

準安定および不安定状態の崩壊の確率過程

京大・理 富 田 博 之

狭い意味での相転移現象に限らず多くの場合に、2つ以上の安定点をもつような問題にしばしば出会う。ここでは、そのような問題で、確率過程を支配するマスター方程式が与えられた時、準安定あるいは不安定状態の崩壊過程を固有値問題として解き、特に崩壊速度が体系の大きさにどのように依存するか、を議論したい。結論の詳細は既にいくつか発表してあるので御参照いただきたい。¹⁾

このような問題では、局所安定性を扱う線型理論では明らかに限界があり、マスター方程式の大域的安定性を調べる必要がある。従ってある程度厳密な議論を行うためには、どうしても固有値問題に帰さねばならない。

マスター方程式は平衡状態で詳細つりあいが成立っている時、自己随伴型に変換することができる。言い換えれば、詳細つりあいが成立つ時には、マスター方程式の固有値は実数であり、安定な定常解をもつならば、固有値のひとつはゼロ、他はすべて正（もちろん定義によるが）と言える。この変換を次のようなフォッカー・プランク方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) P(x, t) \quad (1)$$

に適用すれば、

$$P(x, t) = P_0(x)^{1/2} \psi(x, t), \quad P_0(x) \propto \exp \{ -F(x)/\epsilon \} \quad (2)$$

とにおいて、

$$-\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \mathcal{H} \psi(x, t)$$

$$\mathcal{H} = -\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (3)$$

$$V(x) = (F'(x)/2)^2 - \epsilon F''(x)/2$$

富田博之

と、シュレーディンガー方程式に変換される。 ϵ は任意でよいが、ここでは、体系の大きさを Ω の逆数、 $\epsilon = \Omega^{-1}$ を表わすとする。²⁾ たとえば、ワイス近似の動的イジングモデルでは、 Ω はスピンの数 N で、 x は磁化密度 M/N 、 $F(x)$ は 1 スピン当りの自由エネルギーに $\beta = 1/(kT)$ をかけたものである。ただし、遷移確率は N に比例する²⁾とし、2 次モーメントは定数と仮定して (1) が得られる。

準安定状態の問題は次のように議論できる。 $F(x)$ として、

$$F(x) = F_0(x) - Hx$$

とし、 $F_0(x)$ は十分深い 2 つの極小をもつ対称な函数、例えば

$$F_0(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2$$

を考えよう。 $F_0(x)$ の具体的な形は特に重要ではなく、 $x=0$ で極大、 $x=\pm a$ で極小となること以外は、後の議論で使われるのは、

$$\Delta F_0 = F_0(0) - F_0(a), \quad r = F_0''(a), \quad r^* = |F_0''(0)|$$

だけである。まず $H=0$ の場合を考えよう。

このような $F_0(x)$ に対しては、ポテンシャル $V(x)$ は、3 つの井戸 — $x=0$ に底の高さ ϵr^* 、 $x=\pm a$ に高さ $-\epsilon r$ — を持ちスピノダル点すなわち $F_0(x)$ の変曲点に障壁をもつ。こうして、このようなポテンシャルの中での固有値問題、すなわち

$$\psi(x, t) = e^{-\lambda t} \phi(x)$$

とにおいて、

$$\epsilon \lambda \phi(x) = \left[-\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \phi(x) \quad (4)$$

を解くことに帰着する。基底状態は、明らかに、

$$\lambda_0 = 0, \quad \phi_0 = P_0(x)^{1/2} \propto \exp [-F_0(x)/2\epsilon]$$

であり、第一励起状態は、左、右の底での近似的な基底状態 $\psi_L(x)$ 、 $\psi_R(x)$ を用いて

$$\phi_0 = (\psi_L + \psi_B)/\sqrt{2}$$

$$\phi_1 = (\psi_L - \psi_R)/\sqrt{2}$$

と仮定すれば、 ϵ が十分小さい時、

$$\lambda_1 \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{r r^*} e^{-\Delta F_0/\epsilon} \quad (5)$$

となる。これは Langer 等³⁾ により全く別の考え方から求められている 核形成速度と同じ形をしている。実際、平衡分布への接近は、始状態として、

$$\psi(x, 0) = \phi_0 + \phi_1 = \sqrt{2} \psi_L$$

すなわち、左側の底に局在化した準平衡分布をとっておけば、

$$\psi(x, t) = \phi_0 + \phi_1 e^{-\lambda_1 t} \quad (6)$$

$$B(x, t) = P_0(x) + \phi_0 \phi_1 e^{-\lambda_1 t}$$

となり、 λ_1 を緩和定数と考えてよい。次に、 $H \neq 0$ ，すなわち非対称になり、極小値の相対差がある場合を考えよう。この時は、ポテンシャルは

$$V(x) = \frac{H}{2} F'_0(x) + \frac{H^2}{4}$$

となり、摂動的な扱いが可能である。普通の摂動展開を行うと、

$$\lambda_1(H) - \lambda_0(H) = \lambda_1(0) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{aH}{\epsilon} \right)^2 + \dots \right] \quad (7)$$

が得られるが、 ϵ が Ω^{-1} というように非常に小さい時には、これは現実的ではない。研究会では、 ϵ を入れない計算で (7) を示したが、以上の理由から、その後の計算で補足しておきたい。

外場 H が、 $F(x)$ に対する仮定 —— 2つの底が十分深い —— を損わない程度に小

富田博之

さい時 ($H \ll \Delta F_0$) には、摂動のある場合の波動函数 $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1$ は、やはり ψ_L, ψ_R 従って無摂動の時の ϕ_0, ϕ_1 で構成できると考えられる。そこで、

$$\tilde{\phi}_0 = u(H) \phi_0 - v(H) \phi_1$$

$$\tilde{\phi}_1 = v(H) \phi_0 + u(H) \phi_1$$

$$u^2 + v^2 = 1$$

と仮定し、変分法で固有値を求めることにする。その結果、

$$\lambda_1(H) - \lambda_0(H) \cong \lambda_1(0) \left[1 + \left(\frac{aH}{\epsilon} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

が得られ、 $H \ll \epsilon$ の時 (7) となる。基底状態 $\lambda_0(H)$ は、本来ゼロとなるべきなのであるが、この近似の範囲内では、そうはならない。無視された効果が、 $\lambda_0(H), \lambda_1(H)$ に同じ寄与を与えると仮定できれば、 $\Delta F_0 \gg H \gg \epsilon$ に対して (8) は

$$\lambda_1(H) \cong \frac{a|H|}{\epsilon} \lambda_1(0) \quad (9)$$

となり、崩壊速度は $H=0$ の時の (5) と比べれば、非常に大きくなる、逆に言えば、共存状態 — $H=0$ — の動的安定性を示していると言えよう。(5)、(8) については数値計算の結果と定量的な比較を行う予定である。

参 考 文 献

- 1) H. Tomita, A. Itō and H. Kidachi, Prog. Theor. Phys. **55** (1976), No. 3;
H. Tomita, ibid.
富田「物性研究」1976年1月号
- 2) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973), 51.
- 3) 例えば
J. S. Langer, Ann. Phys. (N.Y.) **54** (1969), 258.