

Large Sieve

日大理工 本橋洋一

§ 1. 序

数論の多くの問題は, Dirichlet の L -函数に帰着されるが, これは character 和の評価が本質的である, と言いかえることが出来る。これについての 1 つの指導原理が「Large Sieve」なのである。

この原理は, Ju. V. Linnik により, 1941 年に, 最小 2 次非剰余についての I. M. Vinogradov の予想を解決しようとする努力の中で発見された。それは, のちに示す, 定理 1.2 の形のものであるが, これは「ある種の条件をみたす素数があり沢山なり」ことを示している。一方, Linnik は, Hoheisel-Ingham の理論を, 1 つの法に対する全ての L -函数に拡張し, 臨界帯のある領域に零点を有する L -函数が「あり沢山なり」ことを発見した。これによって, 拡張された Riemann 予想を回避する道が発見されたのである。

これら 2 つの深い結果を結合して, 謂る Goldbach 予想に大きな発展をもたらしたのが, A. Rényi [38] である。そこにおいては, 1 つの法ではなくて, 多くの法について人に考えることが要求され, これをみたしたのが, Linnik の Large Sieve なのである。それ故に, 現在 Large Sieve には, Linnik と Rényi の名が冠せ

してゐるのである。

Rényi 以後, Large Sieve はしばしば Goldbach 予想に関連して改良がなされたのであるが, そのオ1には, M. B. Barban を上げるべきである。彼は昨 1968 年 33 才でなくなった。

しかし決定的な改良は, 1964 年秋から, 1965 年春にかけて相次いで行われた。まず K. F. Roth [40] の定理 1.2 において $Q \leq (N/\log N)^{\frac{1}{2}}$ の条件のついでにものを証明した。それは当時, 驚くべきものであった。次に E. Bombieri [4] が最終的な改良をなした。とくに, 彼の Large Sieve を character 和についての理論であるとして, 明確に定理 1.3 を把握したのは, とくに重要である。又全く同時に A. I. Vinogradov [48] は, Linnik の「Dispersion Method」から出発して, Bombieri とほぼ同じ結論を得たのであるが, これはとくに注意すべきである。なぜならば Linnik においてはじめられた, 3つの大きな流れ: Large Sieve, Density Theorem として Dispersion Method が結果的には, 1つの大きな結論に流れ込んだからなのである。

以下 Large Sieve 及びその応用について解説するが, 1965 年以前のことは, Barban の優れた情熱的な解説 [1] があるので, その後の発展に重点をおくつもりである。

§ 2. 基本定理

Large Sieve の基本定理は次のものである。証明からわかるように, Hardy-Ramanujan の Circle Method が根底にある。又この定理は, Farey 分割についての定理

とも考えられるが、この点については参考は中井氏の論説を見よ。以下。

定理 1.1 $\{a_n\}$ を任意の複素数列とし、

$$\hat{s}(\alpha) = \sum_{M < n \leq M+N} a_n e^{2\pi i n \alpha}$$

とする。 Q, M, N を任意にとり、

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{1 \leq a \leq q, (a, q)=1} \left| \hat{s}\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq (Q^2 + 2\pi N) \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2$$

証明 以下に示すのは, Gallagher [17] によるものであるが、すこぶる明解である。

適当に m をとり、 $\hat{s}(\alpha) e^{-2\pi i m \alpha}$ を考えれば、 m は $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ に入る、と

いえる。そこで、

$$\hat{s}\left(\frac{a}{q}\right)^2 = \hat{s}(\alpha)^2 + 2 \int_{\alpha}^{\frac{a}{q}} \hat{s}(\beta) \hat{s}'(\beta) d\beta$$

であるから、 $I(a/q)$ を a/q を中心にして、長さ Q^{-2} の区間とすれば

$$\left| \hat{s}\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq Q^2 \int_{I(a/q)} |\hat{s}(\alpha)|^2 d\alpha + \int_{I(a/q)} |\hat{s}(\alpha) \hat{s}'(\alpha)| d\alpha.$$

しかし $I(a/q)$ $\{1 \leq a \leq q, (a, q)=1, q \leq Q\}$ 達は重り合わないから、

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{1 \leq a \leq q, (a, q)=1} \left| \hat{s}\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq Q^2 \int_0^1 |\hat{s}(\alpha)|^2 d\alpha + \left\{ \int_0^1 |\hat{s}(\alpha)|^2 d\alpha \int_0^1 |\hat{s}'(\alpha)|^2 d\alpha \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

そこで、

$$\int_0^1 |\hat{s}(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} |a_n|^2, \quad \int_0^1 |\hat{s}'(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{|n| \leq \frac{N}{2}} 4\pi^2 n^2 |a_n|^2$$

であるから、直ちに定理の不等式を得る。

定理 1.1 から、次の2つの美しい定理が、容易に証明される。

定理 1.2 $n_1, n_2, \dots, n_Z \leq N$ を任意の正整数列とし、素数 p を取って、

$n_j \equiv a \pmod{p}$ とする j の数を $Z(p, a)$ とすれば

$$\sum_{p \leq Q} p \sum_{1 \leq a \leq p} \left\{ Z(p, a) - \frac{Z}{p} \right\}^2 \leq (Q^2 + 2\pi N) Z.$$

定理 1.3 χ を Dirichlet character とし, $\{a_n\}$ を任意の複素数列 とすると,

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \left| \sum_{M < n \leq M+N} \chi(n) a_n \right|^2 \leq (Q^2 + 2\pi N) \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2$$

但し $\sum^*$ は (今後 χ を) 原始指標 についての和を示す。

定理 1.2 の形のものか, Linnik [28] において発見された Large Sieve である。所で, この定理は, $Z(p, a)$ の分散についての結果である。実際, $Z(p, a)$ が Z/p 位であるという期待するのは, 妥当と差支るからである。このことに注目して, Rényi は確率論に於て, ある一般的事実を発見した。さて, 逆にそのことから, 定理 1.2 の弱い形のもの導くことに成功した。この Rényi の理論については [39] を参照せよ。定理 1.3 は極めて重要である。Large Sieve をこの形で把握したのは, Bombieri [4] である。この定理は「多くの」 L -函数を考へる際に決定的な力を持つ。これは, 次の 2 つの定理においては, 裏と手されている。

