

パラメトリック振子における周期定常状態の パラメータ依存性に関する実験的検討

奥 拓郎[†] 横井 裕一^{††} 引原 隆士^{†††}

^{†††} 京都大学大学院 工学研究科 電気工学専攻

〒 615-8510 京都市西京区京都大学桂

^{††} 長崎大学大学院 工学研究科

〒 852-8131 長崎市文京町 1-14

E-mail: [†]oku@dove.kuee.kyoto-u.ac.jp, ^{††}yyokoi@nagasaki-u.ac.jp, ^{†††}hikihara@kuee.kyoto-u.ac.jp

あらまし 本研究では非線形素子であるパラメトリック振子のエネルギー・スカベンジングへの適用可能性について数値, 実験的に検証を行っている。パラメトリック振子に現れる現象の中で, 「振動」「回転」の2種類の周期定常状態に着目し, これらの運動がエネルギー回収を定常的に実現可能であることを数値的に説明する。特に, エネルギー・スカベンジング応用の点で周期回転は有用であるという特性から, 振動発生機に機械振子装置を結合した実験系において, 周期回転の動作検証を行う。さらに, 単一周波数の励振という条件を拡張し, 周波数の異なる波の合成波で機械振子を励振した場合にどのような振る舞いをするかについて実験的に検討する。

キーワード 波エネルギー, パラメトリック振子, エネルギー・スカベンジング, 周期定常状態, 分岐現象, 合成波

Experimental study on excitation parameters of parametric pendulum for periodic states.

Takurou OKU[†], Yuuichi YOKOI^{††}, and Takashi HIKIHARA^{†††}

^{†††} Kyoto University, Department of Electrical Engineering

Katsura, Nishikyo, Kyoto, 615-8510 Japan

^{††} Nagasaki University, Department of Engineering

Bunkyo-machi 1-14, Nagasaki, 852-8131 Japan

E-mail: [†]oku@dove.kuee.kyoto-u.ac.jp, ^{††}yyokoi@nagasaki-u.ac.jp, ^{†††}hikihara@kuee.kyoto-u.ac.jp

Abstract In this research, we investigate a parametrically excited pendulum to scavenge energy from wave power of the ocean. The periodic oscillation and rotation in the parametrically excited pendulum can be constantly-available to extract the dynamical wave energy from the vertical vibration. Mechanical pendulum is arranged to attach on vibration excitor to simulate the behavior of the parametric pendulum. This paper examines the two type behavior: periodic oscillations and periodic rotations. First, we show that the two type motion appears depending on excitation parameters by bifurcation analysis. Secondly, the periodic rotation is examined the possibility of application to scavenge the dynamical energy from the vertical vibration. However, if the frequency band become broad, another frequency element disturbs the stability of the periodic rotations because the scavenging motion targets the specific frequency. In this report, we examine how the possible behavior for scavenging energy in the mechanical pendulum system with mixed excitation.

Key words wave energy, parametrically excited pendulum, energy scavenging, periodic states, bifurcation, synthetic wave

1. はじめに

地球表面の 70 パーセントは海であり、全体の波パワーは概算で約 5TW と莫大なポテンシャルを有していることが知られている [1]. 特に、1973 年の中東戦争に伴う石油ショック以来、海洋のエネルギーを利用しようとする技術開発が世界的に進行した。しかし、経済性が低いとして商用電力としての実用化には至っておらず、近年になって漸くイギリス、ポルトガルで 500KW 級規模の実用試験が実施されはじめた。波力エネルギーを対象としたシステム開発がゆっくりと進行していることの背景には、他の再生可能エネルギー同様、入力が低密度で非定常性が強いことに原因がある [2]. したがって、この分野においてシステムの提案を行う際にまず満たすべき要件は、入力の非定常性、波動性の影響を十分に考慮した定常的な出力を保証するシステム設計がなされていることである。

一方で、近年のエネルギー有効利用の必要性から、今まで注目されていなかった、もしくは不要なものともみなされてきた未利用エネルギーを掻き集め、利用するエネルギー・スカベンジング技術の重要性が増している [3]. これらの背景から、波力パワーを対象としたシステム開発は極めて重要であるが、波力発電システムはその出力の低さから単独で独立したシステムとして成立させるには困難がある。すなわち、既存の系統や他の分散型電源と協調していくために、出力（パワー）の品質要件を満たすことが波力エネルギーのスカベンジングにおける課題である。

