

Van der Pol 振動子の強制振動 — 数値解析による新しい知見

明治鍼灸大・物理 森 本 安 夫

(1986年7月7日受理)

要 旨

van der Pol 振動子の強制振動を数値的に解析すると、理論的に予言されていない種々の現象が見出された。これは理論では無視せざるを得ない種々のモードを数値解では自動的に取り込んでしまう為であろう。とりわけ興味深いのは、準安定な振動モードの存在と、系が外力により転移する際発生する臨界的な緩和現象である。準安定なモードとは、本来は不安定な領域であるにも拘らず、有限の時間安定に存在することを指す。

これは定常解の存在を仮定する解析からは導出不可能であり、数値解による新しい発見と言える。

§ 1. 序 論

非線型振動子の強制振動は非線型振動論の格好のテーマであり、従来から精力的な研究の行なわれている分野であり、教科書も数多く出版されている¹⁾。特に3極管発振器を説明する van der Pol 方程式の研究は、その精密さにおいて目を見張るものがある。日本では一昔前、電子通信学会の非線型問題研究会で大量の研究がなされている²⁾。

一般にこのような系の解析は、適当な定常振動解を仮定して行なわれる。例えば、自励振動(以後 SO)，調和振動(HO)，概周期振動(QP)あるいは基本調波振動(FO)等である。

これを原方程式に代入し、振巾と外力との関係が導かれる。次にその解の安定性が通常マシユ方程式の形で解析される。このような方法により系の相図が得られる。図1に強制 van der Pol 振動子の例を示す。外力を $E \cos \nu t$ とし、SOの角周波数は1である。詳細については適当な教科書³⁾を参照されたい。

さて問題はこれですべてがOKか?と言うことである。非線型振動は無限個のモードを含むのが常である。現実の計算でそれらをすべて考慮するのは勿論不可能で、適当な項以外は切り

森本安夫

捨てられる。普通の場合ならこれで充分だろう。相図の境界線から離れた所では特定の定常解が充分強いということである。然し境界近傍ではどうだろうか？そこでは両相のモードが均衡を保っている。

そんな所では今まで無視されていたモードがイタズラをするかもしれない。あたかも相転移現象において、臨界点近傍では揺ぎが支配的な役割を果たすが如く⁴⁾。これをみるには先程述べたような解析法は無意味である。

多少安易に過ぎるきらいはあるが、数値計算がベストであろう。そこではすべてのモードは自動的に取り込まれるからである。もっともその代償として物理的なイメージは掴み難くなる。これは得られた結果から推論してゆく他ない。これが“今更”と思われるような非線型振動系の数値解析を始めた理由である。幸か不幸か理論的解析が余りにも見事である為、そのような仕事は見向きもされていないようである。それはさておき、こんな仕事は頭を使う必要はない。とにかくヤミクモにやってみて以下に示すような結果が得られたと言うのがこの小論の主旨である。対象は先程から名前が出ている van der Pol 振動子を選んだ。理論的な考察は全くなされていない、と言うよりもできなかった。そのことに関するコメント、議論を頂ければ幸いと思っている。心配なのは、このような純粋な非線型微分方程式の数値解析が物理屋に興味を持ってもらえるかどうかと言う点であるが、それは内容を見て判断してもらう他あるまい。比較的興味をもってもらえそうなのは準安定な振動モードの存在と、種々の転移に伴う緩和時間の減速の現象と思う。

構式は次の通りである。次節においては数値計算の概要と解析的方法で得られた結果を簡単に説明する。3節においては外力の角周波数を固定して、振巾を増加させた時、どんな振動がみられるかを概観する。4、5節では上に述べた準安定なモードの挙動と、振動の振巾の極値に発生する奇妙な振動モードについて詳述する。最後の節において、まとめと種々の転移と現実の物理系との対応を簡単に述べる。