定理 1.4 (Bombieri)

Dirichlet の L -函数 $L(s, \chi)$ ($s = \sigma + it$) の, 領域 $\sigma_0 \leq \sigma \leq 1$, $|t| \leq T$ に於て零実の数を $N(\sigma_0, T, \chi)$ とすれば, 任意の Q に対して,

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma_0, T, \chi) \ll T(Q^2 + QT)^{\frac{1-\sigma_0}{3-2\sigma_0}} \log^{10}(Q+T).$$

定理 1.5 (Bombieri)

初項 l , 公差 q の算術級数中の素数で, $y \leq y$ 以下の数を $\pi(y; q, l)$ で表せば, 任意に固定した A に対して,

$$\sum_{q \leq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}} \max_{y \leq N} \max_{(q, l)=1} |\pi(y; q, l) - q(q)^{-1} L_l(y)| \ll N (\log N)^{-A}$$

但し, $B = 16A + 28$.

定理 1.4 の証明は、竜沢 [42] の、1 つの q に対する場合と、ほぼ同じであるが、たゞ Character 和の部分に全面的に Large Sieve (定理 1.3) を援用するのである。見通しのよい証明は Davenport [8] に出てゐる。定理 1.4 において、 T が 2 にくらべて小さいとき、直線 $\sigma = 1$ の近くには零点を有する L -函数は、非常にすくなくとも直ぐわかる。これは π の Linnik や Rényi の苦心惨憺のすえに発見したことであった。

定理 1.5 は、まさに驚くべきものである。拡張された Riemann 予想のもとでは、よく知られてゐるように、

$$\pi(y; q, l) = q(q)^{-1} Li(y) + O(y^{\frac{1}{2}} \log(y+2))$$

となり、残余項は q に無関係である。即ち、これを定理 1.5 の形にかけば、 $B = A + 1$ ということになる。定理 1.5 では単に B の値が少々大きいだけのことになる。多くの素数のかさんだ加法的な問題に於て、定理 1.5 が決定的であるのは、この様にほぼ、Riemann 予想と同等である、という事によるのである。なお、 $N(\log N)^{-A}$ という評価は、「Siegel のゼロ」(参照 [37, p. 139]) によるものであり、改良は(現在の所)不可能である。

§ 3. 定理 1.5 の証明.

定理 1.5 は、定理 1.4 から容易に証明される。しかし、Gallagher [18] の大変面白い証明を発表したので、彼の方針に従ふ。これは、言わば「直接証明」であり、Large Sieve (定理 1.3) の応用が鮮明である。証明は数段に分かれる。

(i) 次のことを証明すればよい。即ち、 $\Lambda(n)$ を von Mangoldt 函数として、

$$\psi(y; q, l) = \sum_{n \leq y, n \equiv l \pmod{q}} \Lambda(n)$$

とすると

$$\sum_{q \leq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}} \max_{y \leq N} \max_{(q, l)=1} |\Psi(y; q, l) - g(q)^{-1} y| \ll N (\log N)^{-A}.$$

(ii) これを証明するために、先ず次の函数を導入する。

$$\Psi_k(y; q, l) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq y, n \equiv l \pmod{q}} \Lambda(n) \left(\log \frac{y}{n} \right)^k,$$

$$\Psi_k(y; \chi) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq y} \chi(n) \Lambda(n) \left(\log \frac{y}{n} \right)^k.$$

明らかに

$$\Psi_k(y; q, l) = g(q)^{-1} \sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(l) \Psi_k(y; \chi).$$

χ を導く 原始指標を χ^* とすれば

$$\Psi_k(y; q, l) = g(q)^{-1} \sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(l) \Psi_k(y; \chi^*) + O((\log y)^{k+1} \log q)$$

とくに、 χ が 単位指標ならば

$$\Psi_k(y; \chi^*) = y + O(y e^{-\sqrt{\log y}})$$

であるから、任意の Q に対して、

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q} \max_{y \leq N} \max_{(q, l)=1} |\Psi_k(y; q, l) - g(q)^{-1} y| &\ll N \log Q e^{-\sqrt{\log N}} + 2 \log Q (\log N)^{k+1} \\ &+ (\log Q)^2 \sum_{q \leq Q} \frac{1}{q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \max_{y \leq N} |\Psi_k(y; \chi)|. \end{aligned}$$

この右辺の 2 項を $E(Q)$ とおくと、

(iii) 所で Siegel の定理 [37, p. 44] により、 C_0 を任意に $0 < \varepsilon < 1$, $q \leq (\log N)^{C_0}$

に対しては、 $\max_{y \leq N} |\Psi_k(y; \chi)| \ll N e^{-\sqrt{\log N}}$ であるから、

$$E(Q) \ll (\log N)^{C_0} N e^{-\sqrt{\log N}} + \sum_{(\log N)^{C_0} < q \leq Q} \frac{1}{q} \sum_{\chi \pmod{q}}^* \max_{y \leq N} |\Psi_k(y; \chi)|.$$

この和を $E_1(Q)$ と書くことにする。 $E_1(Q)$ の評価に Large Sieve (定理 1.3)

を援用されるのである。

(iv) さて、 $\Psi_k(y; \chi)$ は 次のように積分表示される。(但し以下においては、一定 $k \geq 3$)

$$\Psi_k(y; \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\alpha)} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} y^s s^{-(k+1)} ds.$$

ここに $\alpha = 1 + (\log N)^{-1}$ の積分を, 函数

$$U(s, \chi) = \sum_{n \leq H} \mu(n) \chi(n) n^{-s}$$

を用いて変形する。これは「Density Theorem」を証明する際に使われるのと、同じ技法

である。Hは後で適当に定める。変形はつぎの如にする。

$$\begin{aligned} \Psi_k(y; \chi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\alpha)} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \chi) \right\} \left\{ 1 - L(s, \chi) U(s, \chi) \right\}^2 y^s s^{-(k+1)} ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\beta)} \left\{ L(s, \chi) L'(s, \chi) U^2(s, \chi) - 2L'(s, \chi) U(s, \chi) \right\} y^s s^{-(k+1)} ds. \end{aligned}$$

