

一般化詰め将棋の PSPACE 困難性について

名古屋大学大学院人間情報学研究科 横田 雅也 (Masaya YOKOTA)
名古屋大学大学院人間情報学研究科 築地 立家 (Tatsue TSUKIJI)

概要 一般化詰め将棋問題の計算複雑さについて、伊藤ら [1] は、縦横 n マスに王将を除く各駒が $O(n)$ 枚ずつ配置されている盤面が与えられたとき、詰め手順があるかどうかを判定する問題が NP 困難であることを証明した。本稿では、一般化詰め将棋問題が PSPACE 困難であることを証明する。

1 はじめに

詰め将棋の盤面を縦横 n マスに一般化したものを考える。この一般化の方法は一般化将棋 (安達ら [2]) に準じたものである。ルールや駒の動きは通常の縦横 9 マスの詰め将棋と同じである。王将を除く各駒は $O(n)$ 枚ずつある。王将は後手に 1 枚あり、先手は持たない。

一般化詰め将棋の詰め手順の存在問題 (以下 TS と略) の計算複雑さについては、[1] によって NP 困難であることが示されている。本稿では、PSPACE 完全であることが知られている次の問題を TS に帰着することによって、TS が PSPACE 困難であることを示す。

問題 QBF

入力 自由変数を持たない量限定ブール式 $\phi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \psi$ 。ここで、 $Q_i = \forall$ または $\exists$ ($i = 0, 1, \dots, n$)、 $\psi = \bigwedge_{j=1}^m C_j$ 、 $C_j = \bigvee_{k=1}^{s_j} L_{jk}$ 、 $L_{jk} \in \{x_1, \neg x_1, \dots, x_n, \neg x_n\}$ 。

質問 ϕ は充足可能か?

QBF から TS への還元の方針をあらかじめ示しておく。まず、第 2 節で示す手順で ψ から有向平面グラフ H を構成する。この H は、 ψ が充足可能なときかつそのときに限ってハミルトン閉路が存在するように構成する。次に、第 3 節で示す手順で H の辺や頂点の各部に対応するよう駒を配置して、 H を模擬するような詰め将棋の盤面 B を構成する。この B は、 ϕ が真であるときかつそのときに限って詰め、しかもその手筋が H 上のハミルトン閉路を模擬しているように構成する。

2 H の構成

この節では、任意の和積標準式 ψ から有向平面グラフ H を構成する手順を説明する。この構成手順は、Plesník [3] が示した、SAT から次数制限付き有向平面ハミルトン閉路問題への還元のアイディアを用いたものである。

まず、 H の骨組みとするグラフ Z を次のようにして与える； $4n+2 \sum_{j=1}^m s_j$ 個の頂点を与え、各々を z_i と呼ぶこととする； $i =$ 奇数の各々に対し有向辺 (z_i, z_{i+1}) を 2 本、 $i =$ 偶数の各々に対し有向辺 (z_i, z_{i+1}) を 1 本与える。ここで、各 z_i に新たな名前を与える； $i = 1, \dots, n$ に対し、 $z_{2i-1}, z_{2i}, z_{2i+1}, z_{2i+2}$ をそれぞれ $a_i^T, a_i'^T, a_i^F, a_i'^F$ と呼ぶ； $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, s_i$ に対し、 $z_{t(i,j)}, z_{t(i,j)+1}$ をそれぞれ b_{ij}, b_{ij}' と呼ぶ (ただし $t(i,j) = 4n + \sum_{k=1}^i s_k + 2j - 1$)。また、辺にも名前を与える； a_i^T から $a_i'^T$ へ接

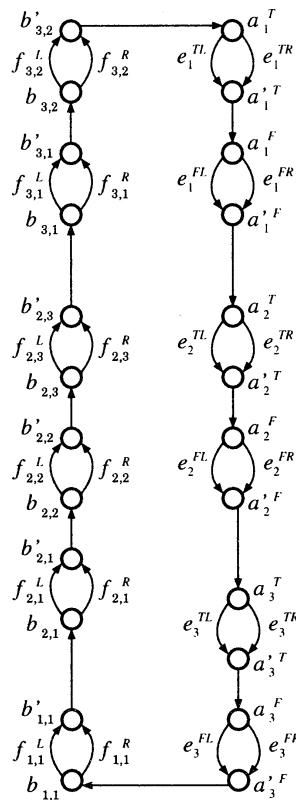


図 1: $\psi = x_3 \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ に対する Z の例