波力はほとんどが海上を吹く風力によって起こされた波で、風力エネルギーと比較するとスペクトルの変動が穏やかで、高密度のエネルギーに変換されている。この特徴を利用し、波と振子との共振を実現し定常的な動作を保証できれば、所望のスペクトルに対するエネルギーを収集することができ、品質基準を満たす出力が期待できる。また従来の波力発電システムと比べ、電源に要求される機能を多く持ち、蓄電要素や電力変換回路などの変換過程が少なくすむことからコスト面、効率面の要請にも応えられる可能性がある。

本稿が提案するシステムはパラメトリック振子と呼ばれ、周期性のある外部からの振動を振子の回転軸部に鉛直方向に投入したときの動作をモデル化したもので、周期回転 [4] の他に、静止、周期振動、非周期的な運動といった多くの運動形態があることが知られている [5], [6]. 中でも周期回転は、ある特定の周波数への共振によるエネルギー変換であるため、効率よく波からエネルギーを吸収することが可能で、エネルギー・スカベンジング応用の観点から有用な運動形態である。しかし、基本波励振においてはそれが成り立ったとしても、実際の波力のスペクトル構造の特徴を考慮した場合に振子の回転が定常的に維持されるかについては十分な研究がなされていないと考えられる。

波力スペクトルは数 Hz オーダー付近に集中して連続的に分散しているので、本稿は、サンプルとしてこの周波数帯に含まれる 5.0Hz を基本波として扱い、その時の機械振子の励振パラメータ依存性と基本波とわずかに異なる周波数成分を付加した

波の影響で機械振子の振る舞いにどのような変化が現れるかについて検討する。まず、パラメトリック振子の数理モデルおよび、振動、回転という 2 つの周期定常状態を説明する。次に、その 2 種類の周期定常状態の励振パラメータに関する状態図を示し、モデル式における振子の振る舞いを明らかにする。最後に、実際に作製した機械振子装置を単一周波数で励振した場合および別の周波数成分を含む合成波で励振した場合の振る舞いを比較し、波の合成に伴うシステムの定性的な性質に現れる影響について検討する。

2. パラメトリック振子と周期定常状態の分岐

2.1 数理モデル - パラメトリック振子 -

図 1 に鉛直方向に励振される振子を示す。振子は質量 m のもとりと長さ l の支持部から構成される。振子の位置は、鉛直下方向からの振子の角度 $\theta(\tau)$ と定義し、粘性減衰が振子の挙動に及ぶものとする。回転軸の鉛直変位 $z(t)$ は、 $z(t) = A \cos \Omega_1 t$ で正弦波的に励振される。ここで、 A は励振の振幅を、 Ω は励振の角周波数を示している。これらから、鉛直方向に励振された振子の運動は、以下のような常微分方程式で記述される。

$$m l^2 \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + c l \frac{d\theta}{d\tau} + m l \left(g - \frac{d^2 z}{d\tau^2} \right) \sin \theta = 0 \quad (1)$$

ここで、 γ は粘性係数、 g は重力加速度を示す。固有振動数 $\Omega_0 = \sqrt{g/l}$ を用いて、 $\tau = \Omega_0 t$ でスケールリングすると、式 1 の運動方程式は以下のような無次元の常微分方程式に変形される。

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \omega \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= -\gamma \omega - (1 + p \cos \Omega \tau) \sin \theta \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 γ , p , Ω はそれぞれ粘性係数、励振振幅、励振周波数に関する無次元パラメータで以下のように定義される。

$$\gamma = \frac{c \Omega_0}{m g}, \quad p = \frac{\Omega_1^2 A}{g}, \quad \Omega = \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \quad (3)$$

このような微分方程式における係数が時間に関して周期的に変化するシステムはパラメータ励振系と呼ばれ、この微分方程式の解は、初期状態、励振振幅、励振周波数、減衰定数の各無次元パラメータに依存して振る舞う。パラメトリック振子における周期定常状態は、自然数 n 、整数 r 、振子の角変位 $\theta(\tau)$ 、角速度 $\omega(\tau)$ に関して、

$$\begin{aligned} \theta(\tau + n T_p) &= \theta(\tau) \pm 2\pi r \\ \omega(\tau + n T_p) &= \omega(\tau) \\ T_p &= 2\pi / \Omega \end{aligned} \quad (4)$$

