

水・アルコール混合溶液中での 2 重拡散対流の発生と遷移

同志社大学・工学研究科 安水 悠人 (Yuto Yasumizu)

同志社大学・工学研究科 大橋 俊介 (Shunsuke Ohashi)

同志社大学・理工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

Mechanical Engineering, Doshisha University

1. はじめに

一成分の純粋な流体からなる水平流体層を下面から加熱するときには発生する対流はベナール対流と呼ばれ、徐々に温度差を大きくすると最初に発生する対流は定常対流となる [1, 2, 3, 4]。一方、流体中に塩などの溶質が融解しているときや 2 種の流体が混じり合った混合液の場合には、最初に発生する対流が振動対流となる場合も多く、発生した対流の挙動も複雑である。これらの塩を含む溶液と 2 流体混合溶液中に発生する対流は多くの共通の性質をもっているが、大きな違いもあり、これらの溶液に対する研究者の関心も異なっている。ここでは、塩を含む溶液中の対流を熱塩対流と呼び、2 流体混合溶液中の対流を 2 流体対流と呼んで区別をすることし、これらを総称して 2 重拡散対流と呼ぶ。

熱塩対流中では塩などの物質拡散と熱拡散が同時に起こるため、振動対流の発生だけでなく、複雑な現象が生じる（例えば柳瀬 [5] などを参照）。熱塩対流は海洋物理学で研究が始められ、ソルトフィンガー現象と呼ばれる鉛直縞模様の塩の濃度分布が生じたり、鉛直方向に階段状の塩の濃度分布が形成される。また、ベナール対流の単純化されたモデルとして提案されたローレンツモデルでは発生するカオスがモード打ち切り効果によって生じるものとされたのに対して、熱塩対流では物理現象としてカオスが発生するため、カオス研究の対象としても注目を浴びてきた。

もう一つの 2 重拡散対流である 2 流体対流は、熱塩対流とは異なり、流体層の一部のみで局所的に対流が生じ、他の部分では静止状態となる局所構造が発生するため、パターン形成に関心をもつ研究者の注目が集まっている。熱塩対流と同様に、2 流体対流でも最初の不安定性で生じる対流が振動対流となることもあり、非常に複雑な対流が生じる。特に、温度勾配が物質拡散や濃度拡散に影響を与える効果（ソレ効果, Soret effect）が無視できないとき、現象はさらに複雑になる。ソレ効果は温度勾配と逆向きに物質あるいは流体の濃度勾配を誘起する効果であり、エタノールと水の混合溶液の場合には、高温度場よりも低温度場の方がエタノール濃度が大きくなる性質がある。このとき、エタノール濃度が大きいと混合溶液の密度は小さくなり、温度による浮力と濃度による浮力の比で表されるパラメータである分離比 (Separation ratio) は負となる。また、温度上昇による密度減少がソレ効果による濃度減少によって一部が相殺され、安定化される。このように、温度上昇による不安定効果とエタノール濃度上昇による安定化効果が拮抗して複雑な現象を導く。流れ場が周期境界であれば対流セルパターンは伝播波として有限の位相速度で領域内を伝播する。また、2 流体対流中ではある領域だけに局在化した対流パターンが可能であるため、局在定常波や局在伝播波などの進行波型のパルス状対流が生じる。このように、2 流体対流は振動発生（リズム生成）とパターン発生の原始的なモデルと見なすこともできる。

2 流体対流については、流体が静止した熱伝導状態の線形安定性だけでなく、発生した対流の性質についても、理論的にも実験的にも詳しく調べられており、多くの報告が行われている。2 流体対流の応用面では多孔質媒質中の対流を考えたり、取り扱う問題によって境界条件が異なるため、実験においても理論においてもその研究範囲は多岐にわたっている。線形および弱非線形安定性解析においても、多孔質中の 2 流体対流の発生条件が Knobloch [6] によって調べられた。実

験条件に近い現実的な境界条件を用いた線形安定性解析は Knobloch and Moore [7] により行われ、定常対流、伝播対流、定在波型振動対流に対する対流の発生条件が求められた。ただし、線形安定性解析においては、分離比の値を仮定するが、分離比は混合溶液の濃度や温度に依存して変わるため実験による値の算出は困難であり、むしろ、安定性解析の結果と実験による対流の発生条件との比較から分離比を定める必要があることが分かった。分離比に比べてソレ係数（後に説明するルイス数の逆数）の測定法については、多くの実験方法が考え出され、比較的精度よく測定が可能である [8]。

2 流体対流の複雑な振る舞いは実験でも確認されている。たとえば、Walden, Kolodner, Passner and Surko[9] は横長の矩形容器中での 2 流体対流の発生とその発展を調べ、発生の臨界状態近傍ではカオス的な熱対流が発生するが、レイリー数が大きくなると時間的に変化し、さらに大きなレイリー数ではベナール対流の場合と同様に定常な対流へと変化することを示した。また、Kolodner, Bensimon and Surko[10] は高さが低い 2 重円筒間にできる円環領域中でのエタノールと水の 2 流体対流の発生と発展を実験により調べ、全円環領域で発生した対流が伝播する伝播対流や領域中の一部に局在化して発生した対流が伝播する局在伝播対流などの現象を見いだした。その他にも、Kolodner[11, 12] や Bensimon, Kolodner and Surko[13] は局在伝播波（パルス）の衝突など 2 流体対流中での対流の発生と伝播について実験により詳しく調べた。

2 流体対流の複雑な振る舞いは数値シミュレーションによっても詳しく調べられてきた。たとえば、Jung, Matura and Lücke[14] は水平方向に周期境界条件を用いて数値シミュレーションを行った。その結果、伝播対流・定在波型振動対流および局在伝播対流などを再現し、それらの解の分岐構造を求め、定在波型振動対流から伝播対流への遷移について調べた。また、Watanabe, Toyabe, Iima and Nishiura[15] は数値シミュレーションを行い、2 流体対流中で時間と共に周期的にその形が変化する振動型局所伝播対流が存在することを見だし、その解の性質と解の大域的な構造との関係を明らかにした。

2 流体対流で観測される局所伝播対流のような局所化した波動は化学反応や反応拡散系など他の多くの散逸系でも生じることが分かっており、それらの発生や衝突はパターン形成などの観点から、より一般的で普遍的な波動現象として注目する研究も多く、それらの研究ではスイフト・ホーヘンベルグ方程式やそれを拡張した方程式が用いられている。たとえば、Couillet, Riera and Tresser[16] は化学反応方程式モデルとスイフト・ホーヘンベルグ方程式を拡張した方程式を用いて、局所化した解の発生と遷移について議論し、解の分岐構造を調べた。また、Couillet[17] は数学的なモデルを用いて、局所化した解の発生と相互作用を調べ、そのような局所化した解が存在する理由を説明することを試みた。これらの結果の意味を 2 流体対流の場合に当てはめれば、ベナール対流は流れ場全体にわたって対流が発生するのに対して、2 流体対流では一部の領域のみに対流が発生し、そのまわりの領域に対流が発生しない理由を説明していることになる。

これまでの 2 流体対流の研究では空間的に周期境界条件を採用することが多く、矩形領域の 2 流体対流についてはあまり研究が行われていない。純粋な流体については、矩形容器の下面を加熱したときの熱対流の発生についても多くの研究報告が行われている（たとえば、Mizushima[18], Mizushima and Adachi[19]などを参照）。特に、Mizushima and Nakamura[20] は、矩形容器のアスペクト比を連続的に変えると、臨界モードが入れ替わり、それぞれのモードに対応する臨界レイリー数の反発現象が生じることを見だし、その固有値の反発とパターン形成との関係を議論した。2 流体対流については、Mercader, Batiste, Alonso and Knobloch[21] は容器幅と容器高さの比（アスペクト比）が 14 の場合について矩形容器中の 2 重拡散対流の発生と遷移について調べ、その分岐構造を明らかにした。そこで得られた解の分岐構造もまた、これまで周期境界条件の場合と同様にスネーキングと呼ばれる蛇行曲線で表される解の構造をもつことが確かめられた。この