§ 2. 数値解析と理論的諸結果の概要

ここで取り扱うのは強制外力と乱雑外力の加わっている van der Pol 方程式である。但し後者は後で雑音の効果を調べる時以外考えない。

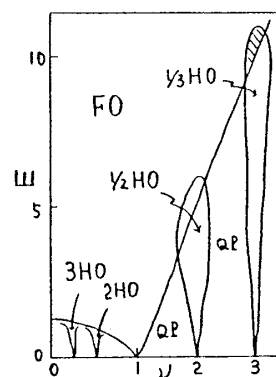


図 1. van der Pol 振動子の強制振動の相図。斜線部分には $1/3$ HO 又は FO が存在する。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = E \cos \nu t + B f(t). \quad (1)$$

μ , ω_0 は SO の利得及び角周波数で、共に 1 とする。 E , ν は外力の振巾及び角周波数である。右辺の最後の項は雑音で、 $|f(t)| \leq 1$ となるランダム変数、 B はその強度である。数値計算は 2 次のルンゲ・クッタ法によった。この系は自励系なので、初期条件には依存しない。従って初期条件は同じにした。非線型振動の波形は複雑で一見ただけでは特徴が掴めない。そこで相空間での軌道と、波形のローレンツプロットをみることにした。前者は $(x, \dot{x})$ 面内での解軌道でなじみの深いものだが、後者はそれ程ポピュラーではないので簡単に説明する。振動波形が図 2 のようであったとする。振巾が極値をとる時、その値を x_n , $n = 1, 2, \dots$ とする。これらを (x_n, x_{n+1}) 面上に再帰的にプロットしてやるとローレンツプロットになる。これ以外にも振巾が極値をとる時刻（あるいはその間隔）をとることもあるが、ここではそれは用いない。

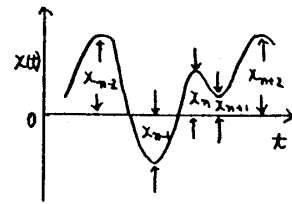


図 2. ローレンツプロットの説明。

結果を述べる前に簡単に解析的方法で得られた結果を述べる。詳細は適当な教科書を参照されたい³⁾。 E が強く FO 領域にある場合は (1) の解を $x(t) = a \cos \nu t + b \sin \nu t$ とおく。これを (1) へ代入し、 $\sin \nu t$, $\cos \nu t$ の各項を等置すると次の関係が得られる。

$$\left\{ \left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 - \nu^2}{\mu \nu}\right)^2 \right\} r^2 = \left(\frac{E}{\mu \nu}\right)^2, \quad (2)$$

但し $r^2 = a^2 + b^2$ 。(2) は FO の振巾と E , ν の関係を与える。この解の安定性は $x(t) = a \cos \nu t + b \sin \nu t + \xi(t)$ と置き、 $\xi(t)$ について線型な式を導く。これはマシュー方程式となり、その安定性は $r \geq \sqrt{2}$ により保証される。

よって FO が安定な E の臨界値 (E_3 と名付ける) は (2) で $r = \sqrt{2}$ とおいて、

$$E_3 = \sqrt{2} \mu \nu [1/4 + \{(1 - \nu^2)/\mu \nu\}^2]^{1/2} \quad (3)$$

と求められる。 $E \geq E_3$ は FO 領域となる。

$\mu = 1$, $\nu = 2.5$ では $E_3 \simeq 7.632$ となる。 $\nu \neq 2, 3, \dots, 1/2, 1/3, \dots$ なら PQ が発生する。この時は $x(t) = a \cos \nu t + b \sin \nu t + r_f \cos t$ (強制項 + 自励項) とおき、先と同様な計算により、

$$\left[\left(2 - \frac{3}{4} R^2 \right)^2 + \left(\frac{1 - \nu^2}{\mu \nu} \right)^2 \right] (4 - R^2) = \left(\frac{E}{\mu \nu} \right)^2 \quad (4)$$

ここで、 $R^2 = r^2 + r_f^2$, $r^2 = a^2 - b^2$ 且つ $2r^2 + r_f^2 = 4$ なる関係あり。QP → FO となる所では $r_f \simeq 0$, $r \simeq \sqrt{2}$ となるので、(4) は (3) の E_3 を与える。