を表される。 n, r の組み合わせは、振子が励振の n 周期間に r 回転することを示しており、周期振動の場合、 $r = 0$ である。また r が正の場合、振子は角変位 θ が増大する方向に回転し、負の場合はその逆である。以下では、完全安定、正不安定、逆不安定な周期定常状態もしくは不動点を ${}^n S^r$, ${}^n D^r$, ${}^n I^r$ と書き記す。

2.2 励振パラメータに関する周期定常状態の分岐

本節は、機械振子装置による動作実験に先立ち、パラメトリック

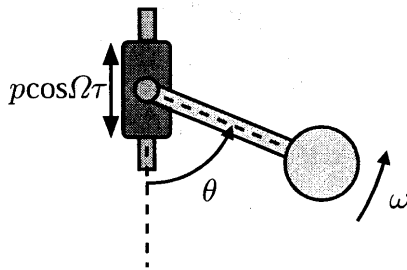


図1 パラメトリック振子の力学モデル.

ク振子に現れる現象の中で、周期振動、周期回転に着目し、その励振パラメータ依存性について数値的に検討する。

a) 周期振動

実験的に検証できると予想される代表的な周期振動の励振パラメータ平面上における発生領域の把握を目的として、分岐解析により得られた数値計算結果を図2に示す。分岐曲線によって区分けされた領域は、観測される周期振動のアトラクターが異なることを示している。主な特徴として、振子の垂れ下がった位置 (hanging-down position) $\theta = 0$ の安定性が失われる2つの共振領域が現れる。1つは $\Omega = 2.0$ 付近に現れ、励振周波数の1/2で揺動する周期振動 ${}^2S^0$ 、もう一方は、 $\Omega = 1.0$ 付近に現れる励振周波数に一致した周期振動 ${}^1S^0$ である。周期振動 ${}^2S^0$ は、周期倍分岐発生がその境界となり、励振振幅 $p = 0.2$ あたりに下限があるのに対して、周期振動 ${}^1S^0$ は、 $p = 0.7$ 付近が下限で、サドル・ノード分岐の発生が境界となる点に違いがある。また、周期振動 ${}^2S^0$ は、扱う状態方程式が対称性を有しているにも関わらず、line (a) において対称性が失われ、鉛直下を対称軸とする周期振動が鉛直下からずれた位置に対称軸を持つ周期振動に変化する。line (a) 付近で、周期倍分岐が起こり、周期振動 ${}^2S^0$ は ${}^4S^0$ に変化し、この後、同様の分岐を複数回繰り返し、最終的には非周期的な振動状態に至る。一方で、周期振動 ${}^1S^0$ においては、line (a) の分岐は見られない。これは、励振周波数の奇数倍にあたる振動であることから妥当な結果で、周期倍分岐に関しては $\Omega = 2.0$ 付近の共振領域と同じく、周期振動 ${}^1S^0$ が ${}^2S^0$ に変化する。

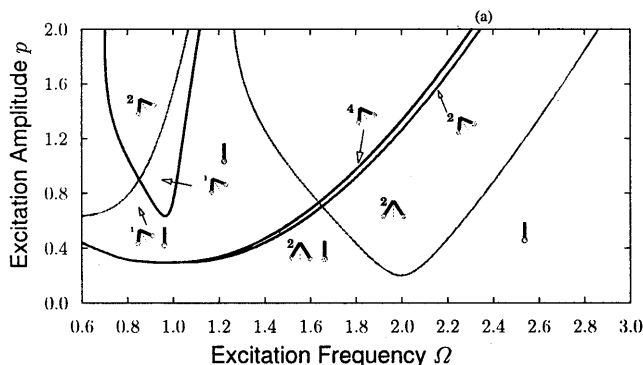
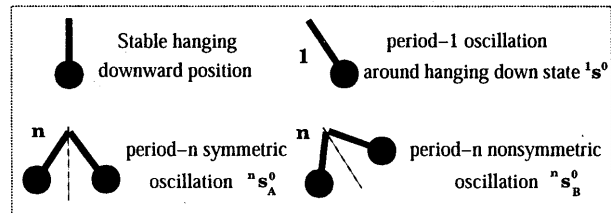
図2 パラメトリック振子の周期振動のパラメータ (Ω , p) に関する分岐図。減衰パラメータ $\gamma = 0.1$ としている。