ような蛇行曲線（スネーキング）で表される解の分岐構造はスイフト・ホーヘンベルグ方程式を拡張した方程式においても得られることが分かっており，加熱した円柱群を過ぎる流れの中でも生じるという報告もある [22]．しかし，Mercader *et al.* のように矩形領域の 2 重拡散対流に注目した研究は多くなく，特に小さなアスペクト比をもつ容器中の 2 流体対流の発生と遷移については，著者の知る限り報告がない．しかし，2 流体対流の複雑な性質を探る原点は，より小さなアスペクト比の矩形領域における 2 流体対流について調べることににより明らかになると考えられる．

本研究では，矩形容器中に満たされたエタノールと水の混合溶液中における 2 流体対流の発生とその遷移について，線形安定性・数値シミュレーションおよび定常解の数値計算により詳しく調べる．特に，断面が正方形の場合について，容器中の流体が外部から受けるトルクと仕事を評価し，不安定性が生じる力学的機構と 2 流体対流中に周期振動が生じるリズムとパターンの生成機構を力学的な側面から明らかにする．

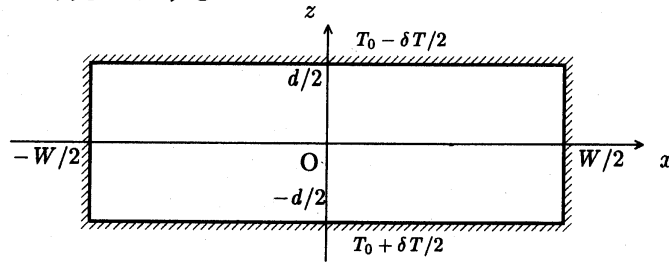


図 1: 容器の矩形断面と座標系.

2. 問題設定と定式化

矩形断面をもつ容器中に満たされたエタノールと水の混合流体中に発生する 2 次元 2 流体対流の発生と遷移について考える．容器の上下面は完全熱伝導性をもつ固体壁で，左右の側壁は断熱固体壁であるとし，容器の長さは十分に長く，流れ場は 2 次元であるとする．容器の下面を加熱し上面を冷却することにより上下面に温度差を与えたときに生じる 2 重拡散対流中での振動とパターンの発生機構について調べる．アスペクト比 A （高さ d と幅 W の比 W/d ）の矩形断面の中心を原点 O として，容器の上下面に平行に x 軸，鉛直上向きに z 軸をとる（図 1）．容器の下面を一定の温度 $T_0 + \delta T/2$ ，上面をそれよりも低い温度 $T_0 - \delta T/2$ に保つ．

浮力項を除いては流体の物質的な性質は温度によって変化しないとするブジネスク近似を用いると，流体の速度 $\mathbf{u} = (u, w)$ ，圧力 p ，温度 T ，エタノール濃度 C の時間変化を支配する方程式は連続の式，ナビエ・ストークス方程式，熱拡散方程式および濃度拡散方程式であり，

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \{\beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)\} g \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T, \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \gamma_2 \Delta T + D \Delta C, \quad (4)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

と表される。ここで、熱伝導(静止)状態における原点 O での温度を T_0 とし、そのときの流体の密度を ρ_0 、エタノール濃度を C_0 とする。 g は重力加速度、 ν は動粘性係数、 κ は流体の熱拡散係数、 D はエタノール(物質)拡散係数、 $\mathbf{e}_z$ は鉛直上向きの単位ベクトルである。 $\beta_T = -(1/\rho_0)(\partial\rho/\partial T)_0$ は温度変化による流体の膨張係数であり、流体の密度 ρ の変化率に負号を付けたものと等しい。同様に、 $\beta_C = (1/\rho_0)(\partial\rho/\partial C)_0$ はエタノール濃度変化に伴う、混合流体の密度の変化を表す。エタノールは水よりも密度が小さいので、 $\beta_C < 0$ である。水と塩との混合流体の場合は $\beta_C > 0$ である。 γ_2 はソレ(Soret)効果を表しており、温度勾配によって物質が拡散する効果である。液体ではデュフォー(Dufour)効果は小さいため、式(3)にはデュフォー効果の項を考慮に入れていない。

容器の上下面は熱伝導性の良い物質でできた固体表面であるとしているので、上下壁面上では速度には粘着条件、温度には一定条件、物質には非透過条件を課す。それらの境界条件は

$$\mathbf{u} = 0, \quad T = T_0 \mp \frac{\delta T}{2}, \quad \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial z} + D \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad \left(z = \pm \frac{d}{2} \right) \quad (6)$$

と表される。左右側壁は断熱材でできた固体表面であるとしており、境界条件は

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial x} + D \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \left(x = \pm \frac{W}{2} \right) \quad (7)$$

となる。

容器上下面の温度差 δT が小さいときは、流体は静止しており、熱伝導状態にある。静止状態において、解は

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0, \quad p = -\frac{1}{2}\rho_0 g \delta T \frac{z^2}{d^2} \left\{ \beta_T - \beta_C \frac{\gamma_2}{D} \right\} - \rho_0 g z + p_0, \\ T &= T_0 - \delta T \frac{z}{d}, \quad C = C_0 + \frac{\gamma_2}{D} \delta T \frac{z}{d} \end{aligned} \quad (8)$$

と表される。

代表長さを d 、代表速度を κ/d 、代表時間を d^2/κ 、代表温度を δT 、代表濃度を $\gamma_2 \delta T/D$ にとり、全ての物理量を次のように無次元化する：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \frac{1}{d} \mathbf{x}, \quad t^* = \frac{\kappa}{d^2} t, \quad \mathbf{u}^* = \frac{d}{\kappa} \mathbf{u}, \quad p^* = \frac{d^2}{\rho \kappa^2} (p - p_0), \\ \theta^* - z^* &= \frac{1}{\delta T} (T - T_0), \quad \eta^* + z^* = \frac{D}{\gamma_2 \delta T} (C - C_0), \quad \nabla^* = d \nabla, \quad \Delta^* = d^2 \Delta. \end{aligned} \quad (9)$$

これらの無次元量を用いて式(1)-(4)を書き改めると、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p - \text{PrRa}(\theta - S\eta) \mathbf{e}_z + \text{Pr} \Delta \mathbf{u}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \Delta \theta + w, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \eta = \text{Le} \Delta \theta + \text{Le} \Delta \eta - w \quad (13)$$

となる。ここで、無次元量を表す $*$ をすべて省略した。また、 Ra はレイリー(Rayleigh)数、 Pr はプラントル(Prandtl)数、 Le はルイス(Lewis)数、 S は分離比(Separation ratio)であり、

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \text{Ra} = \frac{\beta_T \delta T d^3 g}{\kappa \nu}, \quad \text{Le} = \frac{D}{\kappa}, \quad S = \frac{\gamma_2 \beta_C}{D \beta_T} \quad (14)$$

と定義される。

ここでは、2次元非圧縮性流れを考えているので、流れ関数 $\psi(x, z)$ を導入し、 $u = -\partial\psi/\partial z$, $w = \partial\psi/\partial x$ と表す。また、無次元エタノール濃度 η の代わりに、 $f = \theta + \eta$ を導入すると、2流体対流を支配する方程式 (10) -(13) は

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, z)} = \text{RaPr} \left\{ (1+S) \frac{\partial\theta}{\partial x} - S \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \text{Pr}\Delta^2\psi, \quad (15)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \Delta\theta, \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, f)}{\partial(x, z)} = \Delta\theta + \text{Le}\Delta f \quad (17)$$

となる。 ψ , θ および関数 f の境界条件は

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial z} = \theta = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \left(z = \pm \frac{1}{2} \right), \quad (18)$$

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \left(x = \pm \frac{A}{2} \right) \quad (19)$$