$\nu = n$ ($n \simeq 2, 3, \dots, 1/2, 1/3 \dots$) では HO が生じる。この時系は損失の少ない共振器として作用するので、解を

$$x(t) = a_n \cos n\nu t + b_n \sin n\nu t + \{E/(1 - \nu^2)\} \cos \nu t$$

ととってやる。(1) では非線型を対称にとっているので、2HO, 1/2 HO は発生しない。

先程と同様な計算により、

$$r_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 4 - \frac{3}{2} B^2 + \sqrt{4B^4 - \frac{7}{4} B^2 - 16 \left(\frac{1 - n^2 \mu^2}{n \mu \nu} \right)^2}, \quad (5)$$

が得られる。但し $B = E/(\nu^2 - 1)$ 。 r^2 は実かつ正でなければならない。ここで調べる $\mu = 1$, $\nu = 3$, $n = 1/3$ (1/3 HO) ではその条件は、 $B^2 \leq 16/7$ となる。即ち $E > E_c$ で 1/3 HO が発生し、

$$E_c = \sqrt{16/7} (\nu^2 - 1) \simeq 12.10 (\nu = 3). \quad (6)$$

と求められる。

§ 3. 振動モードの E による変化

理論では $E < E_3$, E_c では単に QP, HO が発生するのみであるが、実際に軌道を書かせてみるとそんなに単純ではない。数値計算は ν を固定して E を変え振動モードの変化をみた。 ν の値により QP → FO となる場合と HO → FO になる場合がある。 $\nu = 1.5$ では前者のようになる。これについては既に著者による報告がある⁵⁾。ここでは $\nu = 2.5$ の場合を取り上げる。後者の例としては $\nu = 3$, 即ち 1/3 HO → FO となる場合を検討する。

非線型振動の特徴として、このようなわずかなパラメータの変化でも系の挙動は大きく変化する。以下に各場合について述べることにする。

3-1 $\nu = 2.5$ の場合

図 3 に E による軌道の変化を示す。 E が小さいと (a) の如く SO の軌道 ($E = 0$) が外力によって変調されたものがみえる。 E が臨界値 $E_1 (= 1.702)$ を越えると (b) のように外周は S

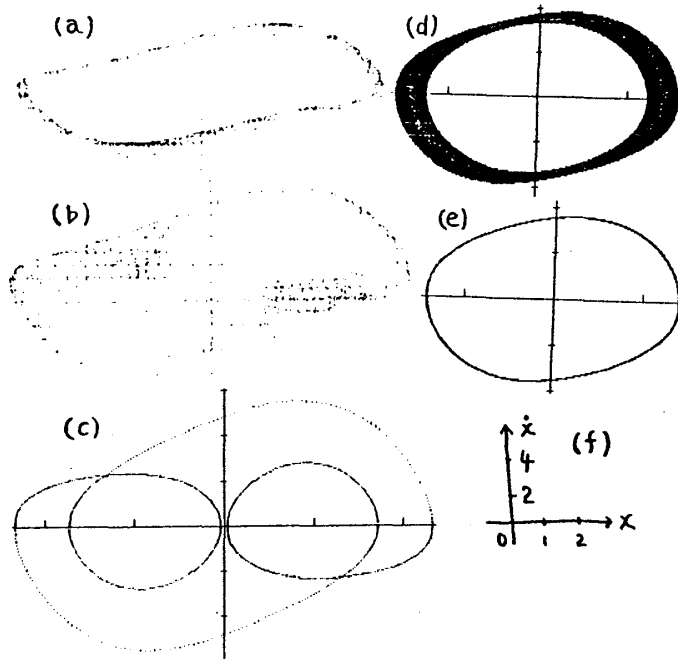


図3. $\nu = 2.5$ の時の時空間内での軌道。

(a): $E = 0.5$, (b): $E = 2.6$, (c): $E = 7.5$,

(d): $E = 7.64$, (e): $E = 7.68$ 。

Oの軌道に似ているが、その内部が埋め尽される。更に $E_2 (= 3.261)$ を過ぎると、(c)の如くきれいな閉曲線の軌道へと変化する。 $E_2^1 (= 7.047)$ でこれは不安定となり、再び(d)のような軌道となる。然しその周はSOのものではなく、楕円に近づく。そして $E_3 (= 7.660)$ を越すと、(f)のようにFOの軌道となる。 $E_2^1 \sim E_3$ ではFOがSOによって変調を受けているとみなせる。次にこれらの軌道のローレンツプロットを図4に示す。図3との対応は、