図3 周期振動に関する分岐図中のイラストに関する説明 (図2)

b) 周期回転

主な周期回転の励振振幅、周波数パラメータ平面上における発生領域を示す分岐解析結果を図4に示す。励振周波数 $\Omega = 2.0$ 付近に周期回転 ${}^1S^1$ の発生領域が広がり、 $\Omega = 3.0$ 付近では、周期回転が唯一の周期定常状態となる。さらに、この共振領域の励振振幅の下限値を示すサドル・ノード分岐の分岐集合が、減衰係数の値の増加で、高い励振振幅側へ移動することが分かる。line (b) で周期倍分岐が現れ、周期回転 ${}^1S^1$ が ${}^2S^2$ に変化し、さらに ${}^2S^2$ が ${}^4S^4$ へ連続的に変化する。一方で、励振周波数 $\Omega = 1.0$ で周期回転の実現する場合には比較的大きな励振振幅を必要とすることが分かる。また、この領域の周期回転は、非定常状態から何らかの原因で再び ${}^1S^1$ が安定化する分岐である。

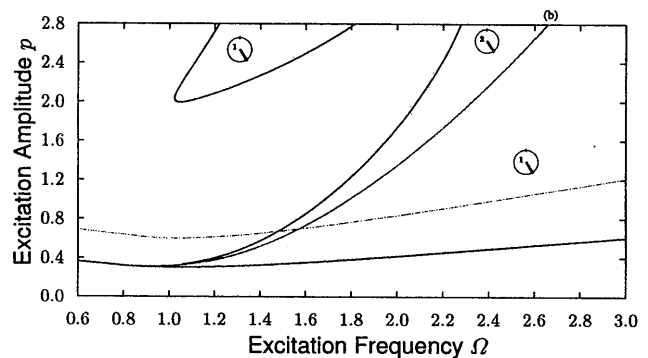
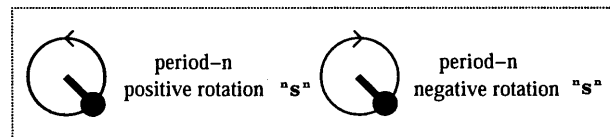
図4 パラメトリック振子の時計回り方向の周期回転のパラメータ (Ω , p) に関する分岐図。減衰パラメータ $\gamma = 0.1$ で、破線のみ 0.2 としている。

図5 周期振動に関する分岐図中のイラストに関する説明 (図4)

3. 周期回転の励振パラメータ依存性に関する実験的検討

3.1 機械振子装置と測定系

図6に示す機械振子系はアルミ製のロッド (rod) とおもり (bob)、支持台 (base) から成る。アルミ製のロッドには図7に

示すように、等間隔に穴が開けられており、回転軸からおもりの中心までの長さを 120 mm から 150 mm まで 10 mm 間隔で調節することができる。同様に、おもりは図 8 に示す構造をしており、それぞれの穴を結合することで振子を構成している。また、振子は支持台に組み込まれたボールベアリングを介して支持台に拘束することで、その振る舞いを可能としている。

図 9 に実験系の概略を示す。ファンクションジェネレータからの交流電圧信号をパワーアンプで交流電流に変換、増幅し、これを振動発生機内の永久磁石により励磁されたコイルに供給することで振動台の鉛直方向の往復運動を生成する。この振動発生機と機械振子装置とを結合することで、生成された振動が筐体を含んだ機械振子装置に伝達する仕組みになっている。

生成された振動の加速度は水平方向 Z_x と鉛直方向 Z_y を 2 軸加速度センサにより測定し、振子の位相はリニア特性を有する回転角度センサの出力電圧を変換して算出している。