続する 2 辺を e_i^{TL}, e_i^{TR} と呼び、 a_i^F から $a_i'^F$ へ接続する 2 辺を e_i^{FL}, e_i^{FR} と呼ぶ； b_{ij} から b_{ij}' へ接続する 2 辺を f_{ij}^L, f_{ij}^R と呼ぶ。このような Z の例を図 1 に示す。

次に、 Z 上のハミルトン閉路 C に以下のような制約を付加することを考える。

制約 (1) C は e_i^{TR} を含む $\Leftrightarrow C$ は e_i^{FR} を含まない。

制約 (2) C は $e_i^{TL} (e_i^{FL})$ を含む $\Leftrightarrow L_{jk} = x_i (\neg x_i)$ を満たすすべての j, k に対し、 C は f_{jk}^R を含まない。

制約 (3) $j = 1, \dots, m$ の各々に対し、 C は $f_{j1}^R, f_{j2}^R, \dots, f_{j,s_j}^R$ のうち少なくとも 1 辺を含まない。

ここで、 $i = 1, \dots, n$ の各々に対し、 C が e_i^{TL} を含むときかつそのときに限って ψ の変数 x_i に割り当てる値を 1 (そうでなければ 0) とする。このとき、 ψ を充足するような変数値の割り当てが存在するならばそのときに限り Z 上に制約 (1)(2)(3) を満足するハミルトン閉路 C が存在する。ところで、 Z 上のハミルトン閉路は上記の制約を満足するとは限らない。そこで、 Z から新グラフ H を構成し、「 Z 上に制約 (1)(2)(3) を満たすハミ

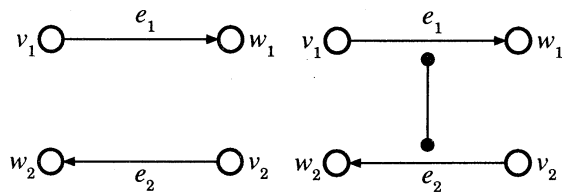


図 2: XOR ライン設置前 図 3: XOR ライン略記

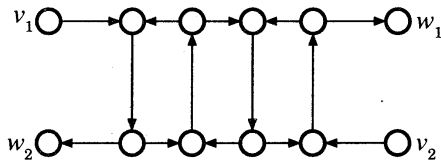


図 4: XOR ライン定義

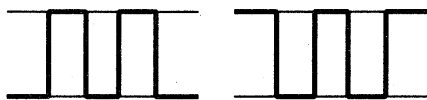


図 5: XOR ラインにおけるハミルトン閉路のとりかた

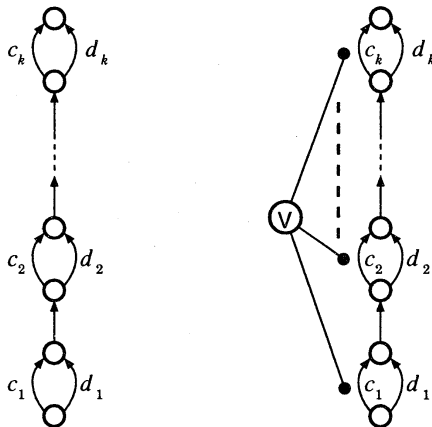


図 6: OR ユニット設置前 図 7: OR ユニット略記

ルン閉路が存在する」ことと「 H 上にハミルトン閉路が存在する」が同値となるようにすればよい。実際、そのような H は Z に対し辺や頂点を順に削除、追加することによって効率的に構成できる。

Z から H を構成する手順を説明するために、「XOR ライン」と「OR ユニット」という部品を準備する。

XOR ラインとは、任意のグラフ G 上にハミルトン閉路 G が存在するとき、 G の 2 辺 e_1, e_2 に対し「 C が e_1 を含む $\Leftrightarrow C$ は e_2 を含まない」という制約を付加するための部品である。「 G の辺 $e_1 = (v_1, w_1), e_2 = (v_2, w_2)$ 間に XOR ラインを張る」とは、 G から辺 e_1, e_2 を削除した後に図 4 のように新たな頂点と辺を追加したグラフ G' を構成することであり、図 3 のように略記する。 G' 上のハミルトン閉路 C' は XOR ラインの部分において図 5 のいずれかのようなとり方しかできない。