(a) $\rightarrow$ (a), (b) $\rightarrow$ (b), (d) $\rightarrow$ (c), (e) $\rightarrow$ (d) 及び, (f) $\rightarrow$ (e)

である。図3(c)に対応するものは除いてある。図中に示した W をもって主な振動モードが残りのモードによって変調される度合とみなすことにしよう。 W を E に対してプロットしたのが図5である。従来の解析では $E < E_3$ ではPQが一般に発生するとされているが、このような結果を見る限り、そう簡単に言い切れそうもない。図から解るように5個の臨界値があり、それにより6個の振動状態に区分される。

$E < E_1$ ではSOが外力により変調を受けているというモデルを用いて、

$$W \simeq E / \sqrt{2} (\nu - 1)$$

なる結果が得られている⁵⁾。特徴は $W \propto E$ である。このモデルは $W \simeq 2$ (= SOの振巾) で成立しなくなるので $E_1 \sim 2$ 又は $E_1 \sim 2\sqrt{2}(\nu - 1)$ で与えられ、これらはデータと一致する。

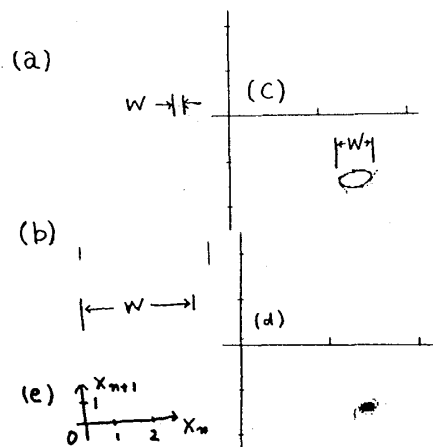


図4. $\nu = 2.5$ でのローレンツプロット。

(a): $E = 0.5$, (b): $E = 2.6$,
(c): $E = 7.64$, (d): $E = 7.68$.

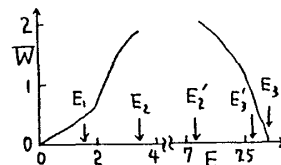


図5. W の E 依存性。 E_2 と E_2' の間では W は定義されない。

$E > E_1$ では W は E に対してスーパーリニアに増加する。 E_2 , E_2' での転移については先程述べた通りである。 E_2' を過ぎると逆に W は減少し E_3 で 0 となる。 (3) で与えられる E_3 と実験的に求められた値には約 1.4 % の誤差がある。この差は通減摂動法で近似を高めれば解消できる(らしい)。 $E > E_3$ では FO のみが安定に存在する。 $E_3^1 (= 7.601)$ では軌道には大きな変化はみられないが、 § 5 で述べるような奇妙な“柔かい”転移現象を示す。 $E > E_3$ では FO への軌道の収束に関して減速現象がみられる。収束の様子を図 6 に、収束までの時間 T_4 を図 7 に示す。 $T_4 \propto (E - E_3)^{-1.0}$ である。 $\nu \leq 2$ ではこの臨界指数は -0.75 であり、⁵⁾ ν 依存性ある。この件については現在データをとっている最中である。力学系における転移点で、軌道の収束に関して減速がみられるのは普通のことらしく、例は他にもある⁶⁾。然しこれらを理論的に導くことは難しそうである。