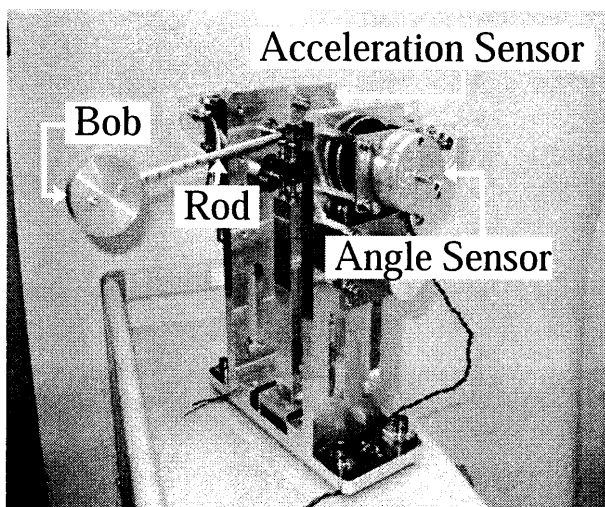


図 6 機械振子装置

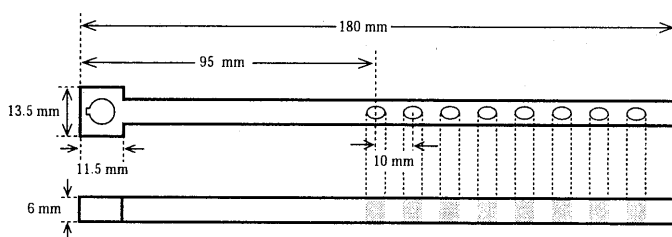


図 7 機械振子（支持棒）の概略図。

表 1 機械振子の詳細

Mass of Rod	39.7g
Mass of Bob	50.6g
Position of Bob	89.0mm
Length	149mm
Moment of Inertia	$7.32 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
Natural Frequency	1.68 Hz

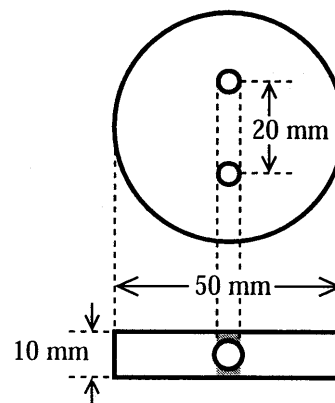


図 8 機械振子（おもり）の概略図。

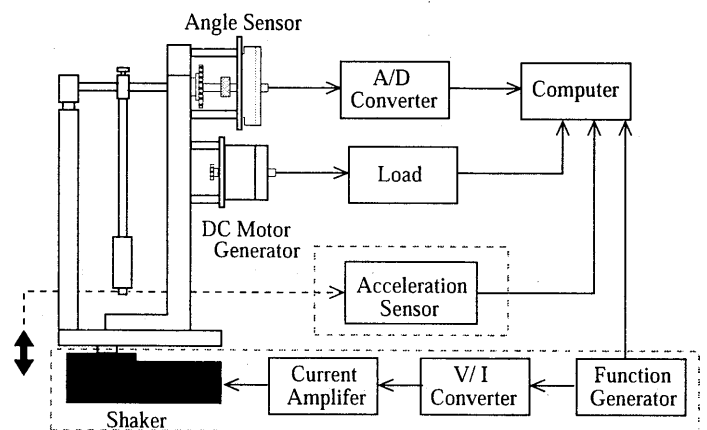


図 9 実験系の概略図

3.2 単一周波数で励振した場合

ファンクションジェネレータから 5.0Hz, 500mVpp の正弦波信号をパワーアンプに入力し、振動発生機を動作させることで機械振子に振動エネルギーを供給した。さらに、振子に適度な初期状態を与え、周期回転を発生させた。この時の測定結果を図 10 に示す。振子の回転に伴う慣性力の効果で鉛直方向だけでなく、水平方向にも振動が出ているが、鉛直成分に比べて十分に小さい。5.0Hz の周期でストロボ観測したところ、この回転運動を特徴づけることはできないが、振子の位相を数秒のオーダーで時間平均をとれば、入力信号の周波数と回転の角周波数が一致しており、(1.1) の周期回転が現れていると考えられる。

3.3 合成波により励振した場合

本節では、比較的近い周波数の 2 種の波を重ね合わせて励振した際の機械振子の振る舞いを検討する。まず、ファンクションジェネレータの出力信号の入力 1 を 5.0Hz, 500mVpp の基本波、入力 2 を 5.1Hz の 100mVpp から 1000mVpp まで 100mVpp 刻みの正弦波として、2 信号間の位相差をゼロとして一定に保った。これらの信号をオペアンプを用いて作製した加算回路の入力とすることで合成信号電圧を生成した。さらに、合成信号電圧をパワーアンプへの入力信号電圧として用い、振動発生機を振動させた。この時、合成電圧と同様の概形をした振動が機械振子装置へと伝達していることを装置の筐体に取り付けられた加速度センサの出力応答信号電圧から確認している。