OR ユニットとは、任意のグラフ G 中の図 6 のような

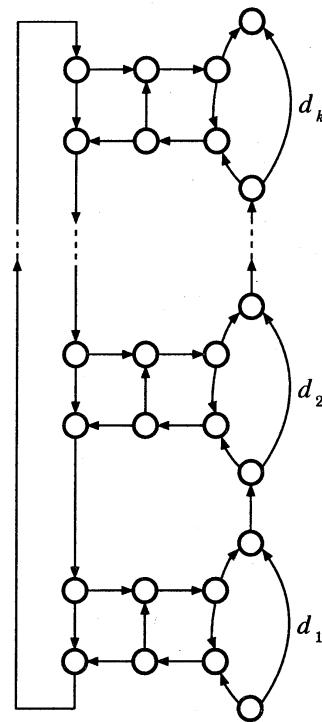


図 8: OR ユニット定義

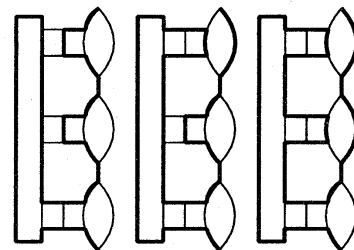


図 9: OR ユニットにおけるハミルトン閉路のとりかた

辺 $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_k$ に対し「 G 上のハミルトン閉路 C が存在する $\Leftrightarrow d_1, \dots, d_k$ のうち少なくとも 1 辺は C に含まれない」という制約を付加するための部品である。「 G の辺 $c_1, \dots, c_k$ 間に OR ユニートを張る」とは、 G から $c_1, \dots, c_k$ を削除した後に図 8 のように新たな頂点と辺を追加したグラフ G' を構成することで、図 7 のように略記する。たとえば 3 辺間に OR ユニートを張った場合、 C' は図 9 のいずれかのようなとり方しかできない。

これらの部品を用いて Z から H を構成する。

1. $i = 1, \dots, n$ に対し、 e_i^{TR} と e_i^{TL} の間に XOR ラインを張る (制約 (1) を付加)。
2. $L_{jk} = x_i$ なるすべての j, k に対し e_i^{TL}, f_{jk}^{TR} 間に XOR ラインを張る。また $L_{jk} = \neg x_i$ なる j, k に対しても e_i^{FL}, f_{jk}^{RL} 間に XOR ラインを張る (制約 (2) を付加)。
3. $j = 1, \dots, m$ に対し $f_{j1}^{TL}, f_{j2}^{TL}, \dots, f_{j,s_j}^{TL}$ の間に OR ユニートを張る (制約 (3) を付加)。

図 1 の Z に対応する H の例を図 10 に示す。上記 2. において XOR ラインが交差するであろうが、図 11 のよ

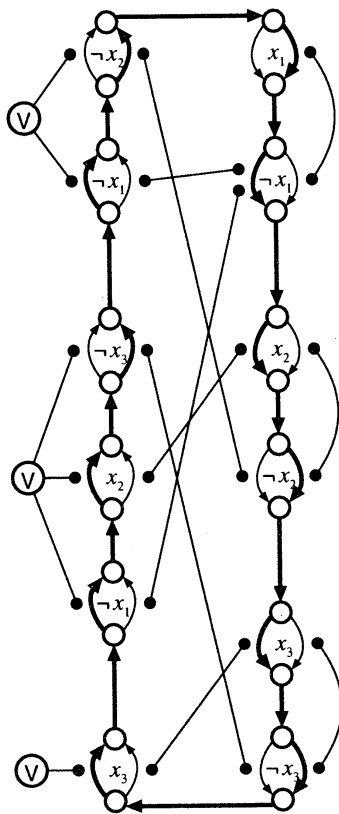


図 10: $\psi = x_3 \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ に対する H の例 (ψ を充足する値は $x_1 = 0, x_2$ は任意, $x_3 = 1$ 、太く表示されている辺はハミルトン閉路の経路)

