行列だから、右辺は対角行列でなければならない。したがって、ある対角行列 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ が存在して、

$$R^T(V + V^T)R = \Lambda. \quad (24)$$

$S = R^{-1}$ とおくと、

$$V + V^T = S^T \Lambda S. \quad (25)$$

ここで、左辺の対角要素が 0 であることに注意し、第 (i, i) 成分を抜き出した式を書くと、

$$0 = \sum_{j=1}^i s_{ji}^2 \lambda_j \quad (i = 1, \dots, n). \quad (26)$$

これはベクトル $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ に関する連立 1 次方程式である。行列の**アダマール積** (要素ごとの積) $A \circ A = (a_{ij}^2)$ を使うと、この連立 1 次方程式は次のように書ける。

$$(S \circ S)^T \lambda = \mathbf{0}. \quad (27)$$

いま X はフルランクとしているから、行列 R は正則であり、その逆行列 S も正則である。したがって S の対角要素は非ゼロであるから、 $S \circ S$ の対角要素も非ゼロであり、 $S \circ S$ は正則となる。そこで式 (27) より、

$$\lambda = \mathbf{0} \quad (28)$$

が得られる。これより $\Lambda = O$ となり、式 (25) より $V = O$ となる。したがって、式 (19) より $Q^T Q - I_n = O$ が結論される。

以上が行列表現された古典的グラム・シュミット法に対する Q の直交性の証明である。コレスキー QR 法の場合と比べると、行列のアダマール積が出てくるのが特徴的である。

3.3 誤差がある場合の行列表現

式 (14), (15), (16) に浮動小数点演算による誤差を導入すると次のようになる⁴。

$$\hat{U} = \text{striu}(\hat{Q}^T X) + E_1, \quad (29)$$

$$\hat{Q} \hat{D} = X - \hat{Q} \hat{U} + E_2, \quad (30)$$

$$\text{diag}(\hat{Q}^T \hat{Q}) = I_n + E_3. \quad (31)$$

ただし、 E_1 は行列乗算 $\text{striu}(\hat{Q}^T X)$ の誤差で $n \times n$ 狭義上三角行列、 E_2 は $X - \hat{Q} \hat{U}$ の誤差で $m \times n$ 密行列、 E_3 は規格化の誤差で n 次対角行列である。 $\|\hat{Q}\| = O(1)$ ⁵、 $\|\hat{U}\| = O(\|X\|)$ に注意し、基本行列演算の誤差解析の結果 [7] を使うと、各誤差は次のように評価できる。

$$\|E_1\| = O(\|X\| \mathbf{u}), \quad (32)$$

$$\|E_2\| = O(\|X\| \mathbf{u}), \quad (33)$$

$$\|E_3\| = O(\mathbf{u}). \quad (34)$$

⁴ アルゴリズム中で式 (29), (30) のような行列乗算を一度に行うわけではないが、各ステップでの内積や AXPY 演算の誤差をまとめてみると、行列乗算の誤差として書ける。元々行列乗算の誤差解析自体、個々の内積に対する誤差解析をまとめたものである。

⁵ 以下の誤差解析では、簡単のため、 m, n の多項式は定数と見なす。また、2 ノルムとフロベニウスノルムなど、よく使われる行列ノルムには高々 m, n の多項式倍の違いしかないことから、以下では行列ノルムの指定を省略する。

3.4 誤差がある場合の $\|\hat{Q}^\top \hat{Q} - I_n\|$ の評価

式 (29)～(34) に基づき $\|\hat{Q}^\top \hat{Q} - I_n\|$ を評価する．まず，式 (30) より $\hat{Q}\hat{R} = X + E_2$ だから，

$$\hat{Q}^\top \hat{Q}\hat{R} = \hat{Q}^\top X + \hat{Q}^\top E_2, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{striu}(\hat{Q}^\top \hat{Q}\hat{R}) &= \text{striu}(\hat{Q}^\top X) + \text{striu}(\hat{Q}^\top E_2) \\ &= \hat{U} - E_1 + \text{striu}(\hat{Q}^\top E_2) \\ &= \text{striu}(\hat{R}) - E_1 + \text{striu}(\hat{Q}^\top E_2). \end{aligned} \quad (36)$$

一方，式 (31) より，ある狭義下三角行列 V が存在して，

$$\hat{Q}^\top \hat{Q} = V + I_n + V^\top + E_3. \quad (37)$$

これを式 (36) の左辺に代入すると，

$$\text{striu}((V + I_n + V^\top)\hat{R}) + \text{striu}(E_3\hat{R}) = \text{striu}(\hat{R}) - E_1 + \text{striu}(\hat{Q}^\top E_2), \quad (38)$$