ここに $\beta = \frac{1}{2} + (\log N)^{-1}$ である。積分路を (α) から (β) に移させるのは、あとでわかる

ことであるが $k \geq 3$ に於て、積分が絶対収束するからである。

従て、

$$E_1(Q) \leq N \log N \int_{(\alpha)} |A(s)| |s|^{-(k+1)} |ds| + N^{\frac{1}{2}} \int_{(\beta)} |B(s)| |s|^{-(k+1)} |ds|.$$

但し、

$$A(s) = \sum_{(\log N)^{c_0} < f \leq Q} \frac{1}{f} \sum_{\chi \bmod f}^* |1 - L(s, \chi) U(s, \chi)|^2 \quad (\sigma = \alpha)$$

$$B(s) = \sum_{(\log N)^{c_0} < f \leq Q} \frac{1}{f} \sum_{\chi \bmod f}^* \left\{ |L(s, \chi) L'(s, \chi) U^2(s, \chi)| + |L'(s, \chi) U(s, \chi)| \right\} \quad (\sigma = \beta).$$

(V) Large Sieve (定理 1.3) によつて、 $A(s)$ を評価しよう。

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq H} \chi(n) n^{-s} + s \int_H^\infty \left\{ \sum_{H < n \leq \xi} \chi(n) \right\} \xi^{-(s+1)} d\xi$$

であり、 χ は原始指標であるから、Pólya-Vinogradov の定理 (1.5'),

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq H} \chi(n) n^{-s} + O \left\{ |s| H^{-1} f^{\frac{1}{2}} \log(f+2) \right\}.$$

従て、

$$1 - L(s, \chi) U(s, \chi) = \sum_{H < n \leq H^2} c(n) \chi(n) n^{-s} + O\left(|s| H^{-1} q^{\frac{1}{2}} \log H \log(q+2)\right)$$

但し $|c(n)| \leq \tau(n)$: 約数函数 である。そこで V を任意の数として、

$$\begin{aligned} \sum_{t \leq V} \sum_{\chi \bmod q}^* |1 - L(s, \chi) U(s, \chi)|^2 &\ll \log H \sum_{k \leq \log H} \sum_{t \leq V} \sum_{\chi \bmod q}^* \left| \sum_{n=2^k H}^{2^{k+1} H} c(n) \chi(n) n^{-s} \right|^2 \\ &\quad + H^{-2} V^3 \log^2(V+2) \log^2 H \cdot |s|^2. \end{aligned}$$

しるに 定理 1.3 により

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq \log H} \sum_{t \leq V} \sum_{\chi \bmod q}^* \left| \sum_{n=2^k H}^{2^{k+1} H} c(n) \chi(n) n^{-s} \right|^2 \\ &\ll \sum_{k \leq \log H} (V^2 + 2^k H) \sum_{n=2^k H}^{2^{k+1} H} \tau^2(n) n^{-2} \\ &\ll (\log H)^3 \sum_{k \leq \log H} \left\{ 1 + \frac{V^2}{2^k H} \right\} \ll (\log H)^4 \left\{ 1 + \frac{V^2}{H} \right\}. \end{aligned}$$

従って 部分和法により、直ちに次の不等式を得る。

$$A(s) \ll (\log H)^5 \left\{ (\log N)^{-C_0} + H^{-1} Q \right\} + |s|^2 H^{-2} Q^2 (\log Q)^2 (\log H)^2.$$

そこで $H = Q (\log N)^{C_0}$ とすれば

$$A(s) \ll (\log Q)^5 (\log N)^{-C_0} |s|^2.$$

(Vi) 今度は、 $B(s)$ に Large Sieve を援用するのであるが、 $A(s)$ とほぼ同じであるので

概略を示すにとどめる。 V を任意の数として、

$$\begin{aligned} \sum_{t \leq V} \sum_{\chi \bmod q}^* \left\{ |L(s, \chi) L(s, \chi) U^2(s, \chi)| + |L(s, \chi) U(s, \chi)| \right\} \\ \ll \left\{ \sum_t \sum_{\chi}^* |L(s, \chi)|^4 \right\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \sum_t \sum_{\chi}^* |L(s, \chi)|^4 \right\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \sum_t \sum_{\chi}^* |U^4(s, \chi)| \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

しるに

$$\sum_{t \leq V} \sum_{\chi \bmod q}^* |L(s, \chi)|^4 \ll V^2 |s|^2 \log^4(V|s|) \quad (\sigma \geq \frac{1}{2})$$

$$\text{及び} \quad \sum_{t \leq V} \sum_{\chi \bmod q}^* |U^4(s, \chi)| \ll (H^2 + V^2) \log^4 H \quad (\sigma \geq \frac{1}{2})$$

は (V) と同じようにして証明できる。

とて, 又

$$L'(s, X) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} L(z, X) (z-s)^{-2} dz$$

(但し γ は, s を中心として, 半径 $(\log N)^{-1}$ の円である) である,

$$|L'(s, X)|^4 \ll (\log N)^5 \oint_{\gamma} |L(z, X)|^4 |dz|$$

よって上記 $L'(s, X)$ についての不等式から,

$$\sum_{f \leq T} \sum_{X \bmod f}^* |L'(s, X)|^4 \ll T^2 |s|^2 \log^4(T|s|) \log^4 N.$$

従って部分和法により

$$B(s) \ll |s| Q (\log N)^{2+c_0} (\log Q)^2 \log^2(Q|s|+2).$$

(VII) さて, (IV) の議論に於いて, (V) 及び (VI) の結果から, $k=3$ とて,

$$E_1(Q) \ll N (\log N)^{1-c_0} (\log Q)^5 + N^{\frac{1}{2}} Q (\log N)^{2+c_0} (\log Q)^4.$$

(II) において, $E(2)$ についても同じ不等式が成立するであろう。即ち, (II) にも於いて,

$$\begin{aligned} \sum_{f \leq Q} \max_{y \leq N} \max_{(f, l)=1} |\psi_3(y; f, l) - g(f)^{-1} y| \\ \ll N (\log N)^{1-c_0} (\log Q)^7 + N^{\frac{1}{2}} Q (\log N)^{2+c_0} (\log Q)^6 \end{aligned}$$