と表される。

2.1 静止状態の線形安定性解析

流体が静止した熱伝導状態の線形安定性を調べる。線形攪乱方程式は式 (15)-(17) において、線形攪乱 ψ , θ , f に関する非線形項を無視し、それらの時間依存性をそれぞれ、 $\psi = \tilde{\psi}e^{\lambda t}$, $\theta = \tilde{\theta}e^{\lambda t}$, $f = \tilde{f}e^{\lambda t}$ と表して、

$$\lambda\Delta\tilde{\psi} = \text{RaPr}(1+S)\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x} - \text{RaPr}S\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x} + \text{Pr}\Delta^2\tilde{\psi}, \quad (20)$$

$$\lambda\tilde{\theta} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} + \Delta\tilde{\theta}, \quad (21)$$

$$\lambda\tilde{\eta} = \Delta\tilde{\theta} + \text{Le}\Delta\tilde{f} \quad (22)$$

のように得られる。線形攪乱方程式 (20)-(22) を式 (18) および (19) の境界条件の下で解くことにより、臨界レイリー数 Ra_c およびそのときの角振動数 $\omega_c = \lambda_i$, 固有関数 $(\tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{f})$ が求められる。

線形攪乱方程式をガレルキン法を用いて数值的に解く。流れ関数 $\tilde{\psi}$, 温度 $\tilde{\theta}$ および関数 $\tilde{f}$ を、それぞれの境界条件を満たす関数列を用いて、

$$\tilde{\psi} = \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\bar{n}} a_{mn} F_m(2x) F_n(2z), \quad (23)$$

$$\tilde{\theta} = \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\bar{n}} b_{mn} H_{m+1}(2x) G_n(2z), \quad (24)$$

$$\tilde{f} = \sum_{m=0}^{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\bar{n}} c_{mn} H_{m+1}(2x) H_n(2z) \quad (25)$$

のように展開する。ここで、 $\bar{m}$ と $\bar{n}$ はそれぞれ x 方向および z 方向の関数展開の打ち切り次数を表している。それぞれの展開関数 $F_k(\xi)$, $G_k(\xi)$, $H_k(\xi)$ は $\xi = [-1, 1]$ で定義され、境界条件を満

たすように変形したチェビシェフ多項式であり,

$$F_k(p) = (1 - p^2)^2 T_k(p), \quad G_k(p) = (1 - p^2) T_k(p), \quad H_k(p) = \int^p (1 - q^2) T_k(q) dq \quad (26)$$

と表される. ここで, $T_k(p)$ は k 次のチェビシェフ多項式である.

式 (15) - (17) に展開式 (23) - (25) を代入し, それぞれの式の両辺に $F_p(x)F_q(z)$, $H_p(x)H_q(z)$, $H_p(x)G_q(z)$ ($p = 0, 1, \dots, \bar{m}, q = 0, 1, \dots, \bar{n}$) をかけて, $x = [-1, 1]$, $z = [-1, 1]$ の範囲で積分する (ガレルキン法) と, 形式的に

$$\lambda P \mathbf{a} = Q \mathbf{a} \quad (27)$$

という形の方程式が得られ, 行列の固有値問題に帰着する. ここで, $\mathbf{a}$ は展開係数 a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} を

$$\mathbf{a} = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0\bar{m}}, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{\bar{m}\bar{n}}, b_{00}, b_{01}, \dots, b_{0\bar{m}}, b_{10}, b_{11}, \dots, b_{\bar{m}\bar{n}}, c_{00}, c_{01}, \dots, c_{0\bar{m}}, c_{10}, c_{11}, \dots, c_{\bar{m}\bar{n}}) \quad (28)$$

のように並べてできる $(3 \times (\bar{m} + 1) \times (\bar{n} + 1))$ 次のベクトルであり, P と Q は $(3 \times (\bar{m} + 1) \times (\bar{n} + 1)) \times (3 \times (\bar{m} + 1) \times (\bar{n} + 1))$ の行列である.

2.2 非線形解の数値シミュレーション

発展方程式 (15)-(17) を適切な初期条件および境界条件 (18) と (19) の下で数値的に解くことにより, 2 流体対流の非線形解を求める. 線形安定解析の場合と同様に, 流れ関数 $\tilde{\psi}$, 温度 $\tilde{\theta}$ および関数 $\tilde{f}$ を, それぞれの境界条件を満たす関数列を用いて式 (23)-(25) のように展開し, ガレルキン法を用いて係数 $\mathbf{a}$ の時間発展を支配する方程式を導くと, 形式的に

$$P \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = Q \mathbf{a} + N(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \quad (29)$$

のように表すことができる. ここで, $N(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ は非線形項を表す. 式 (29) を初期値問題としてルンゲ・クッタ法により数値的に解く.

2.3 非線形定常解の数値計算

発展方程式 (15)-(17) の定常解を境界条件 (18) と (19) の下でニュートン法を用いて数値的に解くことにより非線形定常解を求める. 式 (15)-(17) において $\partial/\partial t = 0$ とおき, 数値シミュレーションと同様に式 (23)-(25) のように展開し, コロケーション法を用いて係数 $\mathbf{a}$ の定常解を求める方程式を導くと, 形式的に,

$$f(\mathbf{a}) = L \mathbf{a} + N(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \quad (30)$$

のように表すことができる. ここで L は線形項を表し, N は非線形項を表す. 代数方程式 (30) をニュートン・ラフソン法により数値的に解いて, 定常解を求める.

3. 数値計算結果

3.1 2 流体対流の発生

レイリー数が小さいとき、流体は静止した熱伝導状態にあり、熱伝導状態が不安定となって2流体対流が発生する。発生条件とそのときの流れ場は、各アスペクト比 A について、ルイス数 Le 、分離比 S 、レイリー数 Ra を与えて固有値問題 (27) を解き、固有値 λ を求めることにより得られる。これらのパラメータの値は考える状況によって異なるが、たとえば、温度 28.2°C における 2.8wt% のエタノールと水の混合液の場合、 $Pr = 7.00$ 、 $Le = 0.0088$ 、 $S = -0.123$ である [8, 23] ことが分かっている。ここではこの場合を中心に考えることとし、 $Pr = 7$ 、 $Le = 0.01$ 、 $S = -0.1$ の場合を代表例として主に取り扱う。

線形安定性解析においては、固有関数の x と z に関する対称性によって固有値と固有関数を4つのモードに分類でき、それぞれを独立に取り扱うことができる。たとえば、 $[\tilde{\psi}:(e,e), \tilde{\theta}:(o,e), \tilde{f}:(o,e)]$ のように表す。ここで、 e と o はそれぞれ、偶関数と奇関数を表し、例えば、 $\tilde{\psi}:(e,e)$ は固有関数 $\tilde{\psi}(x,z)$ が x と z について偶関数であることを表している。このとき、中心を通る水平面上での鉛直方向速度成分 $w(x,0)$ は $w(-x,0) = -w(x,0)$ のように原点 O に関して反対称であり、中心を通る鉛直面上での水平方向速度成分 $u(0,-z) = -u(0,z)$ も原点に関して反対称である。これらの4つのモードのうち、アスペクト比が小さい場合は、 $[\tilde{\psi}:(e,e), \tilde{\theta}:(o,e), \tilde{f}:(o,e)]$ が臨界条件を与える臨界モードとなり、アスペクト比を徐々に大きくしていくと $[\tilde{\psi}:(o,e), \tilde{\theta}:(e,e), \tilde{f}:(e,e)]$ が臨界モードとなる。さらにアスペクト比を大きくしていくとこれらの2つのモードが交互に臨界条件を与えることになる。図2は $Le = 0.01$ 、 $S = -0.1$ における中立安定曲線であり、各アスペクト比 A において中立攪乱 ($\lambda_r = 0$) が存在するレイリー数 Ra を表している。いくつかの曲線はそれぞれのモードを表し、この図では、実線が奇関数モード（中央水平断面上で鉛直方向速度が奇関数、 $[\tilde{\psi}:(e,e), \tilde{\theta}:(o,e), \tilde{f}:(o,e)]$ ）を示し、破線が偶関数モード（中央水平断面上で鉛直方向速度が偶関数、 $[\tilde{\psi}:(o,e), \tilde{\theta}:(e,e), \tilde{f}:(e,e)]$ ）を示している。

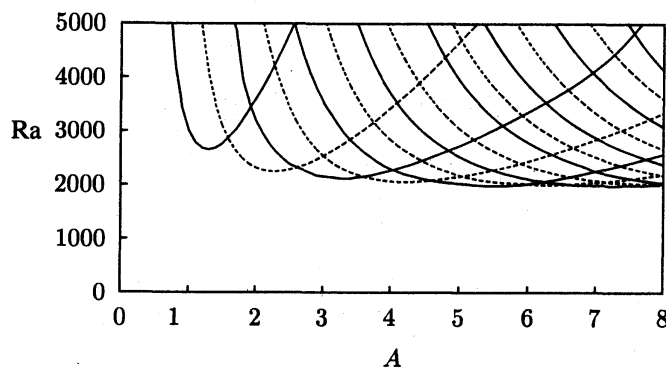


図 2: 中立曲線 (増幅率 $\lambda_i = 0$ となるレイリー数). $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$.

