

Multi-Objective Shape Optimization of Viscous Flow Fields for Prescribing Flow Velocity Distribution and for Minimizing Dissipation Energy

(流速分布コントロールと散逸エネルギー最小化を目的とした粘性流れ場の多目的形状最適化)

By

Eiji KATAMINE (片峯 英次),* Ryoma KANAI (金井 陵真),**and
Takumi KAKIGANO (柿ヶ野 巧)***

Abstract

This paper presents a numerical solution to multi-objective shape optimization problem in steady-state viscous flow fields. In this study, a multi-objective shape optimization problem using normalized objective functional is formulated for the flow velocity distribution prescribed problem and the total dissipated energy minimization problem in the viscous flow fields. In addition, another multi-objective shape optimization problem is formulated for the flow velocity distribution prescribed problem, while the total dissipated energy is constrained to less than a desired value, in the viscous flow fields. Shape gradients of these multi-objective shape optimization problems are derived theoretically using the Lagrange multiplier method, adjoint variable method, and the formulae of the material derivative. Reshaping is carried out by the traction method proposed as an approach to solving shape optimization problems. The validity of proposed method is confirmed by results of 2D numerical analysis.

§ 1. はじめに

流れ場における性能改善を目的とした形状決定問題は、工学分野における重要課題の一つである。著者らはこれまでに、粘性流れ場における散逸エネルギー最小化 [1], 一

Received September 26, 2014. Accepted November 12, 2014.

2010 Mathematics Subject Classification(s):

Supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 23560247, 26420161

*Department of Mechanical Engineering(機械工学科), Gifu National College of Technology(岐阜工業高等専門学校), Gifu 501-0495, Japan.

e-mail: katamine@gifu-nct.ac.jp

**Department of Mechanical Engineering(卒業生, 機械工学科), Gifu National College of Technology(岐阜工業高等専門学校), Gifu 501-0495, Japan.

***Department of Mechanical Engineering(卒業生, 機械工学科), Gifu National College of Technology(岐阜工業高等専門学校), Gifu 501-0495, Japan.

様流の粘性流れ場に置かれた孤立物体に対して、抗力最小化あるいは揚力最大化 [2] を目的とした形状最適化、さらには流速分布を規定する粘性流れ場の形状同定法 [3] を提案し、数値解析結果から提案した手法の妥当性を示してきた。その形状最適化法には力法 [4] が用いられた。

本研究では、定常粘性流れ場の部分領域において流速分布をコントロールし、領域全体での散逸エネルギーを最小化する多目的形状最適化に対して、重み付き係数法と ε 制約法に基づく二つの定式化を行い、その解法を提案する。本論文では、形状更新のための感度となる形状勾配密度関数を導出し、その形状勾配密度関数に基づいて力法を適用した数値実験結果を紹介する。

§ 2. 粘性流れ場の支配方程式

境界 $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ で囲まれた粘性流れ場領域 Ω において、流速 $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in U$ と圧力 $p \in Q$ を解析することを考える。ここで、流れ場領域 Ω は Lipschitz 領域、境界 Γ_0, Γ_1 は区分的に C^2 級であると仮定する [5]。無次元化された Navier-Stokes 方程式と連続の式の弱形式は、随伴流速 $w = \{w_i\}_{i=1}^n \in W$ と随伴圧力 $q \in Q$ を用いて次のように表すことができる。

$$(2.1) \quad a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = l(w) \quad \forall w \in W$$

$$(2.2) \quad c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q$$

ただし、 $a^V(u, w)$, $b(v, u, w)$, $c(w, p)$, $l(w)$ は次のように定義されている。

$$(2.3) \quad \begin{aligned} a^V(u, w) &= \frac{2}{Re} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(w) dx = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) dx, \\ b(v, u, w) &= \int_{\Omega} w_i v_j u_{i,j} dx, \quad c(w, p) = - \int_{\Omega} w_{i,i} p dx, \quad l(w) = \int_{\Gamma_1} w_i \hat{\sigma}_i d\Gamma \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ であり、 Re は Reynolds 数を表す。また流速 $\hat{u} \in (H^{1/2}(\Gamma_0))^n$, 表面力 $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i\}_{i=1}^n \in (H^{-1/2}(\Gamma_1))^n$ を既知関数とした境界条件は、次のように与えられている。

$$(2.4) \quad u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_0$$

$$(2.5) \quad \{-p\delta_{ij} + \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i})\}\nu_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{on } \Gamma_1$$

