

坑内における垂直ひずみの潮汐成分の観測

小 沢 泉 夫

OBSERVATIONS OF THE VERTICAL STRAINS OF THE EARTH TIDE IN THE TUNNEL

By *Izuo OZAWA*

Synopsis

Observations of the vertical strains of the earth tide have been performed with three kinds of the vertical extensometers in the former Osakayama railway tunnel since 1952.

These extensometers have been set in the well, on the vertical radius and on the side wall in the tunnel respectively.

The tidal analyses have been practiced for the data of the three kinds of extensometers.

It studied the relations between the tidal components and the numbers of the days of the analysed periods.

It studied the effects of the tunnel to the tidal extensions on the vertical chords and the depth of the well in the tunnel.

1. ま え が き

著者は1952年頃から地球潮汐の垂直ひずみ成分を求める目的で、垂直成分の伸縮計を試作して、旧東海道線の逢坂山トンネルの中で連続観測を行なっている。

トンネルは水平方向に掘られており、垂直方向には長くないので、垂直方向の測線の取り方によって、いろいろと坑道の影響の出方が相違している。伸縮計には定尺に針金を使ったもの、棒を使ったもの、パイプを使ったものの3種類のものを使った。また、基線の位置としては、トンネルの肩と床面までの鉛直線、トンネルの天井の最も高い所と床面との間の鉛直線、トンネルの床面から直径約10cmの井戸を掘って、床面と井戸の底面との間の鉛直線を使ったもの、3種類の測線について試してみた。

これら3つの場合の観測結果を解析し、これらの場合について、坑道の影響がどのように現れるかを理論的に考察した。また、潮汐解析の常用法であるダーウィン法による結果のほかに、フーリエ解析法による方法について、特に解析期間の長さとその結果に関する考察を行った。

2. 基 礎 理 論

天体と地球との間の引力による潮汐変形はスフェロイダル（伸び縮み）型と近似されている。そうして、地球坐標（ γ, θ, ϕ ； γ ：半径， θ ：余緯度， ϕ ：東経度）に関する地球潮汐変位のそれぞれの成分は¹⁾、

$$u_r = \frac{h}{g} W_2, \quad u_\theta = \frac{l}{g} \frac{\partial W_2}{\partial \theta}, \quad u_\phi = \frac{l}{g \sin \theta} \frac{\partial W_2}{\partial \phi}, \dots \dots \dots (1)$$

で与えられている。ここに g は定数で便宜的に地表付近の重力加速度を用いている。 h はラブの潮汐定数， l は志田の潮汐定数， W_2 は潮汐力のポテンシャルで2次の体球関数に比例する値である。

この場合のひずみの成分は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= \frac{1}{rg} \left\{ r \frac{\partial h}{\partial r} + 2h \right\} W_2, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{rg} \left\{ h W_2 + l \frac{\partial^2 W_2}{\partial \theta^2} \right\}, \\
e_{\phi\phi} &= \frac{1}{rg} \left\{ h W_2 + \frac{l}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \phi^2} + l \cot \theta \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right\}, \quad e_{\theta\phi} = \frac{2l}{rg \sin \theta} \left\{ \frac{\partial^2 W_2}{\partial \theta \partial \phi} - \cot \theta \frac{\partial W_2}{\partial \phi} \right\}, \\
e_{r\theta} &= \frac{1}{rg} \left\{ h + r \frac{\partial l}{\partial r} + l \right\} \frac{\partial W_2}{\partial \theta}, \quad e_{r\phi} = \frac{1}{rg \sin \theta} \left\{ h + r \frac{\partial l}{\partial r} + l \right\} \frac{\partial W_2}{\partial \phi}. \dots\dots\dots(2)
\end{aligned}$$