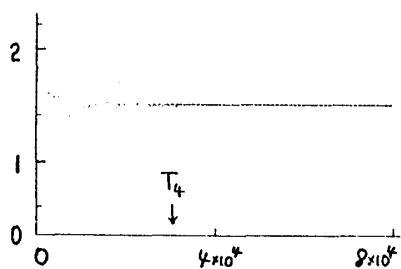


図6. $\nu = 2.5$, $E = 7.75$ での FO の軌道の収束, $x(t)$ に軌道が正の x 軸を切る点。

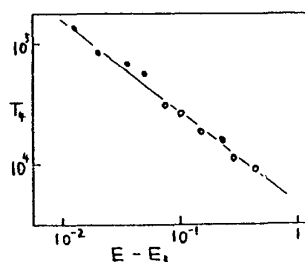


図7. T_4 の $E - E_3$ 依存性。

3-2 $\nu = 3$ の場合

ここでは、軌道の変化は先程のように複雑ではない。 $E < E_2$ の軌道は図 3 (a), (b) と同じである。但し E_1 は $2\sqrt{2}(\nu-1)$ は 2 を越えるので、 $E_1 = 2$ に抑えられる。 $E_2 (\approx 3.90)$ 以上では軌道は図 8 に示すようになる。 $E_2 < E < E_c$ では 8 (a) のように 1/3HO が発生する。 E_c は (b) で理論的に 12.10 と求められたが、実験的には 12.326 であった。誤差は 1.9 % である。以後は $E_c = 12.326$ とする。

図 1 の $\nu \approx 3$ 近傍の斜線部分は 1/3HO, FO 各れも存在可能であるが、どちらが表われるかは初期値で決る。ここでは 1/3HO が存在するような条件を選んだ。従って 1/3HO が FO へ転移するのは、 E_3 ではなく E_c で起こる。

$E > E_c$ での FO の軌道は図 8 (b) に示す。

$\nu = 2.5$ の場合とは異なって E_2 以上の領域で 1/3HO 自体のなかでモードが変り合うようなことはない。従って、興味ある転移現象がみられるのは E_c 近傍だけである。

§ 4. 準安定な振動モードとその挙動

いよいよ本命の準安定な振動モードの話に移る。この件に関する理論的な予測は全くなく、どう説明すればよいのか皆目見当がつかない。ヤミクモに数値計算を行なうと妙な現象が見出された。理論屋諸君に御教示願えるか、あるいは解明の為の努力をひき起こすことができれば著者の望外の喜びである。 $\nu = 2.5$ と 3 では多少の差異がある。ここでも別々に述べることにする。

4-1 $\nu = 2.5$ の場合 (QP 内での不安定化)

§ 3-1 で述べた如く、 E_2 で発生した閉曲線型の軌道は、 E_2^1 で不安定化し相空間内の一部を埋め尽すようなものに変化する (図 3 (c) → (d))。この変化は E_2^1 ではっきりと分けられるが $E \geq E_2^1$ では、本来不安定な軌道が一時的に、安定に存在するようにみえる。それを見るため、軌道が正の x 軸を切る点、即ち $\dot{x}(t) = 0$ 且つ $x(t) > 0$ なる点、の時間変化を追ってみよう。それが図 9 である。 $E < E_2^1$ では (a) の如く、図 3 (c) の軌道が安定なことが解る。

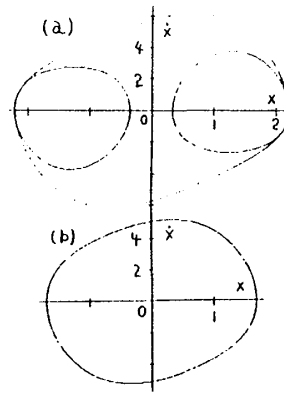


図 8. $\nu = 3$ の時の軌道。 E_2 以下は図 3 とほぼ同じなので省略。

(a): $E = 11.0$, (b): $E = 13.7$ 。

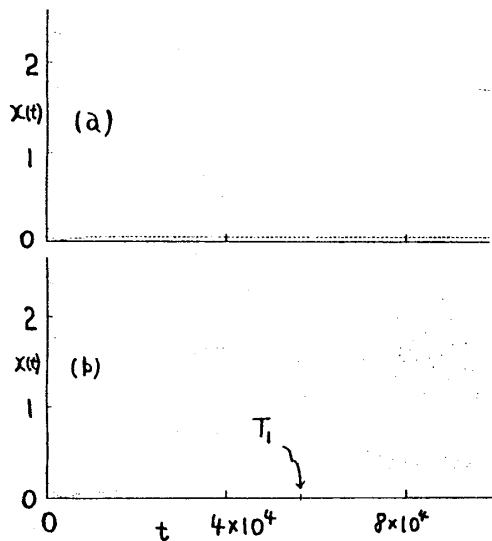


図 9. $\nu = 2.5$ の時、軌道が正の x 軸を切る点 $x(t)$ の時間変化。
(a): $E = 7.04$, (b): $E = 7.049$.
 E がこれより大きくなると、図 14 のようになる。