ベナール対流では、同じ対称性をもつ各モードの曲線は交点付近で互いに反発し、交わることはなかったが、2流体対流では各中立曲線が交差する。たとえば、モード1（左端の曲線）とモード3（左から3番目）の中立曲線は $A = 2$ 付近で交差している。固有値が反発する性質は2つの固有値が同じになったときの行列のジョルダン標準形の構造不安定性により生じることが分かっている [20]。2重拡散対流では、固有値が複素固有値となり、図2の2つの曲線の交点で実部が同じ値となっても虚数部である各振動数が異なることにより行列のジョルダン標準形が構造不安定性を生じないからである。

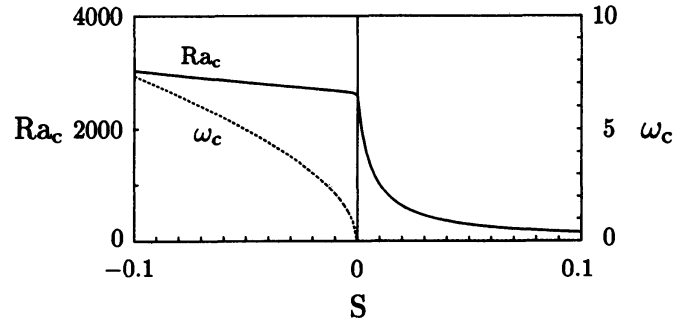


図 3: 臨界レイリー数 Ra_c (実線) と臨界角振動数 ω_c (点線) の分離比依存性. $Le = 0.01$, $Pr = 7$, $A = 1$.

2 流体対流の発生に分離比 S が与える影響を調べる. ルイス数を $Le = 0.01$ と一定にして, 臨界レイリー数 Ra_c と臨界角振動数 ω_c を分離比 $S = [-0.1, 0.1]$ の範囲で計算すると図 3 のようになる. この図で, 実線は臨界レイリー数 Ra_c であり, 点線は臨界角振動数 ω_c を表している. S の値が -0.1 から 0 へ近づく, 臨界レイリー数 Ra_c はベナール対流の臨界レイリー数 $Ra_c = 2585$ に近づき, 同時に角振動数 ω_c は $\sqrt{-S}$ に従って 0 に近づく. S の値が 0 よりも大きくなると角振動数は 0 のままで, Ra_c は 0 近傍で急速に小さくなる. すなわち, $S > 0$ ではベナール対流と同様の定常対流が発生するが, 臨界レイノルズ数はベナール対流に比べて小さくなり, 静止状態はより不安定化する.

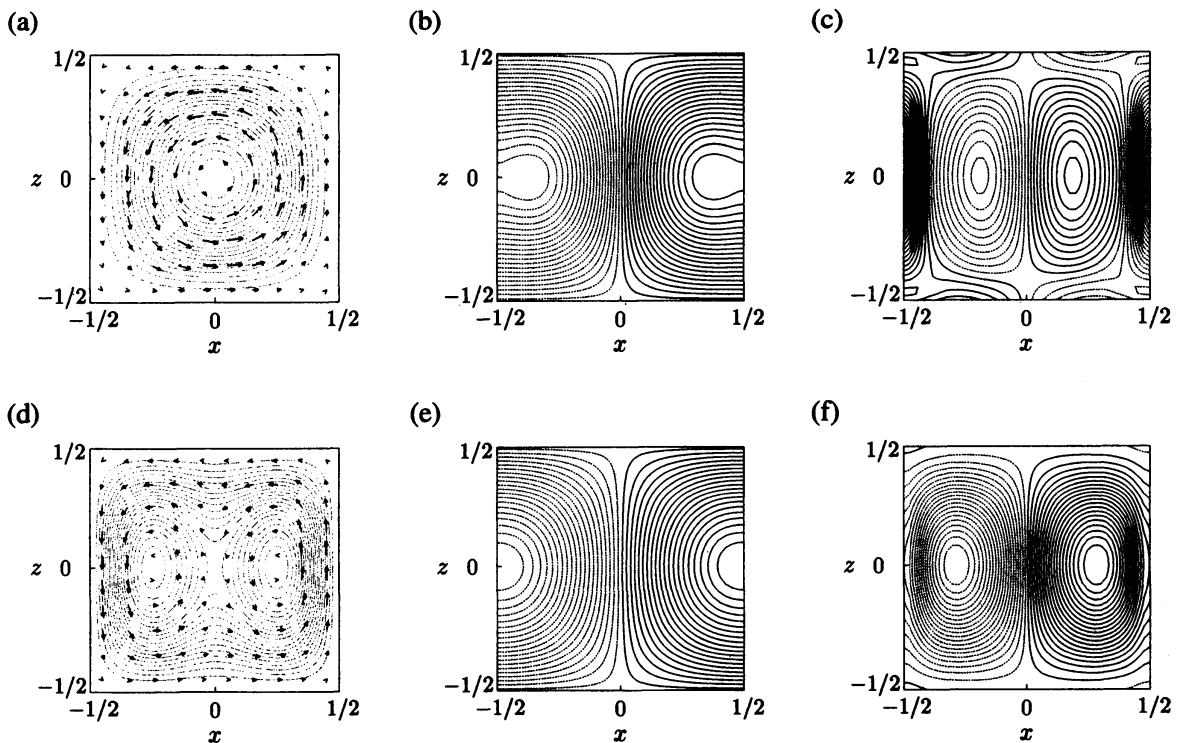


図 4: 固有関数で表される速度場 ($\tilde{\psi}$)・温度場 ($\tilde{\theta}$)・濃度場 ($\tilde{\eta}$). $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$, $A = 1$. $Ra_c = 3014$. (a), (d) 流線 ($\tilde{\psi}$ の等値線). (b), (e) 温度場 ($\tilde{\theta}$ の等値線, 実線: $\tilde{\theta} > 0$, 点線: $\tilde{\theta} < 0$). (c), (f) 濃度場 ($\tilde{\eta}$ の等値線, 実線: $\tilde{\eta} > 0$, 点線: $\tilde{\eta} < 0$). (a)-(c) 実数部. (d)-(f) 虚数部.

