

Weighing 行列の構成

愛媛大 教育 大森博之 (Hiroyuki Ohmori)

位数 n , 重さ k の Weighing 行列 (W) とは, 成分が $0, +1, -1$ で $W^t W = k I_n$ のときという。ただし, ${}^t W$ は W の転置行列である。特に $k=n$ のときは, 位数 n の Hadamard 行列と呼ばれている。

今, 同一な位数および重さを持つ 2 つの Weighing 行列が与えられているとき, 一方の行列の行および列の適当な置換, さらに行および列に適当に -1 をかけることにより他方の行列に一致させることができるとき, 2 つの行列は同値であるとす。この同値関係により分類が完成されているものは, 現在のところ以下の通りである (I), (II)。

- (i) 重さ k が 5 以下の場合ですべての位数 n について。
- (ii) 位数が 13 以下の場合ですべての重さについて。
- (iii) 位数が 28 以下の Hadamard 行列について。

筆者は, 重さ 6 の Weighing 行列の分類を試みているが, 未だ完成していない。今回も, その中間報告である。

任意の位数の、重さ6の Weighing 行列が与えられたとき、最初の 6×6 行列は一般性を失うことなく次の形をしている。

$$(*) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ & a_{ij} & & & & \end{bmatrix}$$

a_{ij} は $0, \pm 1$ で A の $2 \sim 6$ 行および $2 \sim 6$ 列は 1 行および 1 列に直交している。

今、(*) の条件をみたす 6×6 行列を実行可能な行列と呼ぶことにする。また、実行可能な2つの行列が与えられたとき、一方の行列またはその転置行列の行および列の適当な入れ換えさらに行および列に適当に $\pm$ をかけて他方の実行可能な行列に一致させることが出来るとき、2つの行列は同値であるとする。このとき次のことがいえる。

命題 1 同値であり実行可能な行列は 25 個ある。

その内の一つに、(*) の成分が $a_{ij} = -\delta_{ij}$ (コネッカ-デルタ) のものがある。前回の報告でこのタイプに属する行列は、「同値性を除いて一意である」と主張したが、これは誤りである事が判明した。以下その訂正と若干の新しい結果を述べる。尚、上述のタイプに属する行列を SBP 型であるとする(そのような行列 W が存在するとすると $W * W$: W の Hadamard 積は Semi-bi plane の結合行列となる、という)。

命題 2 位数 2^{k+1} , 重 k の SBP 型 Weighing 行列
が任意の正整数 k に対して存在する。

(略証) 行列 $X(l \times m)$, $Y(l' \times m')$ (ただし $l > l'$) に対し

$$X \oplus Y = \left[\begin{array}{c|c} X & \begin{array}{c} O_{(l-l') \times m'} \\ \hline Y \end{array} \end{array} \right] \quad \text{と置く。}$$

また

$$S_d^{(1)} = [\underbrace{1, 1, \dots, 1}_d] \text{ を level 1, size } d \text{ の}$$

S -行列という。

帰納的に, level $i+1$, size d の S -行列を

$$S_d^{(i+1)} = \begin{bmatrix} S_{d-1}^{(i)} \\ (-1)^i I_{C(d,i)} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} S_{d-2}^{(i)} \\ (-1)^i I_{C(d,i)} \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{bmatrix} S_i^{(i)} \\ (-1)^i I_{C(i,i)} \end{bmatrix}$$

によって定義する。ただし, $d \geq i+1 \geq 2$,

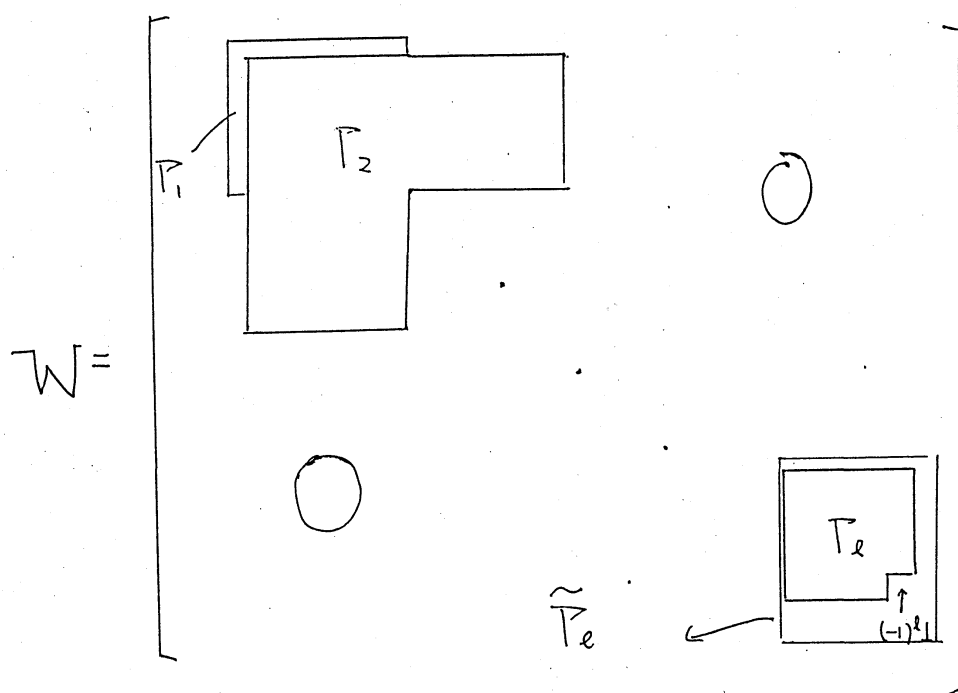
I_γ は位数 γ の単位行列, また $C(d,i) = d C_i$

構成 $P_i = \begin{bmatrix} (-1)^{i-1} I_{C(d,i-1)} & S_d^{(i)} \\ (S_d^{(i)})^t & \end{bmatrix}$ とおく。