すなわち，

$$\text{striu}((V + V^\top)\hat{R}) = -E_1 + \text{striu}(\hat{Q}^\top E_2) - \text{striu}(E_3\hat{R}). \quad (39)$$

これは，ある広義下三角行列 L が存在して，

$$(V + V^\top)\hat{R} = L + \text{striu}(-E_1 + \hat{Q}^\top E_2 - E_3\hat{R}) \quad (40)$$

と書けることを意味する．ただし， E_1 は狭義上三角行列であるから， striu の中に入れた．式 (40) に左から $\hat{R}^\top$ をかけると，

$$\hat{R}^\top (V + V^\top)\hat{R} = \hat{R}^\top L + \hat{R}^\top \text{striu}(-E_1 + \hat{Q}^\top E_2 - E_3\hat{R}). \quad (41)$$

ここで，左辺は対称行列であり，右辺第 1 項は広義下三角行列である．また，式 (32)～(34) より右辺第 2 項は $O(\|X\|^2 \mathbf{u})$ である．したがって対称性より，右辺の狭義下三角部分も $O(\|X\|^2 \mathbf{u})$ でなければならない．よって，ある対角行列 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ および対角要素が 0 の行列 E_4 (ただし $\|E_4\| = O(\|X\|^2 \mathbf{u})$) が存在して，

$$\hat{R}^\top (V + V^\top)\hat{R} = \Lambda + E_4. \quad (42)$$

$\hat{S} = \hat{R}^{-1}$ とおくと，

$$V + V^\top = \hat{S}^\top (\Lambda + E_4) \hat{S}. \quad (43)$$

ここで，左辺の対角要素は 0 だから，右辺もそうであり，

$$\text{diag}(\hat{S}^\top \Lambda \hat{S}) = -\text{diag}(\hat{S}^\top E_4 \hat{S}). \quad (44)$$

ここで， $\|\hat{S}\| = \|\hat{R}^{-1}\| \simeq (\sigma_n(X))^{-1}$ ($\sigma_n(X)$ は X の最小特異値) であるから，右辺は $O((\kappa_2(X))^2 \mathbf{u})$ である．よって， $\mathbf{e}_5$ を $\|\mathbf{e}_5\| = O((\kappa_2(X))^2 \mathbf{u})$ なるベクトルとして，次の式が成り立つ．

$$(\hat{S} \circ \hat{S})^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e}_5. \quad (45)$$

これより,

$$\boldsymbol{\lambda} = (\hat{S} \circ \hat{S})^{-\top} \mathbf{e}_5 = O((\kappa_2(X))^2 (\sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S}))^{-1} \mathbf{u}) \quad (46)$$

が得られる. したがって,

$$\Lambda = O((\kappa_2(X))^2 (\sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S}))^{-1} \mathbf{u}). \quad (47)$$

これを式 (43) に代入すると,

$$\begin{aligned} V + V^\top &= \hat{S}^\top (\Lambda + E_4) \hat{S} \\ &= O(\|\hat{S}\|^2) \cdot O((\kappa_2(X))^2 (\sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S}))^{-1} \mathbf{u} + \|X\|^2 \mathbf{u}) \\ &= O\left((\kappa_2(X))^4 \cdot \frac{(\sigma_n(\hat{S}))^2}{\sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S})} \mathbf{u}\right) + O((\kappa_2(X))^2 \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (48)$$

ただし, 最後の等号では $\|\hat{S}\| = (\sigma_n(X))^{-1}$ を用いた. 最後にこれを式 (37) に代入し, E_3 が $O(\mathbf{u})$ で無視できることを使うと, 次の評価が得られる.

$$\|\hat{Q}^\top \hat{Q} - I_n\| = O\left((\kappa_2(X))^4 \cdot \frac{(\sigma_n(\hat{S}))^2}{\sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S})} \mathbf{u}\right) + O((\kappa_2(X))^2 \mathbf{u}). \quad (49)$$

この結果は, 浮動小数点演算による古典的グラム・シュミット法で得られる $\hat{Q}$ の直交性には, $\hat{S} = \hat{R}^{-1}$ の最小特異値の 2 乗と, アダマール積により定義される行列 $\hat{S} \circ \hat{S}$ の最小特異値との比が関わっていることを示す. この比を入力行列 X の何らかの関数として押さえることができれば $\|\hat{Q}^\top \hat{Q} - I_n\|$ に対する新しい事前誤差評価式が得られるが, アダマール積により定義される行列の最小特異値の下界については, 文献を調べた限り, ほとんど知見がないようである⁶. この比を理論的に押さえることの難しさが, 古典的グラム・シュミット法の安定性解析の難しさにつながっているのではないかと考えられる.