固有関数の例として、アスペクト比 $A = 1$ の場合の最も不安定な第1固有モードの固有関数を見てみよう (図 4(a)–4(f))。このモードは $[\tilde{\psi}:(e,e), \tilde{\theta}:(o,e), \tilde{f}:(o,e)]$ で表される対称性をもっている。図 4(a) は流れ場 ($\tilde{\psi}$) の実数部であり、流線の上に速度ベクトル場を重ねて表示している。流れ場の実数部はベナール対流と同じような大きな1つ渦の構造をもつ。また、その虚数部 (図 4(d)) は1つの大きな渦の中に同じ回転方向の小さな渦を2つもっている。ベナール対流では渦は定常流であるのに対して、2流体対流では渦は周期的に循環の向きを逆転する。図 4(b) と 4(e) は温度場の実数部と虚数部であり、実線は温度が正 ($\tilde{\theta} > 0$)、点線は温度が負 ($\tilde{\theta} < 0$) であることを表している。また、図 4(c) と 4(f) は濃度場の実数部と虚数部を表しており、実線は濃度が正 ($\tilde{\eta} > 0$)、点線は濃度が負 ($\tilde{\eta} < 0$) である。これらの図から、温度場は実数部も虚数部もほぼ同じ温度分布であることが分かる。一方、図 4(c) と 4(f) で描かれている濃度場は実数部と虚数部で大きく異なっており、濃度場の実数部と虚数部が異なっていることが2流体対流が振動流となる原因であることが明らかになった。

3.2 不安定性による対流の駆動メカニズム

熱伝導状態が不安定となって対流が生じるときの駆動メカニズムを調べるために、線形固有関数の速度場・温度場・濃度場を用いて、流体に働くトルク N を評価する。流体に作用するトルク N は浮力によるトルク N_B 、圧力によるトルク N_P および粘性応力によるトルク N_V の3つに分解できるので、

$$N = N_B + N_P + N_V \quad (31)$$

と表す。浮力によるトルク N_B は、さらに温度分布に起因するトルク N_{BT} と濃度分布に起因するトルク N_{BC} に分解でき、

$$N_B = N_{BT} + N_{BC}, \quad N_{BT} = \text{Ra Pr} \iint_S x \tilde{\theta} dx dz, \quad N_{BC} = -\text{Ra Pr S} \iint_S x \tilde{\eta} dx dz \quad (32)$$

のように固有関数を用いて計算することができる。ここで、 $\tilde{\eta} = \tilde{f} - \tilde{\theta}$ であり、2重積分の範囲 S は $(x, z) = [-1/2, 1/2] \times [-A/2, A/2]$ である。また、圧力によるトルク N_P は壁面から受ける圧力だけを考慮して、

$$N_P = \int_{-1/2}^{1/2} z \left\{ \tilde{p}\left(\frac{A}{2}, z\right) - \tilde{p}\left(-\frac{A}{2}, z\right) \right\} dz - \int_{-A/2}^{A/2} x \left\{ \tilde{p}\left(x, \frac{1}{2}\right) - \tilde{p}\left(x, -\frac{1}{2}\right) \right\} dx. \quad (33)$$

と表される。ここで、圧力 $\tilde{p}$ は式 (11) を線形化した式に固有関数を代入して評価する。粘性摩擦力によるトルクも壁面から受ける摩擦力のみを考えればよいので、

$$\begin{aligned} N_V = & \text{Pr} \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \left[x \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2}(x, z) \right]_{x=A/2} - \left[x \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2}(x, z) \right]_{x=-A/2} \right\} dz \\ & + \text{Pr} \int_{-A/2}^{A/2} \left\{ \left[z \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2}(x, z) \right]_{z=1/2} - \left[z \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2}(x, z) \right]_{z=-1/2} \right\} dx. \end{aligned} \quad (34)$$

と表すことができる。

エタノールと水の混合溶液では線形不安定性によって振動対流が発生し、議論が複雑なので、まずは純粋流体中に発生するベナール対流 ($S = 0$) の発生条件を調べる。アスペクト比を $A = 1$ 、プラントル数を $\text{Pr} = 7$ として、固有値と固有関数を計算する。このとき、臨界レイリー数は

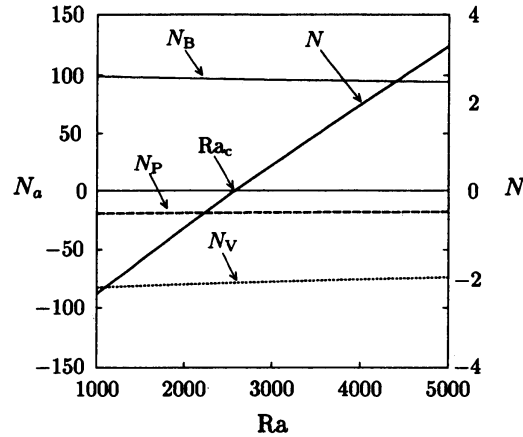


図 5: 流体が受けるトルク N とその成分 N_B , N_P , N_V . 左軸の N_a は N_B , N_P または N_V のいずれかを表す. 実線: 全トルク N , 破線: 浮力によるトルク N_B , 点線: 圧力によるトルク N_P , 一点鎖線: 粘性摩擦力によるトルク N_V . $S = 0$, $Pr = 7$, $A = 1$.

$Ra_c = 2585$ と求められる. この臨界条件において, トルク N とその各成分 N_B , N_P , N_V を評価してグラフに描くと図 5 のようになる. この図で, 左軸の N_a は N_B , N_P または N_V のいずれかを表しており, 実線は全トルク N , 破線は浮力によるトルク N_B , 点線は圧力によるトルク N_P , 一点鎖線は粘性摩擦力によるトルク N_V を表している. 流体に働くトルク N はちょうど臨界レイリー数 $Ra_c = 2585$ で 0 となり, $Ra > Ra_c$ で正となる. これまでは, 浮力による駆動力と粘性摩擦力による抵抗がつり合ったときに臨界状態となり, 浮力が摩擦力よりも大きくなると不安定性が生じると信じられてきたが, 圧力の効果も無視できないことが判明した.

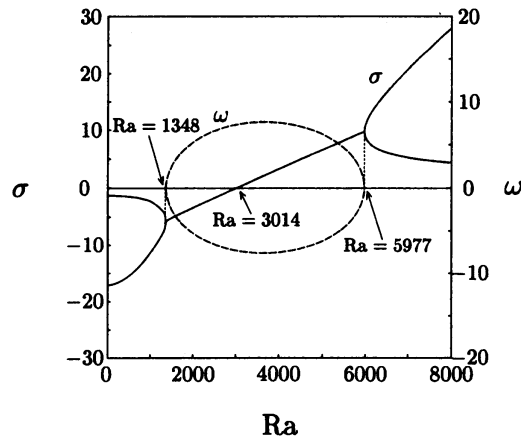


図 6: 最も不安定な 2 つの固有値 (第 1 固有値と第 2 固有値, $\lambda = \sigma + i\omega$). $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$, $A = 1$.

次に, 2 流体対流の発生のメカニズムを調べるために, アスペクト比 $A = 1$, $S = -0.1$, $Le = 0.01$ の場合の最も不安定となる 2 つのモード, すなわち, 第 1 固有モードと第 2 固有モードの線形増幅率 $\sigma (= \lambda_r)$ と角振動数 $\omega (= \lambda_i)$ を $Ra < 8000$ の範囲で求める. それらをグラフにすると図 6 のようになる. 第 1 固有値と第 2 固有値は $1348 \leq Ra \leq 5977$ では複素数であり, 互いに複素共役の関係にある. このとき, 対流は振動流となっている. ただし, $Ra < 3014$ では振動攪乱の増幅率

σ は負であるため、熱伝導解が安定となる。一方、 $Ra < 1348$ または $Ra > 5977$ のとき、第1固有値と第2固有値は共に実数であり、最も不安定な攪乱は定常攪乱で、 $Ra > 5977$ では定常攪乱に対して不安定となる。

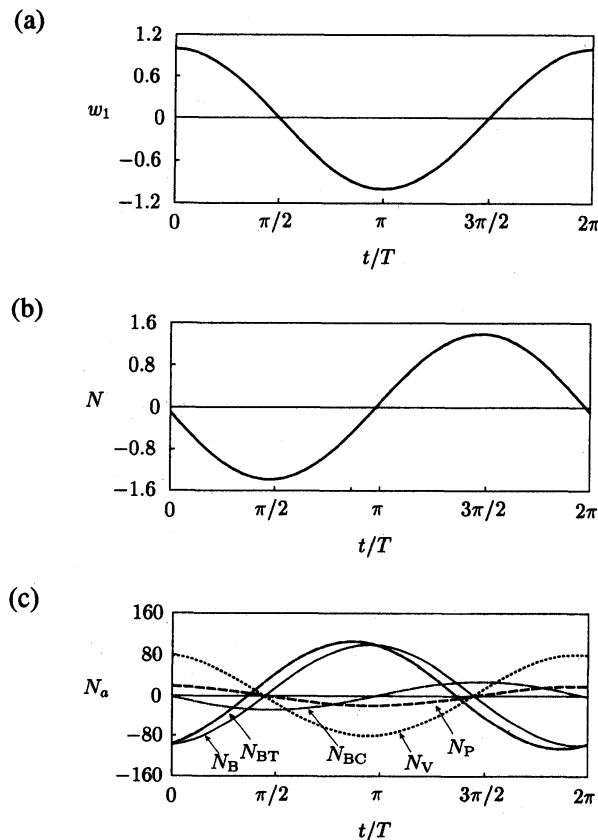


図 7: 速度 $w_1 = w(1/4, 0)$, トルク N とその各成分 N_B , N_{BT} , N_{BC} , N_P , N_V の時間変化. 左軸の N_a は N_B , N_{BT} , N_{BC} , N_P または N_V のいずれかを表す. $Ra = 3014$, $T = 0.869$, $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$, $A = 1$.