を得る。

(VIII) 所で, $\psi_k(y; f, l)$ は y の非減少函数であるから, $0 < \lambda < 1$ とて,

$$\int_{e^{-\lambda} y}^y \psi_{k-1}(z; f, l) \frac{dz}{z} \leq \lambda \psi_{k-1}(y; f, l) \leq \int_y^{e^{\lambda} y} \psi_{k-1}(z; f, l) \frac{dz}{z}.$$

いま $\psi_k(y; f, l) = g(f)^{-1} y + r_k(y; f, l)$ とすれば, 上の2つの積分は

とくに, $(\lambda + O(\lambda^2)) g(f)^{-1} y + O\left(\max_{y \leq N} |r_{k-1}(y; f, l)|\right)$ である。従って

$$\sum_{f \leq Q} \max_{y \leq N} \max_{(f, l)=1} |r_{k-1}(y; f, l)| \ll \lambda N \log Q + \lambda^{-1} \sum_{f \leq Q} \max_{y \leq N} \max_{(f, l)=1} |r_k(y; f, l)|$$

となる。よって $k=3$ から始めて, $k=2$ では $\lambda^{\frac{1}{2}}$, $k=1$ については $\lambda^{\frac{1}{4}}$ を用いれば

$$\sum_{q \leq Q} \max_{y \leq N} \max_{(q, \ell)=1} |f_0(y; q, \ell)| \ll \lambda^{\frac{1}{4}} N \log Q + \lambda^{-\frac{3}{4}} \left\{ N (\log N)^{1-c_0} (\log Q)^5 + N^{\frac{1}{2}} Q (\log N)^{2+c_0} (\log Q)^6 \right\}$$

を得る。そこで $\lambda = (\log N)^{-4(A+1)}$, $c_0 = 8A+13$, $Q = N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-4(A+2)}$ とすれば

(1)を得る。よて定理 1.5 の証明は終る。

§4. 最小2次非剰余について

この節では、定理 1.2 の応用を示す。素数 p に対して、最小の2次非剰余を $h_2(p)$ とする。任意の ε に対して $h_2(p) \ll p^\varepsilon$ であること Vinogradov が予想している。この予想に最も迫ったのは、次の Linnik の定理である。更には、これを証明するために、彼は Large Sieve (定理 1.2 の形のものを) を展開したのである。([29])

定理 4.1 (Linnik)

$N^\varepsilon < p \leq N$, $h_2(p) > N^\varepsilon$ なる素数 p の数は、 ε のみで定まるある常数よりも小である。

証明 そのような素数の数を $S(N)$ としよう。 $m_1, m_2, \dots, m_z \leq N^2$ を、互素因数が全て N^ε より小なるもの全体としよう。すなわち、これは全て $h_2(p) > N^\varepsilon$ なる p について 2次剰余となっている。従ってこの場合 (定理 1.2 にあける) $Z(p, a)$ は高々 $\frac{p+1}{2}$ 個の a についてのみ零である。従って、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} Z^2 S(N) &\leq \sum_{p \leq N, h_2(p) > N^\varepsilon} \frac{1}{p} \left(p - \frac{p+1}{2}\right) Z^2 \leq \sum_{p \leq N} p \sum_{\substack{a \\ Z(p, a) \neq 0}} \left(\frac{Z}{p}\right)^2 \\ &\leq \sum_{p \leq N} p \sum_{a \leq p} \left\{ Z(p, a) - \frac{Z}{p} \right\}^2 \\ &\ll N^2 Z. \end{aligned}$$

すなわち、 $S(N) \ll N^2 Z^{-1}$ 。この値が ε のみに関係するのは、よく知られた事実である。

(A.I. Vinogradov [47] を参照のこと)

所で、一方 Erdős [13] は、 π の Linnik の定理を用いて、次の美しい事実を発見した。

定理 4.2 (Erdős)

p_k は k 番目の素数とすると、

$$\sum_{p \leq N} \chi_2(p) = (1 + o(1)) \pi(N) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} p_k.$$

更に高次の最小非剰余についても同様のことが Elliott [10] によって証明されている。

又、素数を法とする「最小原始根」の大きさを評価することは、Vinogradov において問題とされている。定理 4.2 に相当するようなことを証明するのは、極めて困難であるが、ある程度の「平均的」な結果は、やはり Large Sieve によって証明されている。これについては、Burgess - Elliott [6] を見よ。更に又、原始根についての Artin [27; 序文] の有名な予想も「平均」の意味で、Large Sieve の射程内に入っている (Goldfeld [19])。なお Artin 予想は、最近 C. Hooley [25] によってある種の Kummer 体の Dedekind zeta 函数に対する Riemann 予想下で、肯定的に解決された。

§5. Titchmarsh の約数問題及び Hardy-Littlewood の予想「J」.

Titchmarsh [43] は 後で述べる Hardy-Littlewood の予想の変形として、和

$$D_a(N) = \sum_{p \leq N} \tau(p-a) \quad (N \rightarrow \infty)$$

の asymptotic-formula を求めることに問題にした。この和の下からの評価は、

Erdős [12], Haselgrove [28] によって研究された。しかし Linnik [32] p.164

下から 5 行目も注意しているように、古い Large Sieve によれば $D_a(N) \gg N$ は示される。

$D_a(N)$ の asymptotic formula の最初の証明は, Linnik [32] によてなされたが, $\chi=1$ においては, Weil [51] による Kloosterman 和の評価が 決定的である。この
に, Bombieri の定理 (定理 1.5) によれば 単純明解である。

定理 5.1 (Linnik)

$$D_a(N) = \frac{315 \cdot 3(3)}{270^4} N \prod_{p|a} \frac{(p-1)^2}{p^2-p+1} + O\left(N \frac{\log \log N}{\log N}\right).$$

証明.