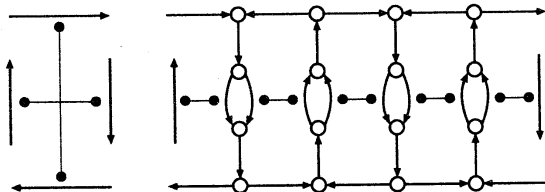


図 11: XOR ラインの交差の解決

うに解決することで H の平面性は保たれる。また H のすべての頂点の次数が 3 であることは明らかである。

3 盤面 B の構成

この節では、任意の量限定ブール式 ϕ と、 ϕ 中の和積標準式 ψ から第 2 節に示した手順で構成した H を経由して、盤面 B を構成する。この構成手順は [1] のアイディアをベースとしている。議論の中心は、 H の辺や頂点の各々に対応するように盤面への駒の配置方法 (以下、単に部品と呼ぶ) を準備することである。

まず、 H の有向辺に相当する部品を準備する。各有向辺に相当する部品では先手がその辺の向きにしたがって玉を追うしかないように構成する。辺は垂直・水平線分のみで描画できるので、それらに対応して、垂直・水平方向に真っ直ぐ玉を追う部品や垂直方向から水平方向 (または逆) へ方向を変えて玉を追う部品を準備すればよい。

図 12, 13 はそれぞれ玉を上または下に追う部品である。



図 12: 上へ追う部品

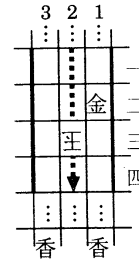


図 13: 下へ追う部品

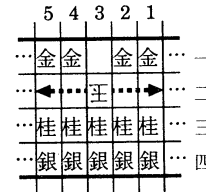


図 14: 左あるいは右へ追う部品

図 12 では先手の 2 三歩に対し後手は 2 一玉と動かすので、これを繰り返すことにより玉は上に追われる。図 13 では先手から 1 三金、2 四玉と動くことにより玉は下に追われる。図 14 は玉を左または右に追う部品である。先手から 3 一金左、2 二玉と動くことにより玉は右に追われ、3 一金右、4 一玉と動くことにより玉は左に追われる。

図 15 は上向きに追ってきた玉を左向きに追うための部品である。先手から 2 七歩、2 五玉、2 六歩、2 四玉、2 五歩、2 三玉、2 四歩、3 二玉、3 一金、4 二玉、4 一金右、5 二玉と動くことにより玉は左向きに追われる。図 17 は右向きに追ってきた部品を上向きに追うための部品である。5 三金左、4 四玉、4 三金下、3 四玉、3 五歩、2 三玉、2 四歩、2 二玉、2 三歩、2 一玉と動くことにより玉は上向きに追われる。図 18 は下向きに追ってきた玉を左向きに追うための部品である。1 二金、2 三玉、1 三金、3 四玉、2 五金、4 四玉、4 三金、5 四玉と動くことにより玉は左向きに追われる。図 16 は右向きに追ってきた部品を下向きに追うための部品である。5 一金左、4 二玉、4 一金左、3 二玉、3 一金左、2 三玉、1 三金、2 四玉と動くことにより玉は下向きに追われる。

図 15, 16, 17, 18 に無いような方向転換を行う箇所についても、これらを鏡像反転した部品を用いることで構成できる。ただし玉を右向き、下向き、右向きの順に追う場合には、単純に部品を組み合わせるだけでは下向きから右向きに変わる部分で金の位置が食い違ってしまい所望の配置が得られないことに注意しなければならない。この場合、右向き、下向き、左向き、下向き、右向きの順に追うように変更することで解決できる。左向き、下向き、左向きの場合も同様に解決する。

次に、 H の頂点に相当する部品を準備する。

図 19 は $Q_i = V$ に対する頂点 a_i^T に対応する部品である。この部品において先手は上向きに追ってきた玉を左右いずれかに追うしかなく、かつ玉が左右いずれに追われるかは後手が選択する。まず先手から 4 八歩、4 六玉、