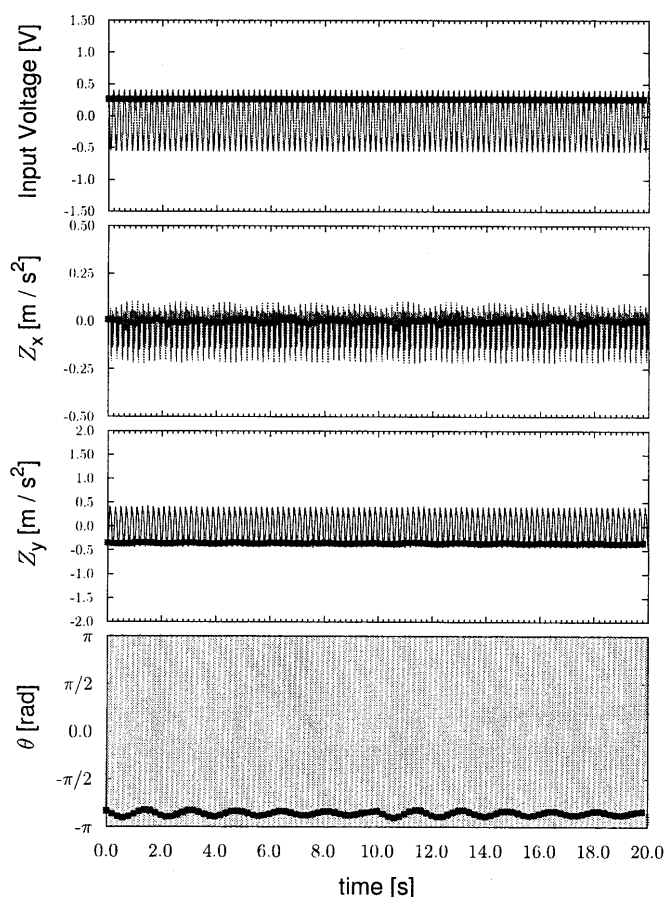


図 10 単一周波数の入力信号で励振した時の測定結果 (入力信号: 5.0Hz, 500mVpp)

周期回転について、2 入力信号の合成波で励振した時の測定結果を図 11、図 12、図 13 に示す。周波数の差が 0.1Hz と小さいため、入力波はうなり波形となり、これに伴い機械振子にもこのような概形の振動が加えられている。

図 11 は、基本波の信号よりも振幅の小さな信号を入力として励振した場合である。基本波の周期でストロボ観測したところ、そのストロボ点列は 2 入力信号の周波数の差にあたる 0.1Hz で振動的になっている。機械振子の振る舞いにおいては、基本波に一致した角周波数 5.0Hz の回転よりも高低速の運動を繰り返していると考えられる。

図 12 は、基本波の信号と振幅が等しい信号を入力として励振した場合である。この時、機械振子にどのような初期状態を与えても周期回転を維持するような運動は現れなかった。生成された合成波は波束のような概形をしており、加速度を十分に得ることができない時間領域において機械振子の振る舞いが周期回転の軌道から逸脱し、収束に向かっていていると考えられる。

図 13 は、基本波の信号よりも振幅の大きな信号を入力として励振した場合である。この条件下では、基本波の周期でストロボ観測したところ、点列は 0.1Hz で回転していることが分かる。このことから、機械振子が基本波ではなく、5.1Hz の周波数成分と一致した角周波数で回転していると考えられる。

以上の測定結果から、基本波と異なる周波数成分のエネルギーを増加させても、周期回転が発生するものの、その傾向に

ついては力学的に十分な説明ができるに至っていない。しかし、図 12 の結果のように、合成波が波束のような概形を形成するとき、周期回転の運動状態が現れなくなることから、周期回転の維持に及ぼす異なる周波数成分の効果は供給エネルギー量だけでなく、基本波との位相差にも依存性を示す可能性があることが分かった。