$$\begin{aligned} D_a(N) &= \sum_{p \leq N} \sum_{p-a=lm} 1 \\ &= \sum_{\substack{p-a=lm, \\ p \leq N}} \frac{1}{l < N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}} + \sum_{\substack{p-a=lm, \\ p \leq N}} \frac{1}{m < N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}} + \sum_{\substack{p-a=lm, \\ p \leq N}} \frac{1}{l, m \geq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}} \\ &\quad - \sum_{\substack{p-a=lm, \\ p \leq N}} \frac{1}{l, m < N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}} \\ &= \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 - \sum_4. \end{aligned}$$

そこで

$$\sum_3 \ll N \frac{\log \log N}{\log N}, \quad \sum_4 \ll N (\log N)^{1-2B}$$

は容易にわかる。そして, 定理 1.5 により

$$\begin{aligned} \sum_1 = \sum_2 &= \sum_{\substack{l \leq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}, \\ (l, a)=1}} \sum_{\substack{p \equiv a \pmod{l}, \\ p \leq N}} 1 + O(N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}) \\ &= L_1(N) \sum_{\substack{l \leq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}, \\ (l, a)=1}} g(l)^{-1} + O(N (\log N)^{-A}). \end{aligned}$$

従って Landau の有名な asymptotic formula により 証明は終る。

Barban [1] によて, $\sum_{p_1, p_2 \leq \sqrt{N}} \tau(p_1 p_2 - 1)$ なる和の asymptotic formula の

Lange sieve によて証明されている。

次に Hardy - Littlewood の予想「J」についてのべよう。

Hardy と Littlewood は、彼らの有名なシリーズ「Partitio Numerorum」の第II論文[20]に於て、素数のかゝんだ加法的数論に於る多くの予想を提出した。因に、彼らの提出した予想のうち、完全に解決されたのは、I. M. Vinogradov の「3素数定理」と、これからのべる「予想 J」のみである。この予想は、1923年に提出されたまま、更に35年の間、誰一人として手をつけていなかったのであるが、1952年 Hooley [24] は、拡張された Riemann 予想下に、これを解した。更に、この問題においては、Riemann 予想は「万能」ではないのであって、Hooley の重大な発見は、ある種の和の評価に、Brun Sieve を極めて有効なことを示したことにある。この Brun Sieve の用い方は、Erdős [12] における大きいと思われ。Hooley の研究は、「quasi-prime」という、binary-additive な問題に大変有効な概念を通じて、直ちに、Linnik [31, 32] の完全証明に結果した。これは、第2次大戦後の数論における最大の収穫の1つである。Linnik の証明は、まことに力にあふれたものであるが、主な武器は、Chebychev の不等式、Weil の Kloosterman 和の評価及び $L(s, \chi)$ の6乗の平均値の評価である。この $L(s, \chi)$ の評価が A. I. Vinogradov の結果 [48] に更なるのである。

（このに、Bombieri の発見は Hooley の仮定した Riemann 予想にかかり得るものであり、従て Hooley の方法は全面的に支持されることを示したのである。

定理 5.2 (Hooley - Linnik)

充分大きな整数 N を、1つの素数と2つの平方数の和における仕方の数を $Q(N)$ とすれば

$$Q(N) = \pi \frac{N}{\log N} \prod_{p \mid N} \left(1 + \frac{\rho(p)}{p(p-1)}\right) + O(N(\log N)^{-(1+\delta)})$$

ここは $\chi(n)$ は mod 4 での non-principal character. δ は $1/35$ より大きいある常数である。

証明 (概略)

まず $r(n)$ を, n を 2つの平方数にかけるとする数とすれば, よく知られているように,

$$r(n) = 4 \sum_{n=lm} \chi(l)$$

従って

$$\begin{aligned} Q(N) &= \sum_{p \leq N} r(N-p) = 4 \sum_{p \leq N} \sum_{N-p=lm} \chi(l) \\ &= 4 \left\{ \sum_{\substack{l \leq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-\beta}, \\ p \leq N}} \chi(l) + \sum_{\substack{l \geq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-\beta}, \\ p \leq N}} \chi(l) + \sum_{\substack{N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-\beta} < l < N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{\beta}, \\ N-p=lm, p \leq N}} \chi(l) \right\} \\ &= 4 \{ \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \}. \end{aligned}$$

定理 1.5 を用いて, 容易に

$$\Sigma_1 = \frac{\pi}{4} \frac{N}{\log N} \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) + O(N(\log N)^{-A})$$

$$\Sigma_2 = O(N(\log N)^{-A}).$$

よって問題は, Σ_3 をいかに鋭く評価するか, ということになる。Hooley は次のように Σ_3

を分解した:

$$D(n) = \sum_{l|m, N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-\beta} < l < N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{\beta}} 1, \quad F(n) = \sum_{l|m, N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-\beta} < l < N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{\beta}} \chi(l)$$

として,

$$|\Sigma_3| \leq \left\{ \sum_{p \leq N, D(N-p) \neq 0} 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{p \leq N} F^2(N-p) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

とするのである。この右辺の 2つの和の評価には, それ自身として大変意味深い補題を用いる。

補題 1 (Hooley)

$\Omega(m)$ は重複を数えての m の素因数の数。又 $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1 < \beta \leq \frac{3}{2}$ として,

$\delta_u = u - u \log u$, $y > \exp(e)$ とする,

$$(i) \sum_{m \leq y, \Omega(m) \geq \beta \log \log y - 1} m^{-1} \ll (\log y)^{\frac{\beta}{2}}$$

$$(ii) \sum_{\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}(\log y)^{-\beta-2}} < m \leq \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}(\log y)^{\beta}}, \Omega(m) \leq \alpha \log \log y} m^{-1} \ll (\log y)^{\frac{\alpha}{2}-1} \log \log y.$$

補題 2 (Hooley)

$$\alpha = N^{(\log \log N)^{-2}}, \quad P = \prod_{p \leq x} p \quad \text{とし,}$$

$$g(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu: \text{prime} \leq \alpha \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad h(\nu) = \begin{cases} 1 & (\nu, P) = 1 \\ 0 & (\nu, P) > 1 \end{cases}$$

とする. 二の $g(\nu)$, $h(\nu)$ より $f(\nu) = g(\nu) + h(\nu)$ とする. $\alpha \leq \nu \leq N$.