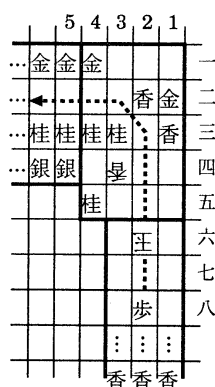


図 15: 上向きから左向きへ曲がって追う部品

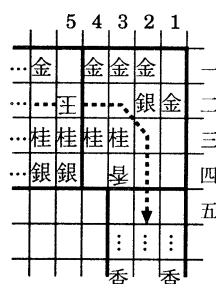


図 16: 右向きから下向きへ曲がって追う部品

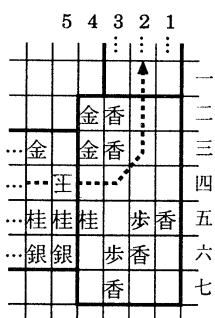


図 17: 右向きから上向きへ曲がって追う部品

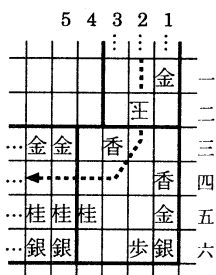


図 18: 下向きから左向きへ曲がって追う部品

4 七歩、4 五玉、4 六歩、4 四玉、4 五歩、5 三玉、6 四金 (ここで先手は歩を1枚入手)と動く。ここで後手は4二と6二のいずれに玉を動かすかを選択できる。4二に動かす場合は4一金左、3二玉、3一金左、2二玉、2一金左、1二玉と動き玉は右向きに追われる。6二に動かす場合も同様に6一金右、7二玉と動き玉は左向きに追われる。

図 20 は入次数1 出次数2 の頂点のうち $Q_i = \vee$ なる a_i^T 以外の頂点に対応する部品である。図 19 と同様に先手は上向きに追ってきた玉を左右いずれかに追うしかないように構成されているが、玉が左右いずれに追われるかは先手を選択する。まず先手から4八歩、4六玉、4七歩、4五玉、4六歩、4四玉、4五歩、5三玉、6四金 (先手は歩を1枚入手)、5二玉と動く。ここで先手は王手をかける際に4一と6一にある金のいずれを5一に動かして王手をかけるかを選択できる。4一金を動かす場合は4二玉、4一金左、3二玉、3一金左、2二玉、2一金左、1二玉と動き玉は右向きに追われる。6一金を動かす場合は6二玉、6一金右、7二玉と動き玉は左向きに追われる。

図 21, 22 は入次数2 出次数1 の頂点に対応する盤面である。先手は左右どちらから追ってきた玉を上向きに追うしかなく、かつこの部品の中をひとたび玉が通過したならば次にこの部品の中に玉が追われてきた場合に不詰みとなる。図 21 は左から玉が追われてきた状況を示している。ここで、9三金左、8四玉、8三金左、7四玉、6六桂、6三玉、7三金、5二玉、5三歩 (先手は歩を1枚

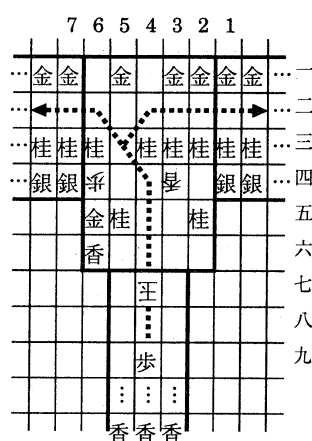


図 19: 入次数1 出次数2 の頂点に対応する部品 (後手選択)

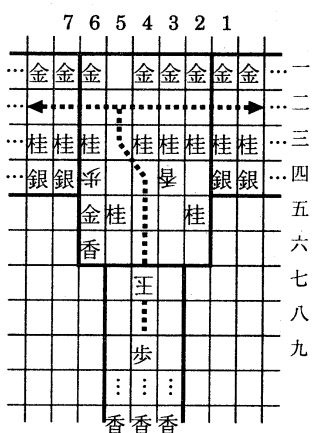


図 20: 入次数1 出次数2 の頂点に対応する部品 (先手選択)