ここで、 ν は境界における外向き単位法線ベクトルを表す。流速 $u \in U$, 圧力 $p \in Q$, 随伴流速 $w \in W$ は次の関数空間の要素である。

$$(2.6) \quad U = \{u \in (H^1(\Omega))^n \mid u = \hat{u} \text{ on } \Gamma_0\}$$

$$(2.7) \quad Q = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q dx = 0 \text{ (if } \Gamma_1 = \emptyset \text{)}\}$$

$$(2.8) \quad W = \{w \in (H^1(\Omega))^n \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_0\}$$

なお、本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。 $H^m(\Omega)^n$ は m 階の導関数まで二乗可積分な n 次元ベクトル関数空間、 $L^2(\Omega)$ は二乗可積分なスカラー関数空間を表す。

§ 3. 部分領域における流速分布コントロール問題

§ 3.1. 定式化

粘性流れ場領域 Ω の部分領域 において流速分布をコントロールする形状同定問題を定式化する。その部分領域の和で定義される集合を部分領域 $\Omega_D \subset \Omega$ とし、その部分領域 Ω_D において、実際の流速分布 $u \in U$ とコントロールする流速分布の目標値 $u_D \in H^1(\Omega_D)$ との二乗誤差積分を最小化する形状同定問題（流速分布規定問題）を考える [3]。この流れ場領域 Ω の領域変動を T_s (s は領域変動の履歴) で定義し、領域 Ω は変動して $\Omega_s = T_s(\Omega)$ になると仮定する。このとき、領域の大きさに制約を課した形状同定問題は次のように定式化できる。

$$(3.1) \quad \text{Given } \Omega$$

$$(3.2) \quad \text{find } \Omega_s$$

$$(3.3) \quad \text{that minimizes } E(u - u_D, u - u_D)$$

$$(3.4) \quad \text{subject to } a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = l(w) \quad \forall w \in W$$

$$(3.5) \quad c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q$$

$$(3.6) \quad \int_{\Omega} dx \leq M$$

ただし、 M は領域の大きさ制約の上限値を表し、流速二乗誤差積分 $E(u - u_D, u - u_D)$ は次のように定義されている。

$$E(u - u_D, u - u_D) = \int_{\Omega_D} (u_i - u_{Di}) \cdot (u_i - u_{Di}) dx$$

§ 3.2. 形状勾配密度関数

この問題は次の Lagrange 関数 $L(u, p, w, q, \Lambda)$ の停留化問題に置き換えることができる。

$$(3.7) \quad \begin{aligned} L = & E(u - u_D, u - u_D) \\ & -a^V(u, w) - b(u, u, w) - c(w, p) + l(w) - c(u, q) + \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) \end{aligned}$$

ここで、 $w \in W$ 、 $q \in Q$ は粘性流れ場の支配方程式に関する Lagrange 乗関数になっている。また Λ は領域の大きさ制約条件式に対する Lagrange 乗数である。

領域変動に対する L の導関数 $\dot{L}$ を速度場 $V = \partial T_s(\Omega)/\partial s = \partial T_s(T_s^{-1}(\Omega_s))/\partial s$ を用いて計算すると次のように得られる [4].

$$\begin{aligned}
 \dot{L} = & -\{a^V(u, w') + b(u, u, w') + c(w', p) - l(w')\} \\
 & -c(u, q') \\
 & -\{a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q) - 2E(u - u_D, u')\} \\
 & -c(w, p') \\
 (3.8) \quad & + \dot{\Lambda} \left(\int_{\Omega} dx - M \right) + \langle G\nu, V \rangle
 \end{aligned}$$

ここで $(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す. 簡単のために, 部分境界 Γ_1 および流速分布を規定する部分領域 Ω_D の領域変動を拘束し, 設計境界 $\Gamma_{design} \subset \Gamma_0$ において流速がゼロと仮定すれば,

$$(3.9) \quad \langle G\nu, V \rangle = \int_{\Gamma_{design}} G\nu_i V_i d\Gamma$$

$$G = G_0 + G_1 \Lambda,$$

$$(3.10) \quad G_0 = -\frac{1}{Re} w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad G_1 = 1$$

$G\nu$ は形状勾配関数, G は形状勾配密度関数と呼ばれ, 流速 u , 圧力 p , 随伴流速 w , 随伴圧力 q および Lagrange 乗数 Λ は次の Kuhn-Tucker 条件から決定できる.