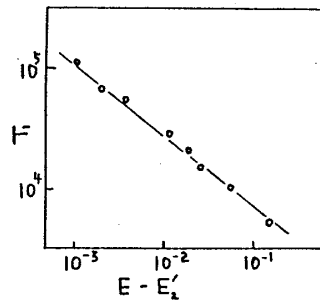


図 10. T_1 の $E - E_2^1$ 依存性。

然るに、 $E \geq E_2^1$ では本来不安定な図 3 (c) の軌道が、有限な時間、 T_1 だけ安定に存在しているのが解る。その後安定な図 3 (d) の軌道へと移行する。あたかも準安定な過冷却液体が何等かの外乱により、安定な固体に転移するのに似ている。これが有限な時間だけ存在する図 3 (c) の軌道の表わす振動を準安定なモードと呼ぶ理由である。 E が E_2^1 より充分大きくなるともはやこのようなモードは発生しない。 T_1 は図 10 に示す如く、

$$T_1 \propto (E - E_2^1)^{-0.58}$$

と表わされる。 E_2^1 で T_1 が発散するのは、そこで図 3 (c) の軌道が安定なので当然だろう。

又、 E_2^1 から離れるにつれて T_1 が短くなるのは、その軌道の不安定度が増す為と考ええると納得できる。問題は何が準安定なモードの安定性を破るのかと言うことと、 T_1 の臨界指数である。後者については全く歯が立たない。前者については数値計算上の誤差の累積によるのではないと思われる。これについては、§ 4-3 で述べる。

4-2 $\nu = 3$ の場合 (1/3 HO-FO の転移に伴うもの)

1/3 HO は E_c で FO に転移するが、その際前節で述べたのと類似した準安定なモードが発生する。§ 4-1 と同じく軌道が正の x 軸を切る点の時間変化をみたのが図 11 である。

$E < E_c$ では $1/3$ HO が安定で、 x 軸を切る 2 ケの点が表われるがこれは省いてある。 $E \geq E_c$ では図 11(a) のように有限の時間、 t_c の間 $1/3$ HO のモードが安定で、その後 FO の軌道へと転移する。 E が E_c より充分大きくなると (b) のように $1/3$ HO が存在すると言うよりは、最初から FO の軌道へと収束しているような感じを与える。 t_c も T_1 と同様に臨界指数で表現される。即ち、

$$t_c \propto (E - E_c)^{-0.5} \quad (\text{図 12}).$$

この場合 $\nu = 2.5$ の場合と異なるのは、その場合には同じ QP のモード内での転移があるの

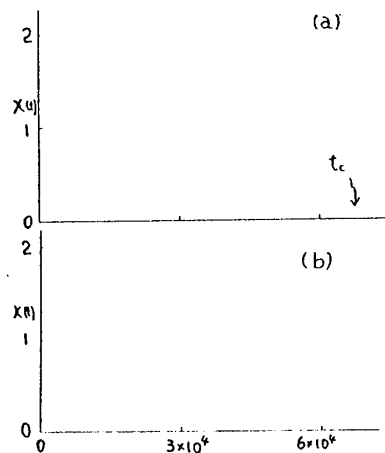


図 11. $\nu = 3$ の時、軌道が正の x 軸を切る点 $x(t)$ の時間変化。

(a): $E = 12.33$, (b): $E = 12.35$.

$E < 12.326$ では $t < t_c$ の状態が安定。

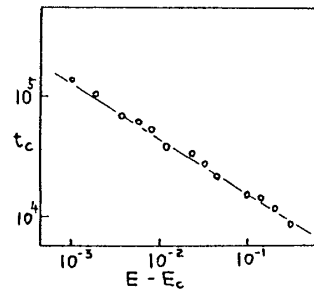


図 12. t_c の $E - E_c$ 依存性。

に対して、 $\nu = 3$ では $1/3$ HO なるモードから他のモードである FO へ転移する際に発生することである。その他の挙動に関しては変るところはない。