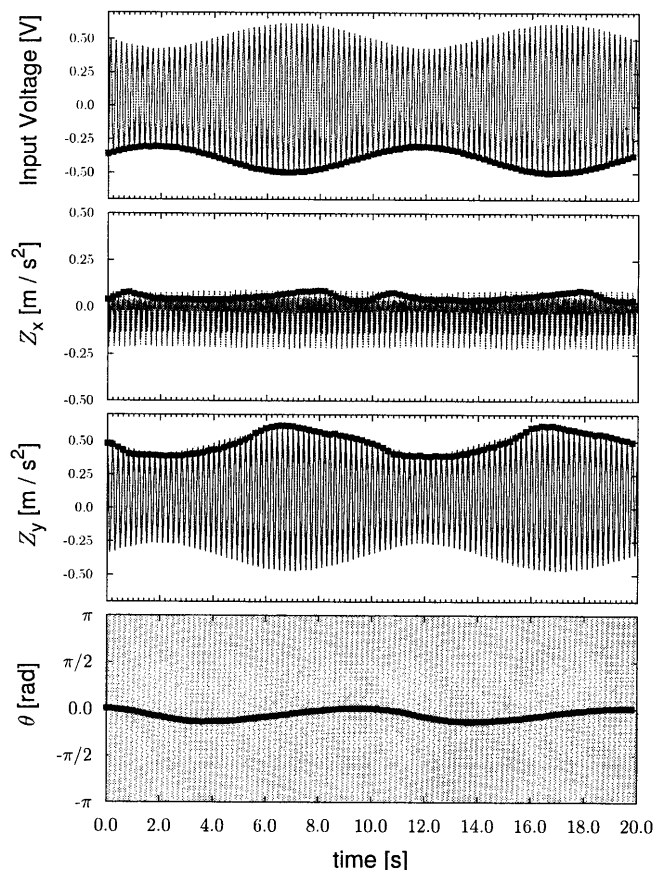


図 11 2 入力信号の合成波で励振した時の測定結果 (入力 1: 5.0Hz, 500mVpp, 入力 2: 5.1Hz, 100mVpp). 加算回路への入力信号の位相差はゼロとしている。

4. おわりに

本稿では、波力のパワースペクトルが数 Hz 程度の周波数帯に集約している特性から、この周波数帯に含まれる単一の周波数で機械振子を励振した場合、わずかに異なる周波数成分の振動と合成させて励振させた場合に機械振子の振る舞いがどのように変化するかを回転の維持が可能かという点で実験的に検討した。

まず本研究の対象であるパラメトリック振子の数理モデル、周期定常状態および各パラメータを示し、分岐解析によりパラメータ空間における各周期定常状態の発生領域について議論した。最後に、海洋上に存在するような複数の周波数成分を含んだ波エネルギーへ拡張することを目標として、単一周波数で励振した場合と合成波で励振した場合の機械振子の振る舞いの実験結果を示し、波の合成による効果が周期回転の維持に与える影響について検討を行った。結果、基本波の信号振幅より、異なる周波数の信号振幅が大きい場合、すなわちエネルギーの多い

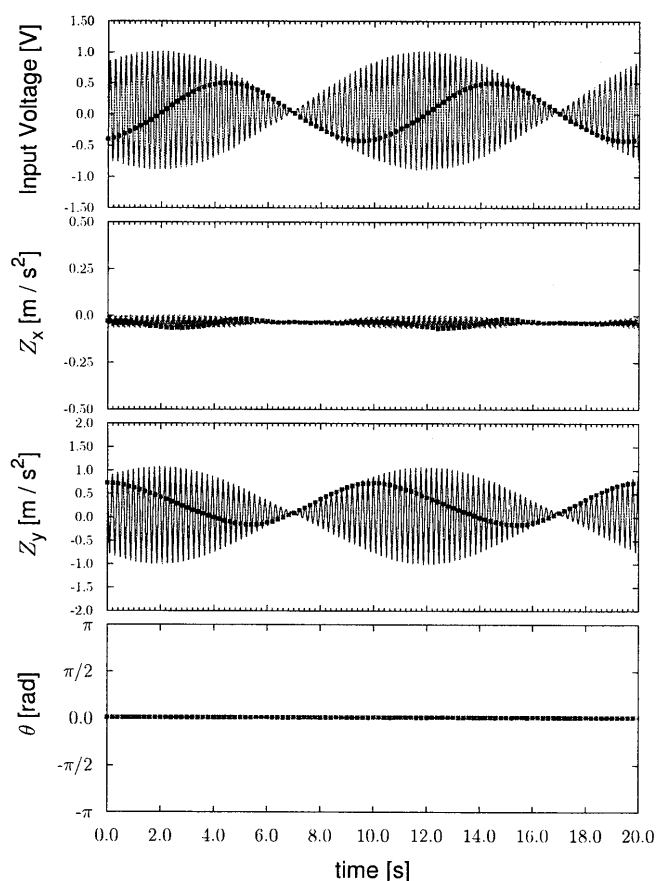


図 12 2 入力信号の合成波で励振した時の測定結果 (入力 1: 5.0Hz, 500mVpp, 入力 2: 5.1Hz, 500mVpp). 加算回路への入力信号の位相差はゼロとしている。