$$(3.11) \quad a^V(u, w') + b(u, u, w') + c(w', p) = l(w') \quad \forall w' \in W$$

$$(3.12) \quad c(u, q') = 0 \quad \forall q' \in Q$$

$$(3.13) \quad a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q) = 2E(u - u_D, u') \quad \forall u' \in W$$

$$(3.14) \quad c(w, p') = 0 \quad \forall p' \in Q$$

$$(3.15) \quad \Lambda \geq 0, \quad \int_{\Omega} dx \leq M, \quad \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) = 0$$

式 (3.13) と (3.14) は随伴流速 w と随伴圧力 q に対する随伴方程式を表している. なお, Lagrange 乗数 Λ の計算法の詳細については文献 [6] に譲る.

§ 4. 流速分布コントロール・散逸エネルギー最小化の多目的形状最適化問題

部分領域 Ω_D において流速分布をコントロールし, 流れ場全領域 Ω において散逸エネルギーを最小化する多目的形状最適化問題を考える. 重み付き係数法に基づき, 領域の

大きさに制約を課した多目的形状最適化問題は次のように定式化できる.

$$(4.1) \quad \text{Given } \Omega$$

$$(4.2) \quad \text{find } \Omega_s$$

$$(4.3) \quad \text{that minimizes } C_e \frac{E(u - u_D, u - u_D)}{E(u - u_D, u - u_D)_{ini}} + C_u \frac{a^V(u, u)}{a^V(u, u)_{ini}}$$

$$(4.4) \quad \text{subject to } a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = l(w) \quad \forall w \in W$$

$$(4.5) \quad c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q$$

$$(4.6) \quad \int_{\Omega} dx \leq M$$

ここで, C_e , C_u はそれぞれ流速コントロール, 散逸エネルギー最小化のための重みを表し, また, $a^V(u, u)_{ini}$, $E(u - u_D, u - u_D)_{ini}$ はそれぞれ初期形状における散逸エネルギー, 流速分布二乗誤差を表している.

上記と同様な手法を用いて, この多目的問題に対しても, 次のように形状勾配密度関数 G が導出できる.

$$(4.7) \quad G = \frac{C_u}{a^V(u, u)_{ini}} \frac{1}{Re} u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{Re} w_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda$$

また, 随伴流速 w , 随伴圧力 q および Lagrange 乗数 Λ は次の Kuhn-Tucker 条件から決定できる.

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q) \\ & = 2C_e \frac{E(u - u_D, u')}{E(u - u_D, u - u_D)_{ini}} + 2C_u \frac{a^V(u, u')}{a^V(u, u)_{ini}} \quad \forall u' \in W \end{aligned}$$

$$(4.9) \quad c(w, p') = 0 \quad \forall p' \in Q$$

$$(4.10) \quad \Lambda \geq 0, \quad \int_{\Omega} dx \leq M, \quad \Lambda(\int_{\Omega} dx - M) = 0$$

§ 5. 散逸エネルギー制約による流速分布コントロール問題

同様な手順を用いて, 領域全体での散逸エネルギー制約を考慮した流速分布コントロール問題は次のように定式化できる.

$$(5.1) \quad \text{Given } \Omega$$

$$(5.2) \quad \text{find } \Omega_s$$

$$(5.3) \quad \text{that minimizes } E(u - u_D, u - u_D)$$

$$(5.4) \quad \text{subject to } a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = l(w) \quad \forall w \in W$$

$$(5.5) \quad c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q$$

$$(5.6) \quad a^V(u, u) \leq a_M^V$$

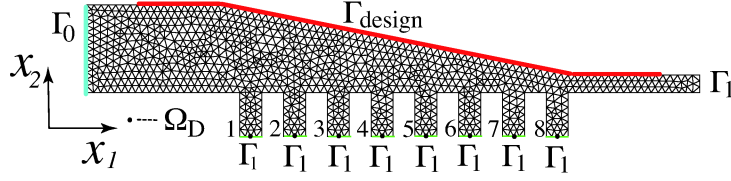


Figure 1. 2D numerical analysis model

ここで, a_M^V は散逸エネルギーの上限値を表す. また, この問題の形状勾配密度関数 G , Kuhn-Tucker 条件は次のようになる.