地球の表面では自由表面の条件から、 $e_{r\theta} = e_{r\phi} = 0$ である。また、応力の成分はひずみと応力との関係から次の通りである。

$$\begin{aligned}
\widehat{rr} &= \lambda D + \frac{2\mu}{rg} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} + 2h \right) W_2, \quad \widehat{\theta\theta} = \lambda D + \frac{2\mu}{rg} \left(h W_2 + l \frac{\partial^2 W_2}{\partial \theta^2} \right), \\
\widehat{\phi\phi} &= \lambda D + \frac{2\mu}{rg} \left(h W_2 + \frac{l}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \phi^2} + l \cot \theta \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right), \quad \widehat{\theta\phi} = \frac{2\mu l}{rg \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial \theta \partial \phi} - \cot \theta \frac{\partial W_2}{\partial \phi} \right), \\
\widehat{r\theta} &= \frac{\mu}{rg} \left(h + r \frac{\partial l}{\partial r} + l \right) \frac{\partial W_2}{\partial \theta}, \quad \widehat{\phi r} = \frac{\mu}{rg \sin \theta} \left(h + r \frac{\partial l}{\partial r} + l \right) \frac{\partial W_2}{\partial \phi}. \dots\dots\dots(3)
\end{aligned}$$

$$\text{ただし, } D = \frac{1}{rg} \left(r \frac{\partial r}{\partial h} + 4h - 6l \right) W_2.$$

また、地球の表面では

$$\widehat{rr} = \widehat{\theta r} = \widehat{\phi r} = 0,$$

である。

次にトンネルがあるためにトンネルおよびその近傍ではどのような応力場ができるか、また、それによって観測しているひずみにどのような影響が生ずるかについて考えよう。

トンネルとその近傍の応力場については、簡単な例は大抵の弾性体の力学の本で述べられている²⁾。また、いろいろな断面の坑道の応力場については、光弾性実験の結果を利用した平松良雄、岡行俊³⁾の研究がある。また、最近では計算機の発達により有限要素法がよく用いられ、例えば竹本修三⁴⁾の計算などがある。

ここではできるだけ数値計算によらずに解析的に解くことを試みてみよう。

地球潮汐における応力は3つの主応力、すなわち、垂直成分 σ_{r0} 、余緯度成分 $\sigma_{\theta 0}$ 、東経度成分 $\sigma_{\phi 0}$ で表現できる。

従ってトンネルがないとき垂直ひずみ e_{rr0} は、ヤング率を E 、ポアソン比を ν とすると

$$e_{rr0} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{r0} - \nu (\sigma_{\theta 0} + \sigma_{\phi 0}) \right\},$$

である。また、トンネルの方位角が ψ のとき、トンネルがない場合の $\psi + \pi/2$ 方向の応力 σ は

$$\sigma = \sigma_{\theta 0} \sin^2 \psi + \sigma_{\phi 0} \cos^2 \psi,$$

ψ 方向の応力 σ' は

$$\sigma' = \sigma_{\theta 0} \cos^2 \psi + \sigma_{\phi 0} \sin^2 \psi,$$

せん断応力 τ' は

$$\tau' = (\sigma_{\phi 0} - \sigma_{\theta 0}) \sin \psi \cos \psi,$$

である。トンネルがあるとその付近の応力場が変ってくる。しかし、2次元的な取扱では影響を受ける成分は σ_{r0} と σ だけで σ' と τ' については考慮しなくてよい。

いま、簡単のためにトンネルは半径は a で、方位角 ψ の方向に充分長いとする。また、地球のスケールに較べると a は非常に小さいので、近似的に σ_{r0} 、 σ は一様であると取扱ってよい。

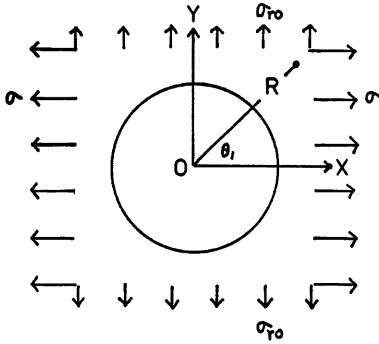


Fig. 1 Composition of the original stresses.

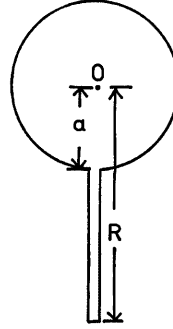


Fig. 2 Structure of the well containing the extensometer.