4-3 準安定モードへの雑音の効果

§ 4-1 に述べた提案—準安定モードが破れるのは数値計算上の誤差の累積によるものではないか?—を確かめるには系に乱雑外力 (雑音) を加え、その応答をみるのが適当だろう。そこで (1) で $B \approx 0$ として影響を調べてみた。

その結果軌道そのものにはほとんどみられず、準安定モードの存在時間、 T_1 , t_c が短くなるのが解った。データを図 13 に示す。

$\nu = 2.5$ でも 3 でも傾向はほぼ同じである。

即ち、 E を固定するとある特定の B の値、 B_0 があり、 $B < B_0$ では $B = 0$ 、即ち雑音のない時と T_1 、 t_c の値は変らない。 $B > B_0$ になると共に B^{-1} に比例して減少する。この領域では T_1 、 t_c は E の値にかかわらず同じカーブ上に来る。これらのデータは先程の推測（又は提案）を一部は証明しているが、一致しない面もある。 B が増加すると T_1 、 t_c が減少するのは上記の推測を証明している。問題は B_0 である

が、 E が E_c や E_2^1 から離れるに従がい不安定性は増すはずだから、より弱い雑音に対して系は敏感になるはずである。従って B_0 は E と共に減少すると考えられるが、図13は逆であることを示している。一つの説明として次のような言い方は可能である。

即ち、準安定モードを発生している領域では系は不安定で、内在的に揺ぎが発生している。 E が E_2^1 や E_c から離れるに従がって、それは大きくなるだろう。系は内在的な揺ぎ以上の雑音には大きな影響は受けない。その内存的な揺ぎに相当する量が B_0 程度であると考えられる。そうすると B_0 が E と共に増大するのは納得できる。これを確めるには軌道そのものの揺ぎを調べる必要があるが、現在そこまでは手が回っていない。推測につぐ推測と言う状況である。

§ 5. 附随的な振動モード ($\nu = 2.5$)

図4の(c), (d)をみれば解るように、 $E > E_2^1$ では、ローレンツプロットが円形に収束するのに5個の方向から向っている。この傾向は $E \geq 7.1$ あたりから顕著になる。このことが軌道にどのような影響をもっているのだろうか？ それを見る為、先程から何度もやっている、軌道が正の x 軸を切る点の時間変化をみてみよう。それが図14である。明らかほ5本の振動状態のモードがみえている。実際の振動波形で言えば、振巾の最大となる所が5重の振動で変化している訳で、一見すると非常に複雑な振動にみえるだろう。問題はこの振動の周期であるが、これが E_3^1 で減速を起こす。このモードは、 $E < E_3^1$ でも $E > E_3^1$ でも存在するので、前者での周期を T_2 、後者でのそれを T_3 とするとそれらは図15の如く、共に E_3^1 で発散する。但しその臨界指数は異なり、

$$T_2 \propto (E_3^1 - E)^{-1.40}, \quad T_3 \propto (E - E_3^1)^{-0.40}$$

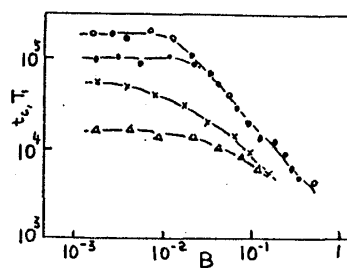


図13. T_1 (—○—: $E = 12.327$, —●—: $E = 12.328$) 及び、 t_c (—×—: $E = 7.05$, —△—: $E = 7.07$) の B -依存性。

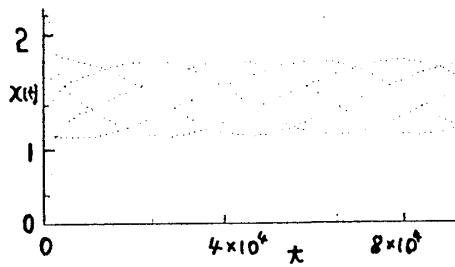


図14. $E_2^1 \sim E_3$ の間で現われる振巾の極限の時間変化。但し $x(t) > 0$ のみ。又 $\nu = 2.5$ 。

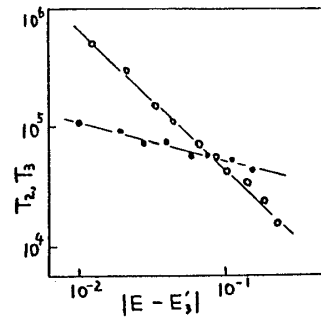


図15. 図14の振動モードの周期の $|E - E_3^1|$ 依存性。 $T_2 (E < E_3^1)$ に白丸で、 $T_3 (E > E_3^1)$ は黒丸で示す。