ただし, $k = d-1$, $1 \leq i \leq d$

$W = \text{diag}(P_1, P_2, \dots, P_{d-1}, \tilde{P}_d)$ とおくと,

$\tilde{C} = \text{diag}(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ は



(注1) 行列 H_2 は位数 2 の Hadamard 行列とする。 W_k ($k \geq 3$) を帰納的に
$$W_k = \begin{bmatrix} W_{k-1} & I_{k-1} \\ I_{k-1} & -W_{k-1} \end{bmatrix} \quad (W_2 = H_2)$$
 とすると W_k は位数 2^{k-1} , 重さ k の SBP 型の Weighing 行列となる。 $k = 3, 4, 5, 6$ に対して W と W_k は同値となるが、一般の k に対しても同型と思われる。

(注2) 重さ k の SBP 型の Weighing 行列の位数を n とすると、

$$(**) \quad k C_2 + 1 \leq n \leq 2^{k-1}$$

と思われるが 証明は出来ていない (ただし, 行列は既約とする)。

以下, $k = 5, 6$ に対して, $(**)$ の等号を満たさない行列の存在を示す。

[I] $k=5$ のときの SBP 型の Weighing 行列

この場合行列の位数 n は $n=11, 12, 16$ である。しかし、 $n=11$ の場合、balanced weighing design となり存在しないことが知られている。

一方、 k が 5 以下の場合の Weighing 行列の分類は完成されていると述べていた (1.11)。しかし、その分類には無い新しい行列を構成することができた。構成方法は [II] で示す。

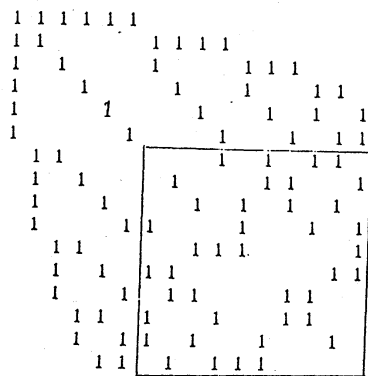
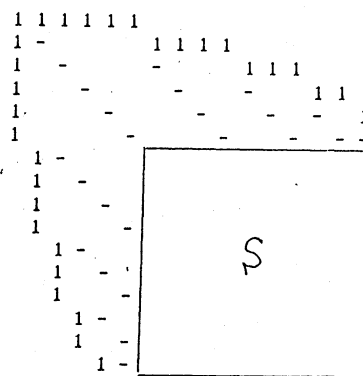
命題 3 位数 12, 重さ 5 の SBP 型の Weighing 行列が一意的に存在する (F1)。

[II] $k=6$ のときの SBP 型の Weighing 行列

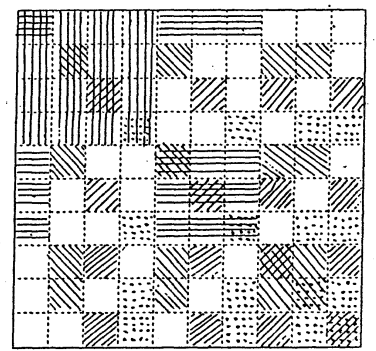
この場合、もしこの型の行列が存在するとすれば $n=16, 20, 24, 28$ である。 $n=16, 18$ は不等式 (**) で等号が成立する。この節で、 $n=16$ の場合 (balanced weighing design) は不存在である事及び $n=20$ の場合の一構成法を示す。

命題 4 位数 16, 重さ 6 の SBP 型の Weighing 行列は存在しない。

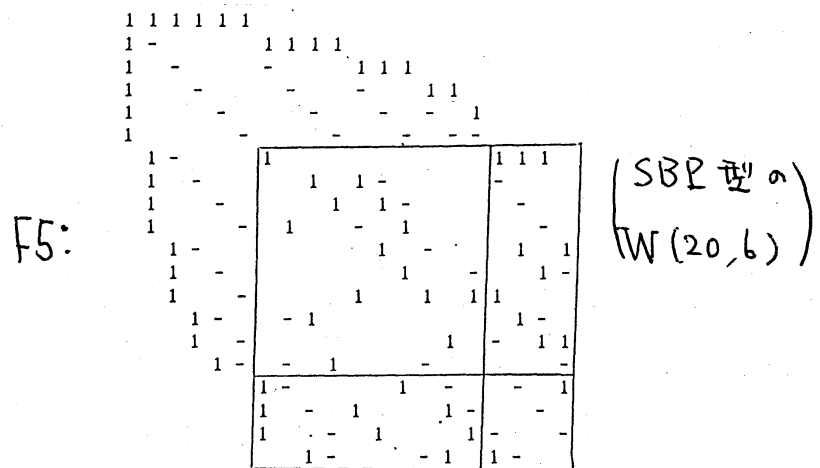
(略証) もしそのような行列 W が存在したとすると $W \times W$ は $2-(16, 6, 2)$ デザインとなる。そのようなデザインは同値を除くと 3 個存在

F2: $D(16,6,2)$ 

F3



F4



F5:

参考文献

- (1) H.C. Chan, et.al., "On equivalent weighing matrices", ARS Combinatoria (1986)
- (2) N. Hamada, "On the p-Rank of the Incidence Matrix of a Balanced or Partially Balanced Incomplete Block design and its Applications to Error Correcting Codes", Hiroshima Mathematical Journal (1973)
- (3) H. Ohmori, "Classification of weighing matrices of small orders", Hiroshima Mathematical Journal (1992)