入手)、5一玉と動くことにより玉は上向きに追われていく。図 22 は左から上へと玉が通過した後再び右から玉が追われてきた状況を示している。まず1三金右、2四玉、2三金右、3四玉と動く。すると先手は3六にある銀を3五ないしは4五に動かして王手をかけることができるが同玉で不詰みとなってしまう。ゆえに3三金引と動かして王手をかけるしかないがこれは2四玉引で千日手となってしまう。ゆえにこの状況では必ず不詰みとなる。

最後に「王将部」と「通過頂点数確認部」という部品を準備する。これらは、辺 (b'_{m,s_m}, a_i^T) の途中に図 23 のようにはさむ特別な部品である。王将部は初期盤面において玉が配置される部分であり、先手が最終的に玉を詰ませられる唯一の場所である。通過頂点数確認部は先手の持ち駒である歩の枚数が H の頂点数以上ある場合かつそのときに限り通過できる部品である。

通過頂点数確認部を図 24 に示す。まず先手から1二金右、2三玉、2二金下、3三玉と動く。ここで先手は歩を持っていれば3四に歩を打って王手をかけられるが、もってなければ不詰みとなる。先手の3四歩に対し後手は4三玉と動かすしかない、先手は歩を H の頂点数枚だ

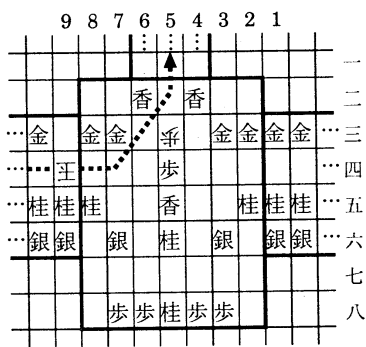


図 21: 入次数 2 出次数 1 の頂点に対応する部品 (一度目の進入時)

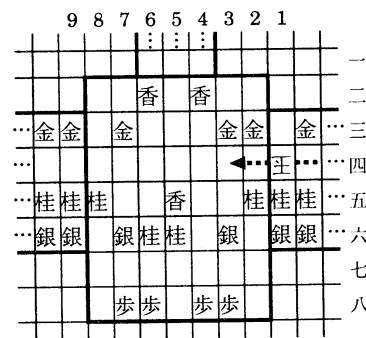


図 22: 入次数 2 出次数 1 の頂点に対応する部品 (二度目の進入時)

け持っていれば、この繰り返しで 7 三まで玉を左に追うことができる。その後、先手から 7 二金、8 三玉と動くことで玉は左に追われ王将部へと導かれる。

初期盤面の王将部を図 25 に示す。先手から 6 六桂右、5 三玉、6 五桂、6 二玉、5 四桂、7 二玉、7 一金、8 二玉と動くことにより玉は左向きに追われる。玉が通過頂点数確認部を通過した後に王将部の右端に追われてきた局面を図 26 に示す。先手から 1 四金右、2 五玉、2 四金右、3 五玉、3 六歩、4 五玉、4 六歩、5 四玉、5 五歩と動くことにより玉を詰ませることができる。

以上の部品を用いて次のような手順で B を構成する。

1. H の各辺を、水平線分と垂直線分だけを用いて平面上に表現する。これを F と呼ぶ。ここで、 F は以下の要請を満たすように構成する；(a) 各々の辺が互いに交差したり重なったりしないようにする；(b) 複数の頂点が同一の垂直線の上に位置しないように調整する；(c) 複数の垂直線分が同一の垂直線の上に位置しないように調整する；(d) 辺 (b'_{m,s_m}, a_1^T) を表現する水平線分の長さは H の頂点数のオーダーであり、かつその水平線分を横切る垂直線には垂直線分が含まれないように調整する。(b)(c)(d) は次のステップで二歩禁則に反することがないようにするため要請している。とくに (d) は、図 23 のような配置を行なうための要請である。
2. F をもとに、先に準備した部品を用いて盤面を構成する。これを B と呼ぶ。ここで、 B は王将が中央に位置