いま、極坐標の (R, θ_1) を **Fig. 1** のように取る。また、トンネル付近の元の応力は **Fig. 1** のようであると考えてよい。この場合、トンネルがあるための応力場の成分、 σ_{r1} , $\sigma_{\theta 1}$, $\tau_{r\theta 1}$ は次のように与えられる²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{\sigma + \sigma_{r0}}{2} \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right) + \frac{\sigma - \sigma_{r0}}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{R^4} - \frac{4a^2}{R^2} \right) \cos 2\theta_1, \\ \sigma_{\theta 1} &= \frac{\sigma + \sigma_{r0}}{2} \left(1 + \frac{a^2}{R^2} \right) - \frac{\sigma - \sigma_{r0}}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{R^4} \right) \cos 2\theta_1, \\ \tau_{r\theta 1} &= -\frac{\sigma - \sigma_{r0}}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{R^4} + \frac{2a^2}{R^2} \right) \sin 2\theta_1. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

いま、**Fig. 2** のようにトンネルの床面から $R-a$ の深さの井戸を掘り、伸縮計で床面から井戸の底までの間の平均の伸びひずみを観測しているとする (**Fig. 2**)。

式(4)とひずみと応力との関係とから、 y 軸上の y 方向の伸びひずみ e_{yy} は

$$e_{yy} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{\sigma + \sigma_{r0}}{2} \left(1 - \frac{a^2}{R^2} \right) - \frac{\sigma - \sigma_{r0}}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{R^4} - \frac{4a^2}{R^2} \right) - \nu \left[\frac{\sigma + \sigma_{r0}}{2} \left(1 + \frac{a^2}{R^2} \right) + \frac{\sigma - \sigma_{r0}}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{R^4} \right) \right] \right\}. \dots\dots\dots(5)$$

これから伸縮計で観測している平均の伸びひずみ ϵ_r は、 r に無関係な積分常数を省略すると

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{R-a} \int_a^R e_{yy} dR \\ &= \frac{\sigma_{r0}}{2E(R-a)} \left\{ -\frac{a^4}{R^3} + \frac{5a^2}{R} - 6a + 2R + \nu \left(\frac{a^2}{R} - \frac{a^4}{R^3} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\sigma}{2E(R-a)} \left\{ \frac{a^4}{R^3} - \frac{3a^2}{R} + 2a - \nu \left(2R - \frac{a^2}{R} - \frac{a^4}{R^3} \right) \right\}, \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

と求められる。式(6)では $R \gg a$ ならば第1項は σ_{r0}/E に、第2項は $-\nu\sigma/E$ となる。

著者の観測の場合は $R=4a$ であるので式(6)で $R=4a$ とおくと ϵ_r は

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_{r0}}{E} (0.5391 - 0.2344\nu) + \frac{\sigma}{E} (0.2109 - 1.2891\nu),$$

となり、 $\nu=1/4$ とすると

$$(\epsilon_r)_{\nu=1/4} = (0.4805\sigma_{r0} + 0.1114\sigma)/E,$$

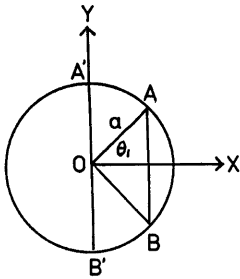


Fig. 3 Base lines on the vertical radius A'B' and the vertical chord AB on the wall in the tunnel.