パラメータの値が $A = 1$, $S = -0.1$, $Le = 0.01$ のときの臨界レイリー数は $Ra_c = 3014$ であり、臨界状態では角振動数 $\omega = 7.31$, 周期 $T = 0.860$ の振動対流が発生する。図 7(a) は 1 周期における流速 $w_1 = w(1/4, 0)$ の時間変化である。ここで、固有関数を時刻 $t = 0$ で $w_1 = 1$ となるように規格化している。図 7(b) はトルク N の時間変化であり、 w_1 よりも位相がおよそ $\pi/2$ 遅れている。このことから、対流が振動流となるメカニズムを知ることができる。図 7(c) はトルクの各成分、すなわち、浮力によるトルク N_B 、温度変化に伴う浮力によるトルク N_{BT} 、濃度変化に伴う浮力によるトルク N_{BC} 、圧力によるトルク N_P 、粘性応力によるトルク N_V の時間変化を表している。ベナール対流の場合と同様に、対流は温度による浮力のトルクによって駆動され、圧力によるトルクと粘性応力によるトルクがその抵抗となっている。ソレ効果が働くため、濃度変化に起因する浮力のトルクが温度変化に起因する浮力のトルクよりも約 $1/4$ 周期遅れて作用する。濃度による浮力のトルクの位相と流体にはたらくトルクの位相はほぼ同じであり、速度変化と $1/4$ 周期ずれていることが対流中に振動を誘起し、リズム形成を担っていることが分かった。

流体に働くトルクと攪乱の増幅率あるいは臨界条件との関係を調べるために、 $Ra < 8000$ の範囲の各レイリー数での臨界状態における線形固有関数から求めたトルク N とその各成分を計算し、グラフに表すと図 8 のようになる。図 8(a) と 8(b) はそれぞれ固有関数の実数部と虚数部から求め

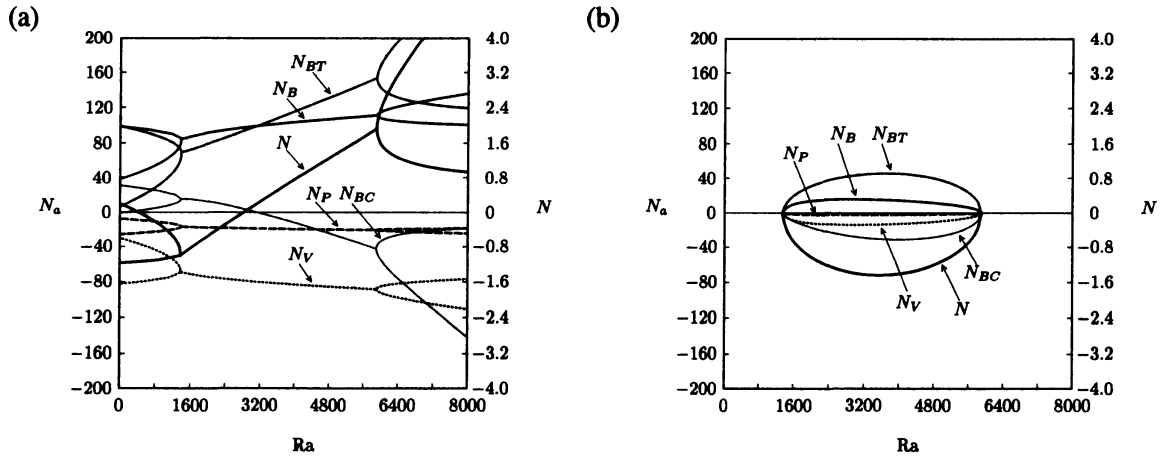


図 8: トルク N とその各成分 N_B , N_{BT} , N_{BC} , N_P , N_V のレイリー数依存性. 図の左軸の N_a は N_B , N_{BT} , N_{BC} , N_P または N_V のいずれかを表している. $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$, $A = 1$. (a) 実数部. (b) 虚数部.

たトルクとその成分である. 図 6 で見たように, $Ra < 1348$ および $Ra > 5977$ では第 1 モードと第 2 モードは定常モードであるために, トルクとその各成分は実部のみが値をもち, トルクの虚数部が値をもつのは $1348 \leq Ra \leq 5977$ の範囲のみである. トルクの実部に注目すると, 2 流体対流においてもベナール対流と同様に浮力が対流を引き起こし, 圧力と粘性応力が対流を妨げる方向に働いている. レイリー数 Ra が大きくなるとともに, 温度による浮力のトルク N_{BT} は大きくなるが, 濃度による浮力のトルク N_{BC} は逆に小さくなる. トルクの虚部においても, 浮力は対流を引き起こし, 圧力と粘性応力は対流を妨げるが, レイリー数依存性は実数部とはかなり異なっている. また, $1348 \leq Ra \leq 5977$ では温度による浮力のトルクとソレ効果から生じる濃度による浮力のトルクが交互に増加と減少を繰り返して対流は振動するが, $Ra > 5977$ では温度による浮力のトルクが濃度による浮力に打ち勝つことによりバランスがくずれ, 対流は振動せず定常攪乱となる.

図 8 からだけでは, 対流が駆動されて不安定性が生じる機構はわからないので, トルクと不安定性の関係を調べるために, ここで, 流体がもつ慣性モーメント I と角運動量 M を

$$I = \iint_S (x^2 + z^2) dx dz = \frac{1}{12}, \quad M = \iint_S (x\tilde{w} - z\tilde{u}) dx dz. \quad (35)$$

のように定義する. ここで, I と M は式 (9) と同じように無次元しており, $\tilde{u} = -\partial\tilde{\psi}/\partial z$, $\tilde{w} = \partial\tilde{\psi}/\partial x$ である. これらの物理量を直感的にとらえるには, 流体全体が剛体回転をしている状況を考えると理解しやすい. もし, 流体が回転角速度 Ω で剛体回転しているときは $M = I\Omega$ が成り立ち, 角運動量 M の時間変化とトルク N との間には関係式

$$\frac{dM}{dt} = N \quad (36)$$

が成り立つ. 式 (36) の両辺に M を掛けると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M^2 \right) = MN \quad (37)$$

が得られる. 式 (37) における左辺の括弧内の物理量を $P \equiv M^2/2$ とおくと, P は慣性モーメント I と力学的エネルギー E の積 IE に他ならない. 式 (37) は P の時間微分が $Q \equiv MN$ に等しいこ

とを表しており、 Q は単位時間に外部から流体に供給されるエネルギーを表している。振動対流の場合は P と Q は振動をしながら指数関数的に増加あるいは減少をするので、それらの物理量の 1 振動周期 $T = 2\pi/\omega$ にわたる平均値 $\bar{P}$ および $\bar{Q}$ を

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} \frac{1}{2} M^2 d\tau, \quad \bar{Q} = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} MN d\tau \quad (38)$$

と定義する。ここで、 $M = \tilde{M} \exp(i\omega t + \sigma t) + \tilde{M}^* \exp(-i\omega t + \sigma t)$ と $N = \tilde{N} \exp(i\omega t + \sigma t) + \tilde{N}^* \exp(-i\omega t + \sigma t)$ を式 (38) に代入すると

$$\bar{P} = \tilde{M} \tilde{M}^* e^{2\sigma t} + O(\sigma), \quad \bar{Q} = \tilde{M} \tilde{N}^* e^{2\sigma t} + O(\sigma) \quad (39)$$