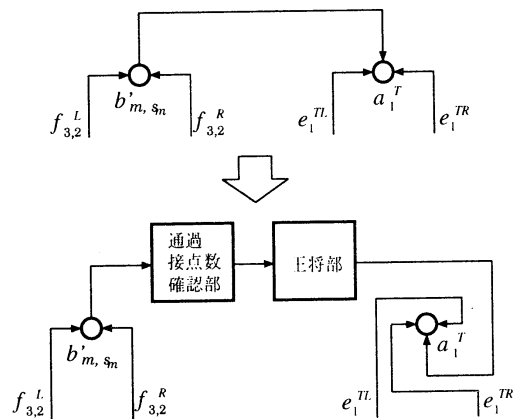


図 23: 王将部, 通過頂点数確認部の配置

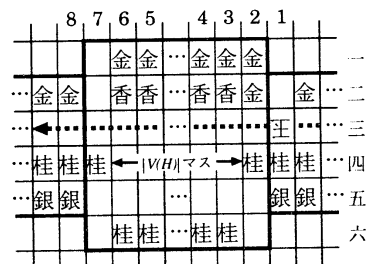


図 24: 通過頂点数確認部

するように配置する。

3. 先手の持ち駒は無し、後手の持ち駒は盤面に配置されていない駒すべて、とする。

4 TS の PSPACE 困難性の証明

補題 1 盤面 B は与えられた量限定ブール式 ϕ から多項式時間で構成可能である。

(証明) ϕ から B を構成する各ステップが多項式時間で実行できることを示せば十分である。

1. 第 2 節で示した手順で ψ から有向グラフ H を多項式時間で構成できることは [3] によって示されている。
2. 第 3 節で示した手順で H から F を構成する。 H は平面グラフなので辺が交差しないように平面に埋め込むことができるが、それを線形時間で実行できることが Hopcroft ら [4] によって示されている。 H の各頂点の次数は 3 なので、各辺を垂直線分と水平線分の組み合わせで表現することができる。描画する辺の長さ等に制限を与えないならば、多項式時間で表現することが Tamassia [5] によって示されている。さらに、頂点および垂直線分の位置調整も辺の本数の多項式オーダーで実行できる。
3. 第 3 節で示した手順で ϕ と F から B を構成する。 F の各辺に対応する部品のサイズはその辺の長さのオーダー、各頂点に対応する部品のサイズは定数オーダー、通過頂点数確認部のサイズは頂点数のオーダー、王将部のサイズは定数オーダーである。ゆえに、各部品の配置は F の辺の個数および最大辺の長さの多項式オーダーで実行できる。□

補題 2 与えられた量限定ブール式 ϕ に対応する盤面 B は、 ϕ が真であるときかつそのときに限って詰む。

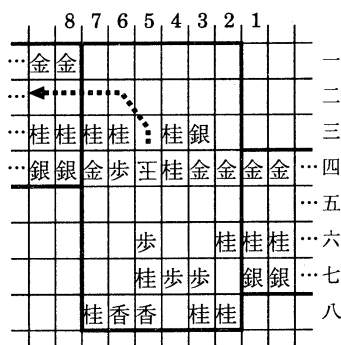


図 25: 王将部 (開始時)

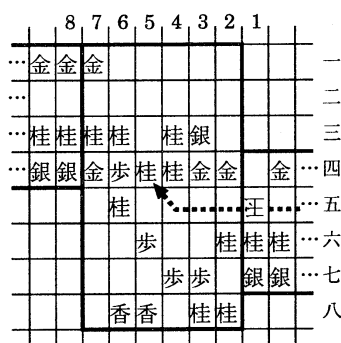


図 26: 王将部 (終了時)

(証明) まず ϕ が真であると仮定する。すると制約 (1)(2)(3) を満たす Z 上のハミルトン閉路 C を次のようにして構成できる。

1. 辺集合 E と $x_1, \dots, x_n$ の値の割当て $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ を介して構成する。まず $E = \emptyset$ と初期化し、 $i = 1, \dots, n$ の順で次のように E を拡張する； (a) $Q_i = \exists$ ならば、帰納法の仮定より $Q_{i+1}x_{i+1} \dots Q_n x_n \psi(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ が真となる $a_i \in \{0, 1\}$ が存在する。そこで、 $Q_{i+1}x_{i+1} \dots Q_n x_n \psi(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ が真ならば $a_i = 1$ と定めて E に辺 e_i^{TL} を加え、そうでなければ $a_i = 0$ と定めて e_i^{TR} を加える； (b) $Q_i = \forall$ ならば、 $a_i \in \{0, 1\}$ を任意に選択し $a_i = 1$ ならば E に辺 e_i^{TL} を、 $a_i = 0$ ならば e_i^{TR} を加える。