$f \leq N^{1-\varepsilon}$ (ε は $11 < S$ で $0.1 < \varepsilon < 0.11$) に対して.

$$\sum_{\nu \leq y, \nu \equiv a \pmod{q}} f(\nu) = \begin{cases} g(q)^{-1} B(N) y + O(q^{-1} (\log N)^{-5} N), & (a^{(1)}, q) = 1 \\ O(q^{-1} (\log N)^{-5} N) & (a^{(1)}, q) > 1 \end{cases}$$

但し, $B(N)$ は, N のみに依りて定まる

$$B(N) \ll (\log N)^{-1} (\log \log N)^2.$$

$$\text{更に } a^{(1)} = \prod_{p|a, p \leq 2} p.$$

補題 1 は Erdős [12] のアイデアで証明される. 又補題 2 は, Brun Sieve の簡単な変形で証明される. 補題 2 は とくに興味深い. というのは, 素数 $p \leq N$ は, $f(\nu) \neq 0$ なる ν の集合に入っており, しかも, この ν の集合は, 算術数列中にも, ぎっしりと滑らかに分布している. それに, 素数定理からのずれもあまり大きくなり. この意味で Linnik は 「quasi-prime」 という名をつけたのである.

さて, 問題の和において, 素数の列を quasi-prime に換えることにし, あるいは,

補題 1, 2 の援助のもとに, 複雑ではあるが, 本質的には困難でない計算のすゝに,

$$\sum_{p \leq N, D(N-p) \neq 0} 1 \ll N (\log N)^{-(1+\delta')} (\log \log N)^4$$

$$\sum_{p \leq N} F^2(N-p) \ll N (\log N)^{-1} (\log \log N)^7$$

$$\delta' = 1 - \frac{1}{2} c \log 2 \quad (> 0)$$

が結論されるのである。これにより定理 5.2 が確定するのである。

全く同様にして

定理 5.3 (Hooley-Linnik)

固定した $a (\neq 0)$ に対して

$$\sum_{p \leq N} r(p-a) = \pi \frac{N}{\log N} \prod_{p|a} \left(1 + \frac{r(p)}{p(p-1)}\right) + O(N (\log N)^{-(1+\delta)})$$

従って, $x^2 + y^2 + a$ という形の素数の無限に存在する。

所で, この定理 5.3 について, つぎの問題が考えられる。それは「重み」 $r(p-a)$ をつけ

ながら, 本当に $x^2 + y^2 + a$ の形の素数を数え上げたら一体どうなるか, というのである。

いま, n が $x^2 + y^2$ とかけるとき $b(n) = 1$, そうでないとき, $b(n) = 0$ とすると

予想 ([35])

$$\sum_{p \leq N} b(p-a) = (1+o(1)) \mathfrak{S}(a) N (\log N)^{-\frac{3}{2}}$$

ここに

$$\mathfrak{S}(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{\substack{p|a \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \frac{p^2-1}{p^2-p+1} \prod_{p \equiv -1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)$$

私は, この予想を証明することは大変困難であると思う。部分的には次の結果を得る。

定理 5.4

$$\sum_{p \leq N} b(p-a) \gg N (\log N)^{-2}$$

詳しいことは本橋 [35] を見るといい。

§ 6. 「加法的約数問題」への応用

加法的約数問題とは、次の和の asymptotic-formula を求めることである。

$k_1, k_2 \geq 2$, $a \neq 0$ について,

$$D_a(N; k_1, k_2) = \sum_{n \leq N} \tau_{k_1}(n) \tau_{k_2}(n+a) \quad (N \rightarrow \infty)$$

$a=0$ ならば何の問題もないのであるが、 $a \neq 0$ とすると、たちまち困難になる。おそ

らく、主項は、 $O(a) N (\log N)^{k_1+k_2-2}$ という形であろう。

このような問題にはじめて手を付けたのは Ingham [26] であらう。(Ramanujan が知らぬ)。彼は $D_a(N; 2, 2)$ の asymptotic formula を証明した。Ingham の結果の大変面白い応用が Erdős [14] によって与えられている。又, Estermann は [15, 16] において、 $D_a(N; 2, 2)$ 及びその Conjugate について深く研究し、この問題と、

Kloostermann 和との関係を明らかにした。Estermann の結果において Erdős の結果は少々深められる。これについては本橋 [36] を見るといい。更に深い発展は Hooley [23] によってなされた。彼は $D_a(N; 2, 3)$ を計算したのである。彼の証明においては、Weil の Kloostermann 和の評価が決定的である。そして一挙に、任意の k について $D_a(N; 2, k)$ の asymptotic-formula を Linnik [32] によって証明された。再び Weil による Kloostermann 和の評価が本質的に作用している。

さて、前書きが長くなったが、ここで考えるのは、和

$$\sum_{n \leq N} \tau^2(n) \tau(n+1) \quad (N \rightarrow \infty)$$

である。この和は、上記の「すゝめ」の方法でもとりあつかえないものである。たゞ 1 つ

Large Sieve (定理 1.3) のみで有効である。しかし, Kloostermann 和は必要となる。

定理 6.1 ([34])

$$\sum_{n \leq N} \tau^2(n) \tau(n+1) = \mathcal{O}(N (\log N)^4) + O(N (\log N)^3 \log \log N)$$

== には

$$\mathcal{O} = \pi^{-2} \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \right\}.$$

証明の方針は定理 1.5 とよく似ているのであるが, つぎの補題を証明するのである。

補題 3 ([34])

$$\sum_{q \leq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^B} \max_{y \leq N} \max_{(p, q)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv 1 \pmod{q}, n \leq y}} \tau^2(n) - g(q)^{-1} (f_1(q) y (\log y)^3 + f_2(q) y (\log y)^2 + f_3(q) y (\log y) + f_4(q) y) \right|$$

$$\leq N (\log N)^{-A}$$

但し $B = 16A + 52$.

又 $f_1(q), \dots, f_4(q)$ は q のみに関係する函数である。

この補題は,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \tau^2(n) n^{-s} = L^4(s, \chi) L^{-1}(2s, \chi^2)$$

を用いて定理 1.3 のことに証明される。又 Brun-Titchmarsh の定理に相当する

I. Vinogradov - Linnik [49] の補題も必要となる。詳しくは, [34] を見れば

たし。

§7. Goldbach-Rényi の定理.