と求められる。

次に、トンネルの天井から床まで、あるいは肩から床までを観測している場合について考えよう。Fig. 3 で示す A から B まで、あるいは A' から B' までの壁面では応力成分の σ_r , τ は 0 である。このことを考慮して $R=a$ における伸びひずみの y 方向の成分 e_{y22} を求めると次のようになる。

$$e_{y22} = \frac{1}{E} \left[\{ \sigma + \sigma_{r0} - 4(\sigma - \sigma_{r0}) \cos 2\theta_1 \} \cos^2 \theta_1 - \nu \{ \sigma + \sigma_{r0} - 4(\sigma - \sigma_{r0}) \cos 2\theta_1 \} \sin^2 \theta_1 \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

これを $-\theta_1$ から θ_1 まで積分して、積分常数を省略し、その平均を求めると、観測している A, B 間の平均ひずみ ε_2 は

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{2a \sin \theta_1} \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} e_{y22} a \cos \theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{1}{E \sin \theta} \left[\sigma_{r0} \left\{ \frac{7}{12} \sin 3\theta_1 + \frac{11}{4} \sin \theta_1 + \frac{1}{10} \sin 5\theta_1 - \frac{\nu}{15} \sin^3 \theta_1 \right\} + \sigma \left\{ -\frac{5}{12} \sin 3\theta_1 - \frac{5}{4} \sin \theta_1 - \frac{1}{10} \sin 5\theta_1 - \frac{3\nu}{5} \sin^3 \theta_1 \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

いま、天井の最高点から床まで、A'B' を観測しているときは積分区間は $-\pi/2$ から $\pi/2$ までで、その平均ひずみ ε_2 は

$$(\varepsilon_2)_{\theta_1=\pi/2} = \frac{1}{E} \{ (2.26 - 0.06\nu) \sigma_{r0} - (0.93 + 0.60\nu) \sigma \}.$$

これは $\nu=1/4$ ならば

$$(\varepsilon_2)_{\theta_1=\pi/2, \nu=1/4} = (2.25\sigma_{r0} - 0.783\sigma)/E.$$

同様に、 $\theta_1=\pi/3$ のときは

$$(\varepsilon_2)_{\theta_1=\pi/3} = \frac{1}{E} \{ (2.65 - 0.045\nu) \sigma_{r0} - (1.15 + 0.450\nu) \sigma \}.$$

$\nu=1/4$ のときは

$$(\varepsilon_2)_{\theta_1=\pi/3, \nu=1/4} = (2.6387\sigma_{r0} - 1.2625\sigma)/E,$$

と求められる。

同様に、

$$(\varepsilon_2)_{\theta_1=\pi/4} = \frac{1}{E} \{ (3.23 - 0.03\nu) \sigma_{r0} - (1.56 + 0.30\nu) \sigma \},$$

$$(\varepsilon_2)_{\theta_1=\pi/4, \nu=1/4} = (3.225\sigma_{r0} - 1.642\sigma)/E,$$

と求められる。

このように、井戸の中では伸びひずみは少し小さく、また、トンネルの垂直の弦の変化を観測すると、短い弦ほど大きいひずみとして観測される。

実際問題としては、トンネルの床面はある程度迄平面になっているのでこのような拡大、縮小の影響はこれより少し小さいであろう。

3. 観 測

この観測は旧東海道線坂逢山トンネル（東経 $135^{\circ}59'$ ，北緯 $34^{\circ}54'$ ）の中で1952年から始めた。観測点は地表面から60～80mの所にある。

観測のために試作した伸縮計⁶⁾は， V_1 型は定尺はインヴァール線で弛み針金と2本吊りを拡大装置として使ったものである。 V_3 型はV-5 9-B型と呼んでおり，定尺はインヴァールの棒で拡大装置として水平振子を使った。また， V_5 型は定尺としてインヴァール製のパイプを使い，拡大装置としては水平振子を使っている。 V_1 型はトンネルの壁の肩の所から床面迄を観測している。 V_3 型はトンネルの天井の最高部から床面まで， V_5 は床面から下方に直径約10cm，深さ6mの井戸を掘り，井戸の底と床面との間の相対変位を観測しているものである。いずれの器械も印画紙に記録している。

これらの装置で観測した記録を解析した数値を **Table 1** に示す。

解析方法は1時間ごとの読取り値から25時間の長さの移動平均値を求めて，これを読取り値から引き去って約1日，約1/2日などの短周期の変化を抽出した。この短周期の変化に対して，ダーウィン法⁶⁾によって分潮の解析を行って求めた。

Table 1 Observed Tidal Constants of Vertical Extensions.