2. E の辺をすべて通過し、かつ制約 (1)(2)(3) を満たすハミルトン閉路を C とする (このような C は唯一存在)。

H 上のハミルトン閉路 C' は C から直ちに導くことができる。ゆえに、 B において先手は C を模擬するような経路で玉を追えば、玉を詰ませることができる。

次に、 B に詰みがあると仮定する。 B において先手が玉を詰ませられる場所は初期盤面で玉が配置されていた位置のみであるから、先手が玉を追う経路は通過頂点数確認部を通過していなければならない。そのためには H の各々の頂点に対応する部品において先手が歩を 1 枚残らず得る必要がある。ゆえに先手は H の全ての頂点を通する閉路を模擬するように玉を追わなければならない。

H の頂点のうち入次数 2 出次数 1 の頂点に対応する部品は、ひとたび玉を通過させると再び通過させようとしても不詰みとなるので、先手は H 上のハミルトン閉路を模擬するように玉を追わなければならない。このとき玉は $a_1^T, \dots, a_n^T$ にあたる部品の各々を順に通過するように追われる。したがって $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ という順番が損なわれることがない。すなわち玉の詰め手順はこの順番に沿った変数への真偽値割り当てと一対一に対応する。

また、 $Q_i = \forall$ なる H の頂点 a_i^T に対応する部品において、後手が玉を逃がす方向として e_i^{TL}, e_i^{TR} のどちらにあたる経路を選んだとしても $Q_i = \exists$ なる a_i^T に対応する部品において先手が玉を追う経路として e_i^{TL}, e_i^{TR} にあたるいずれか適切な側を選択すれば詰みはある。言葉を変えると、 $\psi(x_1, \dots, x_n)$ は、 $x_1, \dots, x_n$ の順番で adaptive に変数への真偽値割り当てを行うとき、 $\forall$ 部分でいかなる選択をしても $\exists$ 部分で適切な選択を行えば真となる。すなわち $\phi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi$ は真である。□

以上より、次の定理は証明された。

定理 3 TS は PSPACE 困難である。

また B は次の特徴を満たす盤面である；詰んだ状態の盤面における玉の位置が、初期盤面における玉の位置と同じである「還元玉」；詰んだ状態の盤面において、玉は盤面の中央に位置する「都詰め」；小駒しか使わない「小駒図式」；初期盤面に成り駒が存在しない「成り駒無し」。ゆえに以下が成り立つ。

系 4 TS は、小駒図式、成り駒無し、還元玉、都詰めの趣向を満たすものに限ってもなお PSPACE 困難である。

5 終わりに

一般化詰め将棋は指数時間計算可能であるが PSPACE 計算可能とは考えにくく、[1] で述べられているように指数時間完全である可能性も否定できないと思われる。

謝辞 本研究を始めるにあたり、多大な動機付けおよび助言を下さった伊藤大雄先生に感謝します。

参考文献

- [1] 伊藤大雄, 藤井慎二, 上原秀幸, 横山光雄, 一般化詰め将棋問題の計算複雑さ—小駒図式、成り駒無し、還元玉、都詰めの考慮, 電子情報通信学会技術研究報告, COMP99-24 (194), pp. 17-24, 1999.
- [2] 安達博行, 亀川裕之, 岩田茂樹, $n \times n$ 盤面上の将棋の指数時間完全性について, 電子情報通信学会論文誌 J70-D, 10, pp. 1843-1852, 1987.
- [3] J. Plesník, The NP-completeness of the hamilton cycle problem in planar digraphs with degree bound two, Information Processing Letters, 8, pp. 199-201, 1979.
- [4] J. Hopcroft and R. E. Tarjan, Efficient planarity testing, Journal of the Association for Computing Machinery, 21, pp. 549-568, 1974.
- [5] R. Tamassia, On embedding a graph in the grid with the minimum number of bends, SIAM Journal of Computing, 16, pp. 421-444, 1987.