本来ならば, この節は, Large Sieve の応用のオチにふさわしくあるべきであらうが, 実際には
 二つに分けて, 数論に於て, 11 かに多くの重要な問題が「average」な性格を帯びて

かを示したからである。すなわち Titchmarsh の初等問題にしても, Hardy-Littlewood の予想にしても, $\pi(y; f, l)$ のことを深く知る必要はなく, それらの「ある多くのものを全体として考えれば充分である」といふことなのである。この「多くのものを同時に考える」という立場からはじめて具体化したのが Rényi の研究 [38] なのである。

$$\text{さて, } D = D(N, \vartheta) = \prod_{p \leq N^{\vartheta}, (p, N)=1} p \quad (\vartheta < 1)$$

として, N を偶数 とすれば $N = \rho + \rho^*$ (但し ρ^* は ρ^{-1} 個の素数の積) という表現の数は,

$$\sum_{(N-\rho, \rho)=1, \rho \leq N} 1$$

より大である。これは Brun sieve によつて

$$\sum_{(N-\rho, \rho)=1, \rho \leq N} 1 \geq \sum_{Q \in \Omega} \mu(Q) \sum_{\substack{\rho \equiv N \pmod{Q} \\ \rho \leq N}} 1$$

となる。但し, Ω は, D の約数の, ある特殊な集合である (内山氏の論説を参照)

よつて, ϑ を充分小くとすれば $Q \leq N^{\frac{1}{3}}$ となる。

さて, 上記不等式の右辺は, 定理 1.5 によつて

$$\begin{aligned} L_1(N) \sum_{Q \in \Omega} \mu(Q) \vartheta^1(Q) + O\left\{ \sum_{Q \leq N^{\frac{1}{3}}} |\pi(N; Q, N) - \vartheta^1(Q) L_1(N)| \right\} \\ \geq c(\vartheta) N (\log N)^{-2} \end{aligned}$$

即ち, $N = \rho + \rho^*$ という表現は可能なのである。しかも表現の仕方は相当沢山ある。とわかる。

上記の考察から明らかなように, Rényi の議論では, Large sieve は定理 1.5

ほどには強くなくてよく, 何かある数 α について

$$\sum_{Q \leq N^{\alpha}} |\pi(N; Q, N) - \vartheta^1(Q) L_1(N)|$$

の自明でない評価が出現するよりはよいのである。しかし、古典的な Siegel の定理として、 $Q \leq (\log N)^A$ (A は任意の定数) までしか力を有しているのである。Large Sieve 流の考えは、この点を突破したのである。

§ 8. その他の応用

(i) 隣り合う素数の差について

Hardy-Littlewood は P.N. 8 [21] の初版の頁の脚注で P.N. 7 の予想を述べているのであるが、それによると、彼らは、拡張した Riemann 予想のもとに、

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) / \log p_n \leq \frac{2}{3}$$

を証明したとのことである。しかし P.N. は発表されなかった。

多くの人々によつて、この問題が取り上げられたが、Large Sieve (定理 1.5) による、次の結果には、とても及ばなかった。

定理 8.1 (Bombieri-Davenport) [5]

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) / \log p_n \leq \frac{1}{8} (2 + \sqrt{3}) = 0.4665 \dots$$

(ii) $L(1, \chi)$ の大きさについて

Real character $\chi \pmod{q}$ について、 $L(1, \chi)$ の大きさを評価することは、現在、残されている最大の問題の一つである。Chowla [7] は次のことを証明した。

無限に多くの q について

$$L(1, \chi) > (1 + o(1)) \frac{\pi^2}{6} e^{-\gamma} (\log \log q)^{-1}$$

又無限に多くの q について

$$L(1, \chi) < (1 + o(1)) e^{\gamma} \log \log q$$

但し γ は Euler 常数である。

Bateman, Chowla 及び Erdős [2] は、上記において、 q を素数に制限してよいことを Large Sieve (定理 1.2) のもとに証明した。これは大変深いことであると思われる。

(iii) Goldbach 予想についての Turán の研究。

Linnik [30] は、ある簡単な考察のもとに、この問題においては「大きな」 q に対する character の本質的であろう、と予想している。一方 Turán は一連の研究 [44-46] において、全く別の観点から同じ結論に達した。彼の議論においては Large Sieve (定理 1.4) が重要である。結果を標語的に言えば

「Goldbach 予想及び双子素数の問題については「大きな」 q に対する

L -函数の「小さな」零位の分布を知れば充分である」

ここで「小さな」と言うのは、実軸に近しい、という意味である。

以上の他にも、Hardy-Littlewood 予想「H」についての Misch [33] の研究、Euler 函数 $\varphi(n)$ の値の分布についての Schinzel [41], Wang [50] の研究など Large Sieve のからむ多くの話題があるが、あまりに特殊に存するので、この位にしておく。又、Large Sieve から発生した問題で「二様分布性」の語があるが、これは概ね概ね熟していると思えるので割愛する。これについては Barban [1] を参照された。

最後に一言： Large Sieve の本性は「average」、即ち確率論的な何かである。所以、数論の本質は、あくまでも個別的な発想にある。自明なことは

あるが、このまゝに Large Sieve の限界がある。「個別的」な $\pi(y; q, \ell)$ について我々はあまりに少ししか知らないのである！

文 献

- [1] M. B. Barban : The large sieve method and its application in the theory of numbers. Russ. Math. Surveys 21 (1966), 49-103.
- [2] P. T. Bateman, S. Chowla and P. Erdős : Remarks on the size of $L(1, \chi)$. Publ. Math. Debrecen 1 (1949-50), 165-182.
- [3] H. Bilharz : Primdivisoren mit vorgegebener Primitivwurzel. Math. Ann. 114 (1937), 476-492.
- [4] E. Bombieri : On the large sieve. Mathematika 12 (1965), 201-225.
- [5] E. Bombieri and H. Davenport : Small differences between prime numbers. Proc. Royal Soc. 293 (1966), 1-18.
- [6] D. A. Burgess and P. D. T. A. Elliott : The average of the least primitive root. Mathematika 15 (1968), 39-50.
- [7] S. Chowla : Improvement of a theorem of Linnik and Walfish. Proc. London Math. Soc. (2) 50 (1949), 423-429.
- [8] H. Davenport : Multiplicative number theory. Markham (Chicago) 1967.
- [9] H. Davenport and H. Halberstam : The values of a trigonometrical polynomial at well spaced points. Mathematika 13 (1966), 91-96.