Symbol of Instrument	Length of Base Line	Epoch of Analysis	Period of Analysis	Sensitivity	M ₂ -tide		O ₁ -tide	
					Amplitude	Phase	Amplitude	Phase
V_1	4.0m	'52: 12: 25	1 month	$2.24 \times 10^{-8}/\text{mm}$	0.44×10^{-8}	215°		
"	"	'53: 3: 12	1 "	2.22 "	0.63 "	201		
"	"	'54: 3: 12	1 "	2.22 "	0.64 "	193	0.61×10^{-8}	232
"	"	'54: 10: 7	1 "	1.85 "	0.74 "	174		
"	"	'54: 11: 5	1 "	1.85 "	0.84 "	192		
V_3	4.5	'60: 1: 1	3 "	0.490 "	2.815 "	229.11	240 "	240.0
V_5	6.0	'64: 8: 12	1 "	0.562 "	0.510 "	198.30	757 "	202.6
"	"	'64: 9: 16	1 "	0.562 "	0.525 "	198.40	582 "	219.2

この解析結果では V_3 の M_2 の成分が異常に大きい値を示している。このことは基礎理論の所で述べたことを定性的に裏書きしている。

4. 解析法に対する考察

近年このような時系列に対してフーリエ解析が頻繁に使われている。ここで特異の変化をしている V_3 に対してフーリエ解析がどんな応答を示すかを試算した。まず，25時間の移動平均を除いた結果に対してフーリエ解析を行なった。まず，1日を 360° としたとき，1時間の角速度が 28.2° から 30.2° までの間の周期を 0.02° のステップに分割して，それぞれの周期の振幅を求めて，**Fig. 4, a** に示した。この区間には K_2 ， S_2 ， M_2 ， N_2 などの成分が含まれている。同様なことを角速度 13.24° から 15.24° の区間について求めて **Fig. 4, b** に示した。この図では K_1 ， P_1 ， M_1 ， O_1 などの振幅が大きくあらわれている。これらの分潮間の振幅の比は $(S_2+K_2)/M_2=0.87$ ， $(K_1+P_1)/M_2=0.46$ ， $O_1/M_2=0.37$ となっており，理論値の $S_2/M_2=0.47$ (max $(S_2+K_2)/M_2=0.59$)， $O_1/M_2=0.42$ ， $K_1/M_2=0.59$ (max $(K_1+P_1)/M_2=0.78$) と比較すると $(S_2+K_2)/M_2$ が非常に大きい。このときの解析区間の長さは2160時間であった。

解析区間の長さがその成分の振幅と位相を変えることは次のことから分かる。

いま，解析しようとする時系列が

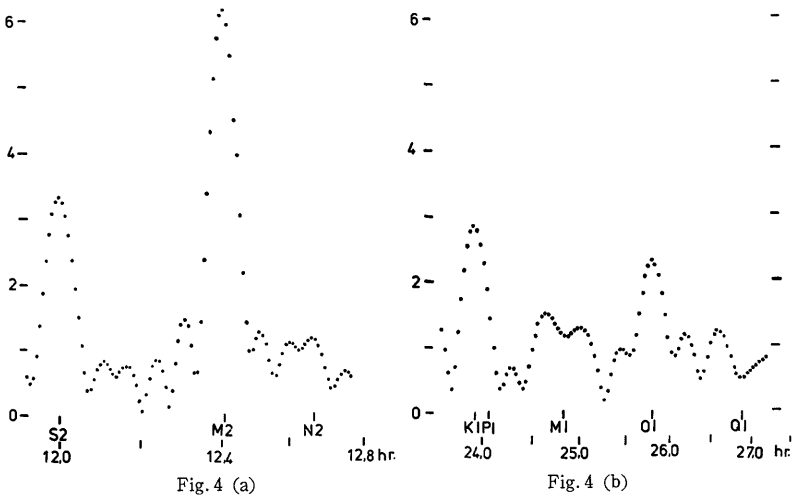


Fig. 4, a, b Relations between amplitudes and their periods on the observation of the vertical extension V3.