$$(5.7) \quad G = -\frac{1}{Re} w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda \frac{1}{Re} u_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$(5.8) \quad a^V(u, w') + b(u, u, w') + c(w', p) = l(w') \quad \forall w' \in W$$

$$(5.9) \quad c(u, q') = 0 \quad \forall q' \in Q$$

$$(5.10) \quad \begin{aligned} & a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q) \\ & = 2E(u - u_D, u') + 2\Lambda a^V(u, u') \quad \forall u' \in W \end{aligned}$$

$$(5.11) \quad c(w, p') = 0 \quad \forall p' \in Q$$

$$(5.12) \quad \Lambda \geq 0, \quad a^V(u, u) \leq a_M^V, \quad \Lambda(a^V(u, u) - a_M^V) = 0$$

§ 6. 数値実験例

導出した形状勾配密度関数を用いて, 方法を適用した簡単な数値実験例を紹介する. 図 1 に示す二次元モデルについて解析を行った. 左側境界 Γ_0 から流入し, 右側および 8 個の下側境界 Γ_1 から流出する問題を考える.

§ 6.1. 問題設定

本数値実験では, 下側 8 個の出口部での流速分布を均一化し, 散逸エネルギーを最小化するための流路形状を決定することを目的とした. 8 個の出口境界 Γ_1 部における流速分布は Poiseulli 分布になり, 各出口境界 Γ_1 付近中央部での Poiseulli 分布の最大流速値 u を均一化させるための流路形状決定を試みた. 実際には, 各出口境界 Γ_1 内部中央部における x_2 方向の最大流速分布 u_2 をコントロールし, 初期形状における 8 個の出口境界 Γ_1 内部中央部の最大流速値の平均値を規定流速値 u_D として設定した.

解析には有限要素解析を用いた. 本数値実験では, 提示した多目的形状最適化解析の基本的な妥当性を示すために, 下側 8 個の出口境界 Γ_1 に非常に近い内部に微小円板領域の流速規定領域を設定し, その 8 個の微小円板領域の和集合を部分領域 Ω_D として仮

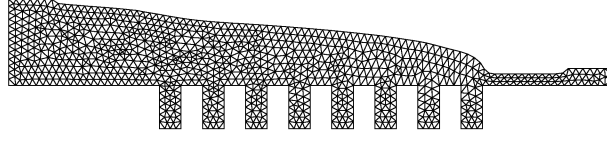


Figure 2. Numerical result: Optimum shape by weighting method ($C_u = 0.5, C_e = 0.5$)

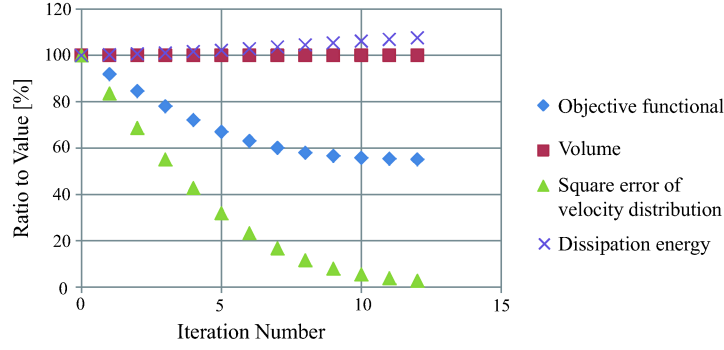


Figure 3. Numerical result: Iterative histories by weighting method ($C_u = 0.5, C_e = 0.5$)

定した。その結果，上記で示した流速二乗誤差積分 $E(u - u_D, u - u_D)$ は，流速を u_h とした有限要素空間においては， $\epsilon > 0$ を微小円板領域の面積とすると，

$$(6.1) \quad E(u_h - u_{D_h}, u_h - u_{D_h}) \approx \epsilon \sum_{j=1}^8 (u_h(x_1, x_2) - u_{D_h}(x_1, x_2))^2$$

と近似できる。したがって，本解析例では，この近似式に基づいて数値実験を行った。

領域変動解析では， Γ_{design} 以外の境界 Γ を完全拘束した。 $Re=100$ で解析を行い，流れ場解析の有限要素には Taylor-Hood 型要素 (P2/P1 要素) を用いて，節点数，要素数はそれぞれ 3,902, 1,803 である。

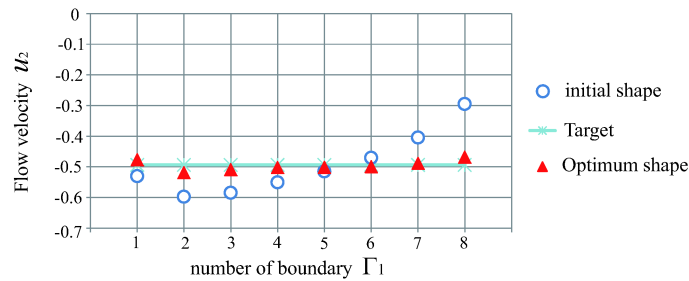


Figure 4. Numerical result: Flow velocity distribution on boundaries Γ_1 by weighting method ($C_u = 0.5, C_e = 0.5$)