- [10] P. D. T. A. Elliott : A problem of Erdős concerning power residue sums.
Acta Arith. 13 (1968), 131-149.
- [11] P. Erdős : Some remarks on Euler's φ -function. Acta Arith. 4
(1958), 10-19.
- [12] P. Erdős : On the normal number of prime factors of $p-1$ and
some related problems concerning Euler's function. Quart. J. Math.
Oxford 6 (1935), 205-213.
- [13] P. Erdős : Remarks on number theory I. Math. Lapok 12 (1961),
10-17.
- [14] P. Erdős : Asymptotische Untersuchungen über die Anzahl der
Teiler von n . Math. Ann. 169 (1967), 230-238.
- [15] T. Estermann : On the representation of a number as the sum of
two products. Proc. London Math. Soc. (2) 31 (1930), 123-133.
- [16] T. Estermann : Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von
zwei Produkten. J. Reine Angew. Math. 164 (1931), 173-182.
- [17] P. X. Gallagher : The large sieve. Mathematika 14 (1967), 14-20.
- [18] P. X. Gallagher : Bombieri's mean value theorem. Mathematika
15 (1968), 1-6.
- [19] M. Goldfeld : Artin's conjecture on the average. Mathematika
15 (1968), 223-226.
- [20] G. H. Hardy and J. E. Littlewood : Some problems of "partitio

- numerorum" III : On the expression of a number as a sum of primes. Acta Math. 44 (1923), 1-70.
- [21] G. H. Hardy and J. E. Littlewood : Some problems of "partitio numerorum" VIII : The number $T(k)$ in Waring's problem. Proc. London Math. Soc. (2) 28 (1927), 518-542.
- [22] C. B. Haselgrove : Some theorems in the analytic theory of numbers. J. London Math. Soc. 26 (1951), 273-272.
- [23] C. Hooley : An asymptotic formula in the theory of numbers. Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 396-413.
- [24] C. Hooley : On the representation of a number as the sum of two squares and a prime. Acta Math. 97 (1957), 189-210.
- [25] C. Hooley : On Artin's conjecture. J. Reine Angew. Math. 225 (1967), 209-220.
- [26] A. E. Ingham : Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. 2 (1927), 202-208.
- [27] S. Lang and J. Tate : The collected papers of Emil Artin. Addison-Wesley (1965).
- [28] Ju. V. Linnik : The large sieve. Dokl. Akad. Nauk SSSR 30 (1941), 292-294.
- [29] Ju. V. Linnik : A remark on the least quadratic non-residue. Dokl. Akad. Nauk SSSR 36 (1942), 119-120.

- [30] Ju. V. Linnik : Some conditional theorems concerning the binary Goldbach problem. Izv. Akad. Nauk SSSR s.M. 16 (1952), 503—520.
- [31] Ju. V. Linnik : An asymptotic formula in an additive problem of Hardy and Littlewood. Izv. Akad. Nauk SSSR s.M. 24 (1960), 629—706.
- [32] Ju. V. Linnik : The dispersion method in binary additive problems Amer. Math. Soc., Trans. Math. Monog. 4 (1963).
- [33] R. J. Meach : On the equation $n = p + x^2$. Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 494—512.
- [34] Y. Motohashi : An asymptotic formula in the theory of numbers to appear in vol. 16 no. 3 of Acta Arith.
- [35] Y. Motohashi : On the distribution of the prime numbers which are of the form $x^2 + y^2 + 1$. to appear in vol. 16 no. 4 of Acta Arith.
- [36] Y. Motohashi : On the sum of the number of divisors in a short segment. to appear.
- [37] K. Pracher : Primzahlverteilung. Springer (Berlin 1957).
- [38] A. Rényi : On the representation of an even number as the sum of a prime and an almost prime. Amer. Math. Soc., Trans. ser. II. Vol. 19, 299—321.
- [39] A. Rényi : Un nouveau théorème concernant les fonction

indépendantes et ses applications à la théorie de nombres.

J. Math. Pures Appl. (9) 28 (1949), 137-149.

[40] K.F. Roth : On the large sieve of Linnik and Rényi. Mathematika. 12 (1965), 1-9.

[41] A. Schinzel : On functions $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$. Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 3 (1955), 415-419.

[42] T. Tatuzawa : On the zeros of Dirichlet's L-functions. Proc. Japan Acad. 26 (1950), 1-13.

[43] E.C. Titchmarsh : A divisor problem. Rend. Palermo 54 (1930), 414-429.

[44] P. Turán : On the twin-prime problem I. Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci. 9 (1964), 247-261.

[45] P. Turán : Some function theoretic sieve methods in the theory of numbers. Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 1661-1664.

[46] P. Turán : On the twin prime problem. Acta Arith. 13 (1967) 61-89 and 14 (1968), 399-407.

[47] A.I. Vinogradov : On numbers with small prime divisors. Dokl. Akad. Nauk SSSR 109 (1956), 683-686.

[48] A.I. Vinogradov : On the density hypothesis for Dirichlet's L-series. Izv. Akad. Nauk SSSR s.m. 29 (1965), 903-934.

[49] A.I. Vinogradov and Ju.V. Linnik : Estimate of the sum of the

number of divisors in a short segment of an arithmetic progression. *Uspehi Mat. Nauk SSSR* 12 (1957), 277-280.

[50] Y. Wang : A note on some properties of the arithmetical functions $g(n)$, $\sigma(n)$ and $d(n)$. *Acta Math. Sinica* 8 (1958), 1-11.

[51] A. Weil : On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 34 (1948), 204-207.

(註) Barban [1] に大変よい文献表がある。