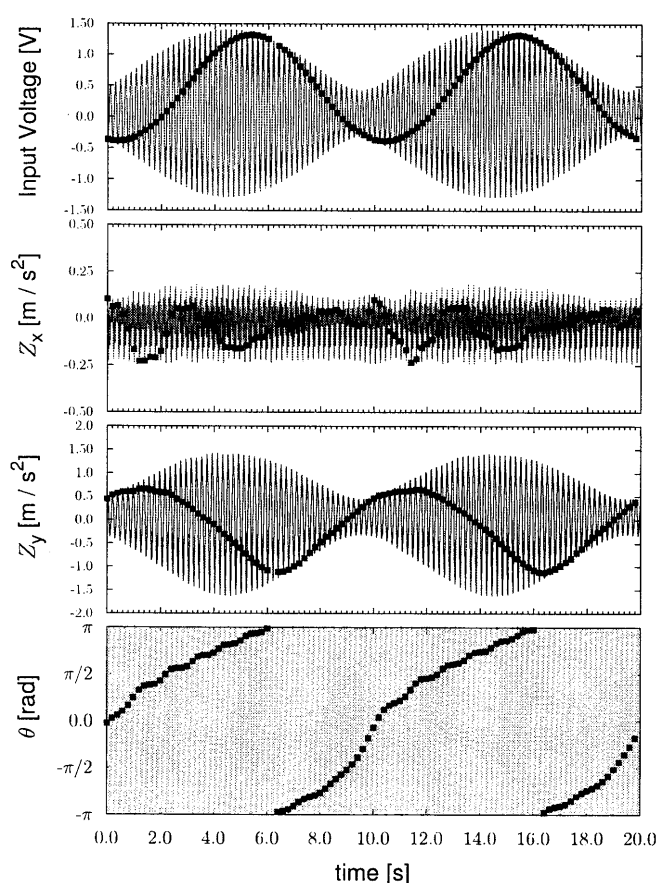


図 13 2 入力信号の合成波で励振した時の測定結果 (入力 1: 5.0Hz, 500mVpp 入力 2: 5.1Hz, 900mVpp). 加算回路への入力信号の位相差はゼロとしている。

方の周波数成分に周期回転の角周波数が一致することが分かった。しかし、周期回転の維持に関して、エネルギーとの対応だけでは十分な理解に及ばないので、各周波数成分の波相互の位相差による効果の検証が必要であると考えられる。

5. 謝 辞

本研究にあたり、多岐にわたって御討論、御助言を賜りました京都大学大学院工学研究科電気工学専攻 佐藤宣夫助教、薄良彦助教に心より感謝の意を申し上げます。

文 献

- [1] Ocean Power Delivery Limited, 2005.
- [2] 21 世紀のクリーンな発電として 波力発電 - 原理から応用まで -, パワー社, 2008.
- [3] 野澤 哲生, H 経エレクトロニクス **993**, 97-105 (2008).
- [4] M. J. Clifford, S. R. Bishop, Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A*, **201**, 191-196 (1995).
- [5] W. Garira, S. R. Bishop, Oscillatory orbits of the parametrically excited pendulum, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13** (10), 2949-2958 (2003).
- [6] B. Horton, M. Wiercigroch and X. Xu, *Phil. Trans. R. Soc. A*, Transient tumbling chaos and damping identification for parametric pendulum, **366**, 767-784 (2008).
- [7] Y. Susuki, Y. Yokoi and T. Hikihara, Energy-based analysis of frequency entrainment described by van de pol and phase-locked loop equation, *Chaos*, **17**, 023108 (2007).
- [8] 小松 高廣, 由良 文孝, 上野 嘉夫, 非線形パラメータ励振系におけるカオスと散逸エネルギー - 中性点反転現象をモデルとして -, 信学技報, 11-16(2007).