4 数値実験

比 $(\sigma_n(\hat{S}))^2 / \sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S})$ を理論的に評価することは難しいため, 数値実験により, この比が入力行列の条件数とどのような関係にあるかを調べた. 入力行列 X は, サイズを 500×50 とし, 条件数 $\kappa_2(X)$ を 1 から 10^7 まで変えてランダムに生成した. このときの $\kappa_2(X)$ と $(\sigma_n(\hat{S}))^2 / \sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S})$ との関係を図 1 に示す. 特徴的な相関のパターンが見られるが, $(\sigma_n(\hat{S}))^2 / \sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S})$ を $\kappa_2(X)$ の関数として押さえるのは難しいように思われる.

5 おわりに

本報告では, 古典的グラム・シュミット法における直交行列因子の直交性について, 新しい誤差上界を導出することを目的として解析を行った. アルゴリズムを行列で表現し, 既存の基本行列演算に対する誤差評価結果を用いることで, 新しい上界を得ることがで

⁶アダマール積により定義される行列の最大特異値の上界については, 数多くの研究がある [8].

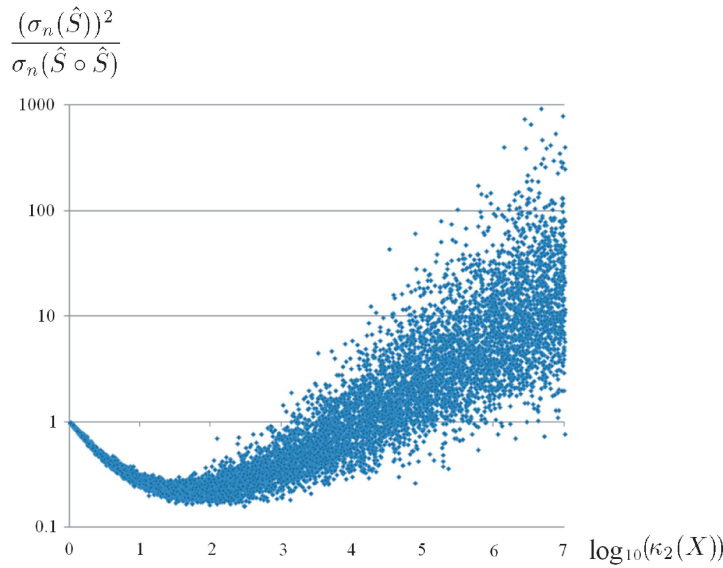


Figure 1: Correlation between $\kappa_2(X)$ and $(\sigma_n(\hat{S}))^2/\sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S})$.

きたが、この上界には上三角因子の逆行列 $\hat{S} = \hat{R}^{-1}$ に関するアダマール積の最小特異値 $\sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S})$ が含まれており、事前誤差評価の形にはなっていない。そのため、従来知られている最良の上界 $O((\kappa_2(X))^{n-1}\mathbf{u})$ に比べて改良できているかどうかは不明である。今後の課題としては、 $\sigma_n(\hat{S} \circ \hat{S})$ に対して確率的評価を行うなどの方法により、より良い上界を得ることが挙げられる。

References

- [1] L. N. Trefethen and D. Bau III: *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [2] A. Kielbasínski, H. Schwetlick: *Numerische lineare Algebra. Eine computerorientierte Einführung* (In German). Mathematik für Naturwissenschaft und Technik 18. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988.
- [3] L. Giraud, J. Langou, M. Rozložnik, J. Van Den Eshof: Rounding error analysis of the classical Gram-Schmidt orthogonalization process. *Numerische Mathematik*, Vol. 101, No. 1, pp. 87–100 (2005).
- [4] A. Smoktunowicz, J. L. Barlow and J. Langou: A note on the error analysis of classical Gram-Schmidt, *Numerische Mathematik*, Vol. 105, pp. 299–313 (2006).
- [5] A. Björck: *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [6] Y. Yamamoto, Y. Nakatsukasa, Y. Yanagisawa, and T. Fukaya: Roundoff error analysis of the CholeskyQR2 algorithm, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Vol. 44, pp. 306–326 (2015).
- [7] N. J. Higham: *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, 2nd Edition, SIAM, Philadelphia, 2002.
- [8] R. A. Horn and C. R. Johnson: *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1994.