$$A_1 \cos m_1 t + A_2 \cos m_2 t + \dots + B_1 \sin m_1 t + B_2 \sin m_2 t + \dots \quad (9)$$

であるとする。系列が非常に長いときは、 $m_1, m_2, \dots$ は整数で近似することができる。式(9)で $m_1, m_2, \dots$ は整数であるとする。いま、この系列の角速度 n の周期のフーリエ級数の係数 a_n, b_n を求めると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2A_1}{\pi} \int_0^\pi \cos m_1 t \cdot \cos n t dt + \frac{2A_2}{\pi} \int_0^\pi \cos m_2 t \cdot \cos n t dt + \dots \\ &+ \frac{2B_1}{\pi} \int_0^\pi \sin m_1 t \cdot \cos n t dt + \frac{2B_2}{\pi} \int_0^\pi \sin m_2 t \cdot \cos n t dt + \dots, \\ b_n &= \frac{2A_1}{\pi} \int_0^\pi \cos m_1 t \cdot \sin n t dt + \frac{2A_2}{\pi} \int_0^\pi \cos m_2 t \cdot \sin n t dt + \dots \\ &+ \frac{2B_1}{\pi} \int_0^\pi \sin m_1 t \cdot \sin n t dt + \frac{2B_2}{\pi} \int_0^\pi \sin m_2 t \cdot \sin n t dt + \dots, \quad (10) \end{aligned}$$

である。

式(10)から、 a_n の第1行目の項の定積分は $m_i = n$; ($i=1, 2, \dots$) のとき $\pi/2$ となりその項の値は A_i となる。第2行目の定積分は理想的にはどれも0となることが期待されている。これが0に等しくなるのは $m_i + n$ が ∞ であるか偶数に等しい場合で、奇数のときは定積分は $2m_i / (m_i - n)^2$ に等しい。 $m_i - n$ が小さいときは定積分は大きい値となって、 a_n は期待の値から大きく外れてくる。

同様に b_n の場合は a_n の場合と1行目と2行目とが入れ代りの関係になる。このように近似度の高いフーリエ係数を得るためには時系列を非常に長くするか、系列の長さを適当な長さにして $m_i + n$ が偶数になるようにする必要がある。ダーウィン法ではこのような考えが取り入れられている。

実際に V_3 の場合に区間の長さを2時間ずつ変えて、フーリエ係数を求める方法で主要な分潮の振幅と位相がどのように変るかを計算して見た。この関係を M_2, S_2, O_1, K_1, N_2 について試してみた。これらを Fig. 5 (a, b, c, d, e) に示した。解析区間の長さを約1850時間から2160時間まで変えたとき、 M_2 は振幅は6.5%、位相は約3°の変化をした。 S_2 に対しては振幅は約10%、位相は約7°、 O_1 では振幅は4%、位相は4°、 K_1 では振幅は10%、位相は約6°であった。 N_2 においては振幅は55%、位相は46°の変化を示した。

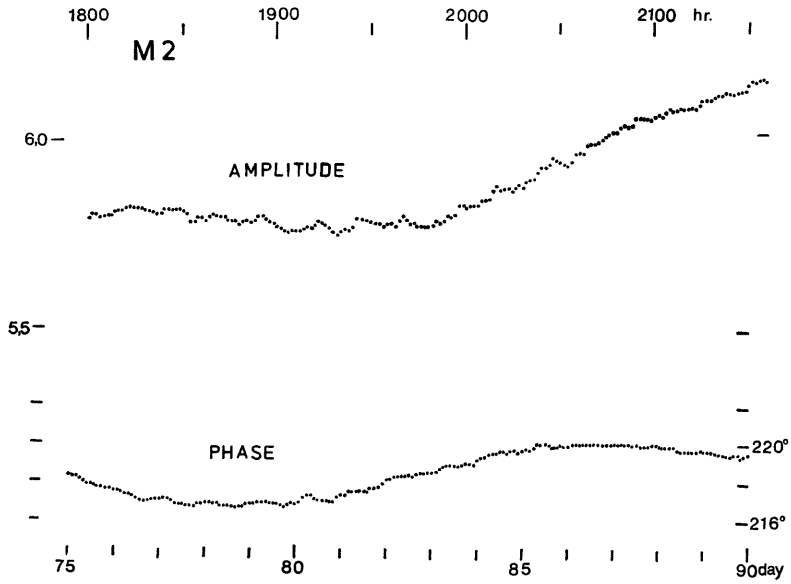


Fig. 5 (a)