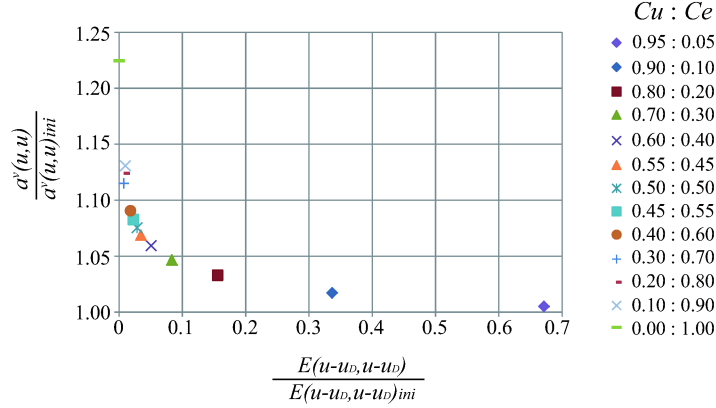


Figure 5. Numerical result: Pareto-optimal solutions by weighting method ($C_e, C_u = 0.0 \sim 1.0$)

§ 6.2. 重み係数法による数値実験結果

重み係数法を用いて解析した一例として, $C_u = 0.5, C_e = 0.5$ の場合の結果を図 2, 3, 4 に示す. 図 2 は得られた最適形状, 図 3 は形状更新の繰り返しに対する, 流速分布二乗誤差, 散逸エネルギー, 全目的汎関数, 領域の大きさの変化推移を表している. 最適化後では, 流速分布二乗誤差はゼロに収束し, 全目的汎関数は最小値に収束しているが, 散逸エネルギーは若干増加していることが確認できる. また, 図 4 に, 初期形状, 最適形状における 8 個の出口境界 Γ_1 部付近での流速分布 u_2 を示す. 最適形状では, 下側出口境界 Γ_1 で流速分布が均一化している様子が確認できる.

図 5 は, 重み係数 C_u, C_e の値を変化させた 13 通りの場合に対して得られた最適形状における流速分布二乗誤差と散逸エネルギーの値を比較して示している. ここで, 横軸には初期形状に対する流速分布二乗誤差の比 $\frac{E(u-u_D, u-u_D)}{E(u-u_D, u-u_D)_{ini}}$, 縦軸には初期形状に対する散逸エネルギーの比 $\frac{a^V(u, u)}{a^V(u, u)_{ini}}$ を表している. 図 5 の結果から, 全体的には, 重み係数 C_e の値を大きくすると $\frac{E(u-u_D, u-u_D)}{E(u-u_D, u-u_D)_{ini}}$ の値が小さくなり, C_u の値を大きくすると $\frac{a^V(u, u)}{a^V(u, u)_{ini}}$ の値が小さくなるという通常のパレート解に準じた結果が得られていることが確認できる. しかしながら, どのような重み係数の結果に対しても, 散逸エネルギーの比の大きさは 1 以下, すなわち初期形状における散逸エネルギーの大きさ以下にはならなかった. また, 図 6 は解析によって得られた代表的な重み係数における最適形状を初期形状と比較して示している. 散逸エネルギーの重みを大きく設定した $C_u = 0.95, C_e = 0.05$ の場合の最適形状は, 初期形状からあまり変化のない形状になっている. したがって, 本解析例では, 設定した初期形状そのものが既に散逸エネルギーが小さくなるような形状であったと推察できる.