が得られる。ここで、 σ は $1/T$ に比べて小さいという近似を用いた。

物理量 $\tilde{M} \tilde{N}^* = \bar{Q} e^{-2\sigma t}$ とその各成分を $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$, $A = 1$ の場合に、 $1400 \leq Ra \leq 5900$ の範囲の各レイリー数について計算すれば図 9 のようになる。この図で、 $\tilde{M} \tilde{N}^*$ は振動対流の発生する臨界レイリー数 $Ra \leq 5900$ において負の値から正の値に変化しており、この物理量が振動攪乱の成長・減衰を決定していることが明らかとなった。すなわち、静止状態が振動型攪乱に対して不安定となるときは、 $Q \equiv MN$ が最大となる関数を探せばよいということになり、これまで微分方程式の固有値問題として取り扱ってきた線形安定性問題を変分原理から解く道筋が開かれた。このように、線形安定性問題を変分原理から解く方法はベナール対流においては知られており、チャンドラセカール (S. Chandrasekhar) はその著書 (*Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*[24]) の中で「*Instability occurs at the minimum temperature gradient at which a balance can be steadily maintained between the kinetic energy dissipated by viscosity and the internal energy released by the buoyancy force*」と述べている。

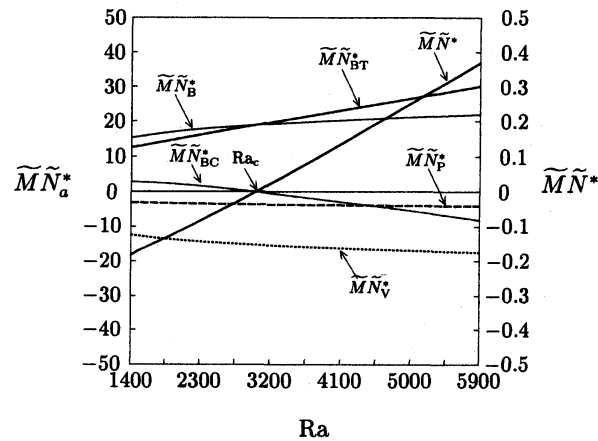


図 9: 角運動量 $\tilde{M}$ と流体に働くトルク $\tilde{N}^*$ の積および角運動量 $\tilde{M}$ と各トルク成分 $\tilde{N}_a^*$ の積。 $Ra_c = 3014$ 。細実線: $\tilde{M} \tilde{N}^*$ (右縦軸)。 $\tilde{M} \tilde{N}_a^*$ (左縦軸) は $\tilde{M} \tilde{N}_B^*$, $\tilde{M} \tilde{N}_{BT}^*$, $\tilde{M} \tilde{N}_{BC}^*$, $\tilde{M} \tilde{N}_P^*$ および $\tilde{M} \tilde{N}_V^*$ を表す。 $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$, $A = 1$ 。

3.4 数値シミュレーションの計算結果

線形不安定性により成長する攪乱は振動対流であることが分かったが、非線形効果によりどのような対流となるか調べるために 2 流体対流の数値シミュレーションを行う。代表例として、

$Ra = 3300$, $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$, $A = 1$ の場合のシミュレーション結果を見ると、図 10(a) のように、 $w_1 = w(1/4, 0)$ は 2 度ほど振動をした後、一定の値に近づき、定常対流に収束する。線形不安定性で誘起される攪乱が振動対流であるにもかかわらず、なぜ定常流に近づく理由を調べるために、 w_1 と dw_1/dt で表される位相図を描くと図 10(b) のようになる。この図からは少し見にくいですが、解は 2 回振動した後、横軸にある角度 α をもって定常解に収束する。このとき、 $dw_1/dt = -\cos \alpha (w_1 - w_{1\infty})$ となり、 $w_1 = (w_{10} - w_{1\infty}) \exp(-\cos \alpha t)$ のように、初期に w_{10} であった値は、時間と共に $w_{1\infty}$ に近づいていくことが分かる。

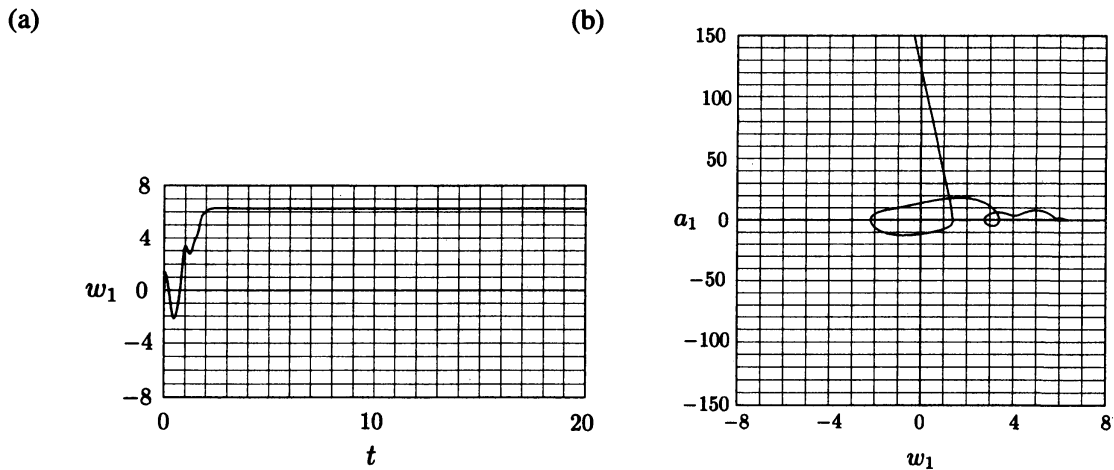


図 10: 流速 $w_1 = w(1/2, 0)$ と加速度 $a_1 = dw_1/dt$ の時間発展. (a) 流速の時間発展 w_1 . (b) (w_1, a_1) 平面の位相図. $Ra = 3300$, $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$, $A = 1$.

図 11(a)-11(c) はこのときの定常状態を表している。図 11(a) は流線と速度ベクトル図であり、流れ場はベナール対流とほとんど同じ 1 つ渦の構造をもつ。図 11(b) と ??(c) はそれぞれ温度攪乱場と濃度攪乱場である。温度攪乱場および濃度攪乱場は固有関数で見られた形と似ておらず、温度攪乱場は容器の対角線を挟んで高温度攪乱場と低温度攪乱場が分布し、濃度攪乱場は容器の上側では攪乱が小さく、下側では攪乱が大きくなるように分布している。

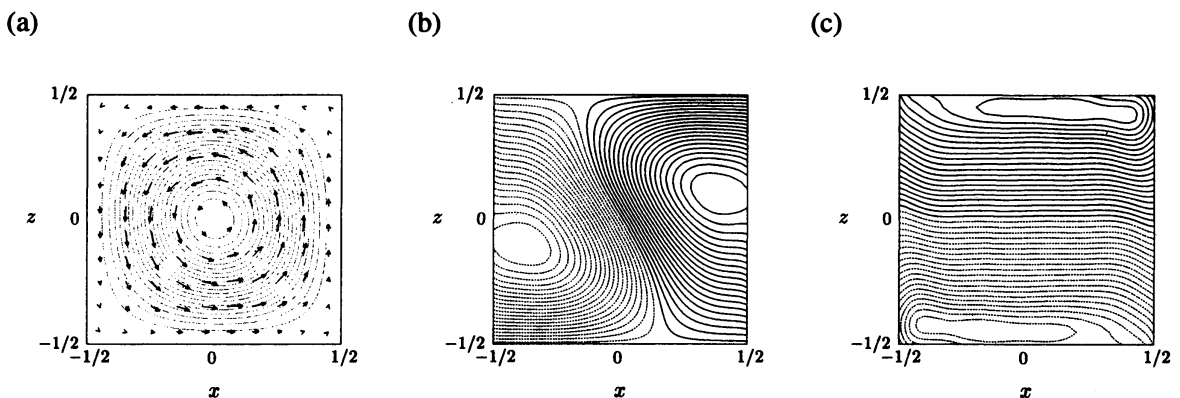


図 11: 流れ場 (ψ), 温度攪乱場 (θ) および濃度攪乱場 (η) の数値シミュレーション結果. $Ra = 3300$, $Le = 0.01$, $S = -0.1$, $Pr = 7$, $A = 1$. (a) 流線 (ψ の等高線) および速度ベクトル (矢印). (b) 温度攪乱場 (θ の等高線). 実線: $\theta > 0$, 点線: $\theta < 0$. (c) 濃度攪乱場 (η の等高線). 実線: $\eta > 0$, 点線: $\eta < 0$.