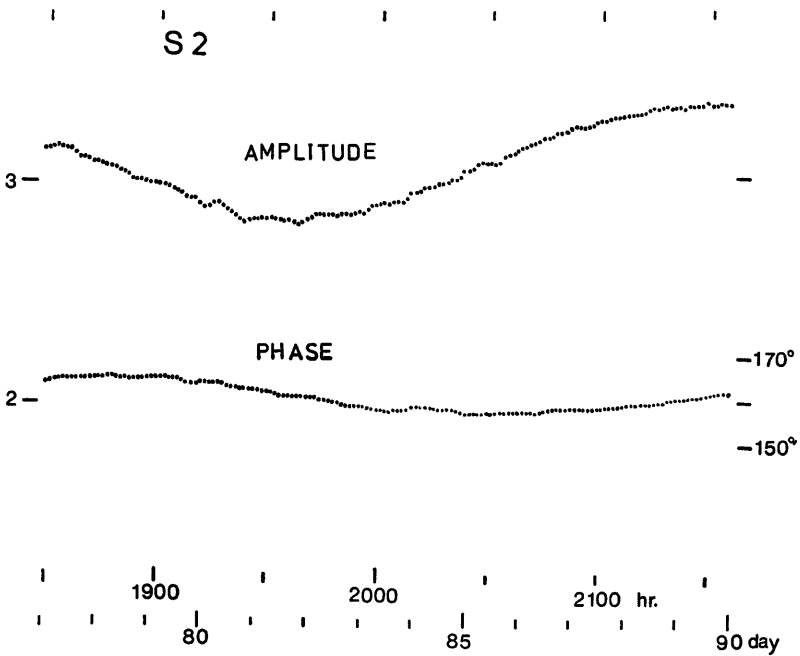


Fig. 5 (b)

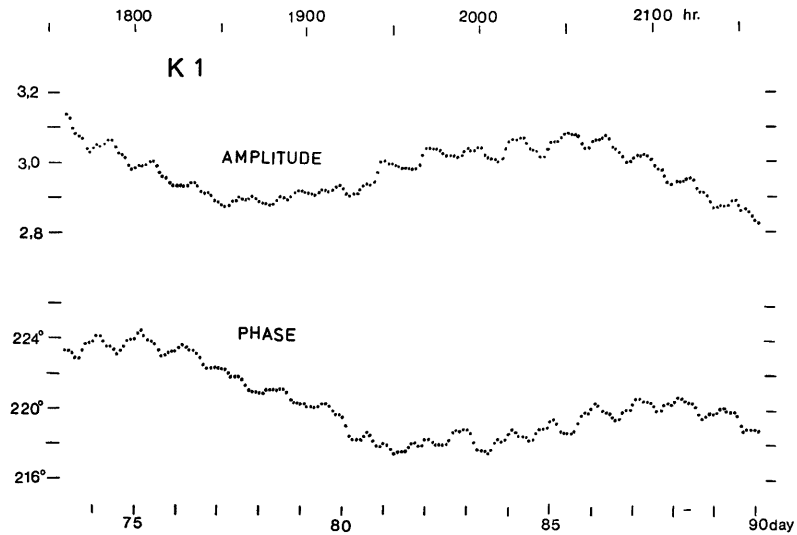


Fig. 5 (c)