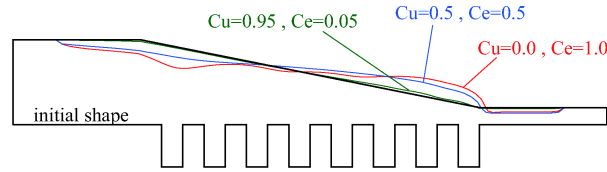


Figure 6. Numerical result: Initial shape and optimum shapes by weighting method

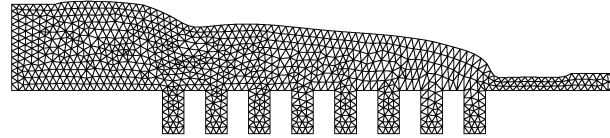


Figure 7. Numerical result: Optimum shape by ε constraint method

§ 6.3. ε 制約法による数値実験結果

散逸エネルギー制約による流速分布コントロール問題に対する結果を図 7, 8, 9 に示す. 散逸エネルギーの上限値 a_M^V は, 初期形状におけるその値に設定した. 図 8 は, 形状更新の繰り返しに対する散逸エネルギー, 目的汎関数である流速二乗誤差積分, 領域の大きさの収束履歴を表している. 図 9 は, 初期形状および最適形状における 8 個の出口境界 Γ_1 部付近の流速分布 u_2 を示している. これらの結果から, 最適形状では, 散逸エネルギー制約を満たしながら流速二乗誤差積分が最小化してゼロに収束し, 8 個の下側出口境界 Γ_1 で流速分布が均一化していることが確認できる.

したがって, 今回設定した数値例では, 重み付き係数法に基づく解析に比較して, 散逸エネルギー制約による流速分布コントロール解析の方が良好な形状最適化が実現できた.

§ 7. まとめ

本研究では, 粘性流れ場の部分領域において流速分布をコントロールし, 全領域において散逸エネルギーを最小化する多目的形状最適化について取り上げた. 本論文では, 上記の重み付き線形和を目的汎関数を設定した多目的最適化問題, 散逸エネルギーの大きさを制約条件に設定して流速分布二乗誤差を最小化する問題の二つの解法を提案した. それぞれの問題の定式化を行い, 形状修正の感度となる形状勾配関数を理論的に導出した. その導出した形状勾配関数に基づいて, 方法を適用して解析した簡単な二次元問題の数値実験例から提示した多目的形状最適化が実現できることを示した.

References

- [1] E. Katamine, H. Azegami, T. Tsubata and S. Itoh., “Solution to Shape Optimization Problems of Viscous Flow Fields”, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 19, No.1, (2005), pp.45-51.

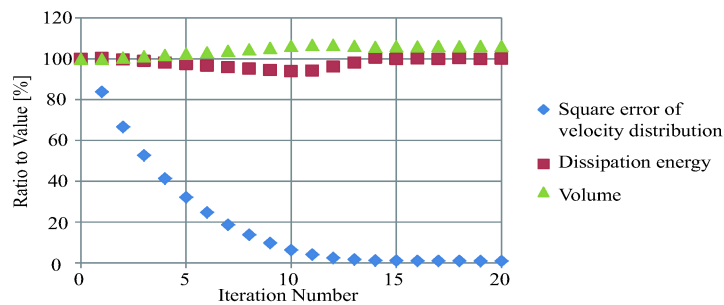


Figure 8. Numerical result: Iterative histories by ε constraint method

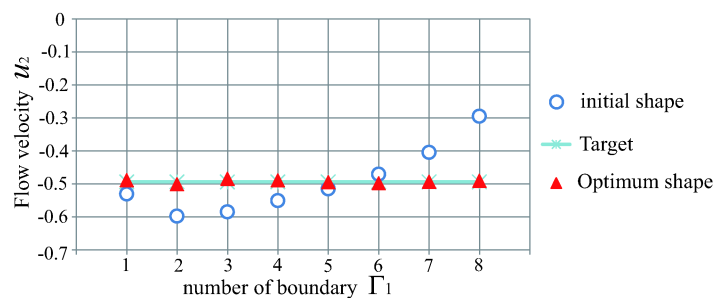


Figure 9. Numerical result: Flow velocity distribution on boundaries Γ_1 by ε constraint method

- [2] 片峯英次, 西橋直志, 畔上秀幸, “抗力最小化・揚力最大化を目的とした定常粘性流れ場の形状最適化”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 74, No.748, (2008), pp.2426-2434.
- [3] 片峯英次, 柿ヶ野巧, “流速分布を規定する定常粘性流れ場の形状同定問題の解法”, 日本機械学会 2013 年度年次大会講演論文集, (2013), CD-ROM, 2pages.
- [4] 畔上秀幸, “領域最適化問題の一解法”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574 (1994), pp. 1479-1486.
- [5] 畔上秀幸, “形状最適問題の正則化解法”, 日本応用数学会論文誌, Vol. 24, No.2, (2014), pp.83-138.
- [6] 矢川元基, 宮崎則幸 編集, 計算力学ハンドブック, (2007), 朝倉書店, pp. 619-637.