3.5 解の分岐構造

前節では、線形不安定性により成長する攪乱は振動対流であるにも関わらず、数値シミュレーションでは、攪乱は非線形効果により定常流に漸近することを説明したが、これは $Ra = 3300$ の場合に限らず、また、他のパラメータでもほとんどの場合に定常流に近づく結果となった。この一見矛盾した結果がなぜ生じるのか考えるために、定常解の直接計算を行い、定常解の分岐構造を求める。 $Le = 0.01$, $Pr = 7$, $A = 1$ の場合の定常解の分岐構造は図 12 のようになった。この図では $S = 0$, -0.1 , -0.2 の 3 つの場合の定常解の構造を表している。 $S = 0$ は純粋流体の場合なので、対流はベナール対流に帰着し、臨界レイリー数 $Ra_c = 2585$ のピッチフォーク分岐となっている。 $S = -0.1$ の場合はこれまでも見てきたように、線形臨界レイリー数は $Ra = 3014$ であり、定常解のサドルノード点よりも大きい値である。このような構造は $S = -0.2$ の場合も同様で、これらの分岐図は

$$Ra = aw_1^2 + \frac{b}{w_1^2} + c \quad (40)$$

のようにモデル化することができる。これはベナール対流の定常解の分岐構造を表す式に $1/w_1^2$ を付け加えたものとなっている。今後さらに振動流の解の分岐構造を求め、それらの解の安定性を調べればなぜ初期の振動攪乱が定常流に近づくのか明らかにすることができるが、それを待つまでもなく、物理的な考察で図 12 を理解することは容易である。すなわち、ピッチフォーク分岐構造をもつ純粋流体の対流中にほんの微量のアルコールを加えても突然対流が振動流となることは考えにくく、定常流に近づく予想の方が自然である。しかし、線形安定性解析では振動攪乱が不安定となることで、純粋流体の場合の臨界レイリー数 Ra_c は 2585 から無限大に行ってしまうので、ピッチフォーク分岐は構造不安定により、式 (40) の形に変形するのである。ただし、このように振動攪乱が定常流に近づく物理的な理由やもっと大きなアスペクト比では振動流へ漸近することなど、まだまだ興味深い現象があり、この後これらの謎に挑戦する予定である。

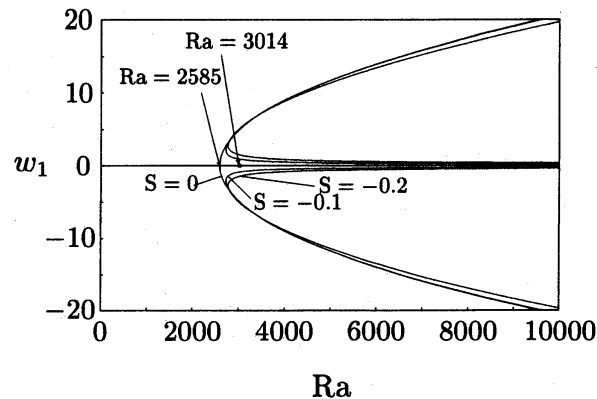


図 12: 定常解の分岐図。 $Ra = 2585$ は $S = 0$ におけるピッチフォーク分岐点。 $Ra = 3014$ は $S = -0.1$ におけるホップ分岐点。 $Le = 0.01$, $S = 0, -0.1, -0.2$, $Pr = 7$, $A = 1$ 。

参考文献

- [1] H. Bénard, "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide," Rev. Gén. Sciences Pure Appl. 11 (1900), 1261-1271, 1309-1328.

- [2] E. L. Koschmieder, "Bénard cells and Taylor vortices," (1993, Cambridge Univ. Press, Cambridge) pp. 4-195.
- [3] W. V. R. Malkus and G. Veronis, "Finite amplitude cellular convection," *J. Fluid Mech.* **4** (1958) pp. 225-260. **4** (1958) 225.
- [4] F. H. Busse and R. M. Clever, "Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number," *J. Fluid Mech.* **91** (1979) pp. 319-335.
- [5] 柳瀬眞一郎, "二重拡散対流のカオス," *流れ*, **7** (1988), pp. 3-14.
- [6] E. Knobloch, "Oscillatory convection in binary mixtures," *Phys. Rev. A*, **34** (1986), pp. 1538-1549.
- [7] E. Knobloch and D. R. Moore, "Linear stability of experimental Soret convection," *Phys. Rev. A*, **37** (1988), pp. 860-870.
- [8] J. K. Platten, "The Soret effect: A review of recent experimental results," *J. Appl. Mech.*, **73** (2006), pp. 5-15.
- [9] P. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner and C. M. Surko, "Traveling waves and chaos in convection in binary fluid mixtures," *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985) pp. 4964-99.
- [10] P. Kolodner, D. Bensimon, and C. M. Surko, "Traveling-wave convection in an annulus," *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988) pp. 1723-1727.
- [11] P. Kolodner, "Collisions between pulses of traveling-wave convection," *Phys. Rev. A*, **44** (1991) pp. 6466-6479.
- [12] P. Kolodner, "Counterpropagating quasilinear wave packets in binary-fluid convection," *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992) pp. 2519-2522.
- [13] D. Bensimon, P. Kolodner, C. M. Surko, H. Williams and V. Croquette, "Competing and coexisting dynamical states of travelling-wave convection in an annulus," *J. Fluid Mech.*, **217** (1990) pp. 441-467.
- [14] D. Jung, P. Matura and M. Lucke, "Oscillatory convection in binary mixtures: Thermodiffusion, solutal buoyancy, and advection," *Eur. Phys. J. E*, **15** (2004) pp. 293-304.
- [15] T. Watanabe, K. Toyabe, M. Iima and Y. Nishiura, "Time-periodic traveling solutions of localized convection cells in binary fluid mixture," *Theor. Appl. Mech. Japan*, **59** (2011) pp. 211-219.
- [16] P. Couillet, C. Riera and C. Tresser, "Stable static localized structures in one dimension," *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000) pp. 3069-3072.
- [17] P. Couillet, "Localized patterns and fronts in nonequilibrium systems," *Int. J. Bif. Chaos*, **12** (2002) pp. 2445-2457.
- [18] J. Mizushima, "Onset of the thermal convection in a finite two-dimensional box," *J. Phys. Soc. Japan*, **64** (1995), pp. 2420-2432.

- [19] J. Mizushima and T. Adachi, "Sequential transition of the thermal convection in a square cavity," *J. Phys. Soc. Japan*, **66** (1997), pp. 79-90.
- [20] J. Mizushima and T. Nakamura, "Repulsion of eigenvalues in the Rayleigh-Bénard problem," *J. Phys. Soc. Japan*, **71** (2002), pp. 677-680.
- [21] I. Mercader, O. Batiste, A. Alonso and E. Knobloch, "Localized pinning states in closed containers: Homoclinic snaking without bistability," *Phys. Rev. E*, **80** (2009), pp. 025201-1-4.
- [22] Y. Takemoto, K. Kawanishi, J. Mizushima, "Heat transfer in the flow through a bundle of tubes and transitions of the flow," *Int. J. Heat Mass. Trans.*, **53** (2010), pp. 5411-5419.
- [23] P. Kolodner, H. Williams and C. Moe, "Optical measurement of the Soret coefficient of ethanol/water solutions," *J. Chem. Phys.*, **88** (1988) pp. 6512-6524.
- [24] S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic stability," (1961, Clarendon Press, Oxford) chap. 1, sec. 13-14.