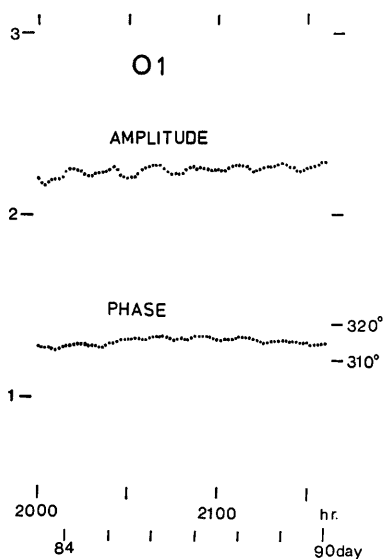


Fig. 5 (d)

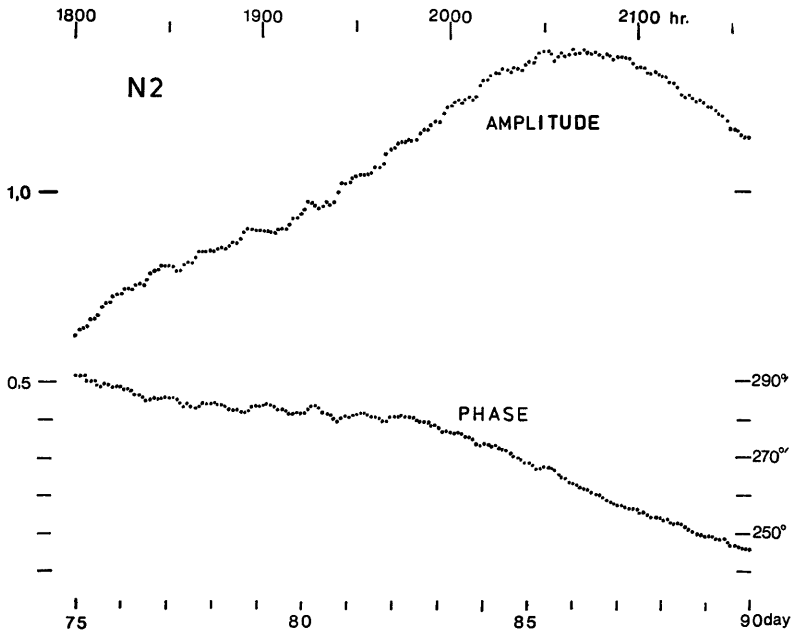


Fig. 5 (e)

Fig. 5 Relations between amplitudes and phases, and their numbers of the days of the analysed periods. a: M2, b: S2, c: K1, d: O1 and e: N2 tides.

このように、大振幅の分潮は80日以上を観測があれば10%以内の誤差に抑えられるけれども N_2 のように周期が他の分潮からかけ離れていても振幅が小さい分潮は潮汐以外のノイズに干渉されるらしく有意な値は求められないことが分かる。

以上、地球潮汐の垂直ひずみの観測を坑内で3種類の条件で行い、坑道であるための影響について研究した。その結果はその様相を変えるような大きな影響のあることが分った。

また、フーリエ解析による方法では解析期間の長さを充分考慮しなければならないことを知った。

以上のように、垂直ひずみの観測は難しい問題を含んでいる、しかし、この成分は地球潮汐ひずみの研究では不可欠な重要な成分であるので、今後さらに詳細な研究を続けたい。

終りに、観測計器の製作に御助力を頂いた藤井伸蔵技官に厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 例えば、竹内均：地球科学における諸問題、裳華房、昭47, pp. 118-201.
- 2) 例えば、平修二、現代弾性力学、オーム社、昭49, pp. 67-97. 参照.
- 3) 平松良雄、岡行俊：種々の断面形をもつ坑道の壁面上の応行について、木曜会誌、第14巻、第8号、1962, pp. 383-386.
- 4) TAKEMOTO, S: Effect of Meteorological and Hydrological Changes on Ground-Strain Measure-

- ments. Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Vol. 33, Part 1, No. 296, 1983, pp. 15-46.
- 5) Ozawa, I.: On the Observations of the Tidal Strains at Osakayama Observatory, Special Contributions of the Geophysical Institute, Kyoto University, No. 6, 1966, pp. 233-246.
 - 6) 例えば, 中野猿人: 潮汐学, 古今書院, 1940, pp. 1-263.