である。 E_3^1 では確かに周期が無限大となることが確認できる。ここでは、 $\nu = 2.5$ の場合についてのみ述べたが、 ν による変化は多彩である。例えば、 $\nu = 1.7$ では同じく5本、 $\nu = 2$ では2本、 $\nu = 2.2$ では7本 $\rightarrow$ 9本 $\rightarrow$ 11本 $\rightarrow$ 2本と言った変化がみられる。各々に興味ある数理的ないしは物理的意味を含んでいるようにも見えるが、未だ予備的なデータしか得ておらず、詳細については今後の発表にゆずる。 E_3^1 前後で大きな軌道の変化がある訳でもなく、この転移現象は準安定な振動モードのように、はっきりしたイメージは出しにくい。構造相転移におけるソフトフォノンモード等との類似が見出せれば面白いと思う。

§ 6. まとめといくつかの議論

以上で古典的な van der Pol 振動子の強制振動を数値的に見直した結果を述べた。いくつかの理論的に予言されていない現象を見出すことには成功したようであるが、それがどんな物理的意味を有するのか著者自身にも定かではない。理論の言うようには相図は簡単なものではないようである。ダuffin方程式の強制振動においてみられるようなカオス的現象⁷⁾の可能性もさぐってみたが、現在のところ発見していない。これはこの系が振巾に関して非常に強い負帰還を有する結果のようにも思える。

準安定モードの存在はこれまで、非線型振動系で示されたことがなく、物理的にも興味を持てるテーマではないだろうか。 $\nu = 2.5$ でも3の場合でも同じことであるが、 van der Waals の気体-液体転移の現象論と奇妙な程よい類似(対応)性を示す。例として $\nu = 3$ の場合をみ

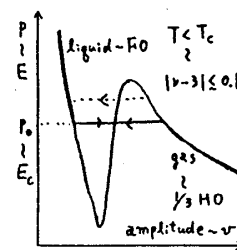


図16. van der Waals の気-液転移と van der Pol 振動子の転移の類似性の概念図。

てみよう。先ず次のような対応を考える。 $P \sim E$, $v \sim$ 振巾, $T \sim \nu$, 液体 $\sim$ FO, 気体 $\sim$ 1/3 HO である。良く知られているように van der Waals の状態方程式は, $T < T_c$ では図 16 のような $P-v$ 図を示し, $P > P_0$ では液体が, $P < P_0$ では気体が安定である。

P_0 で気体-液体の転移が起こる。 $P > P_0$ 又は, $P < P_0$ でも P のある範囲なら他の状態が準安定状態として存在し得る。これは小さい外乱に対し不安定で, すぐ安定な状態へ転移する (……)。これに先程の対応をつけてみると, P_0 は E_c に, 条件 $T < T_c$ は $|\nu - 3| \leq 0.1$ に対応していることが解る。 $|\nu - 3| \leq 0.1$ は図 1 から解るように, 1/3 HO の発生する条件に対応する。 E が E_c より離れるに従って準安定モードの不安定性が増す (t_c が短くなる) ことは P が P_0 から離れるに従って準安定状態の不安定性の増すことに対応する。勿論このような表面上の類似性が物理的に同じ原因を有することを示すものではないが, 結果の整理には役に立つ。

残された問題として $E > E_3$ での FO の軌道の収束時間の離界指数の ν 依存性の問題と, $E_2^1 \sim E_3$ の間にみられる振巾の極値の奇妙な振動モードの ν 依存性が挙げられる。

以上述べたことは物理的意味は明確ではないが, 現実の発振器をよく説明する系の挙動を解明することは重要な仕事であろうと思われる。なによりも理論的に現象を導くことが今後の課題である。

参考文献

- 1) C. Hayashi, *Nonlinear oscillations in physical systems* (McGraw-Hill, New York, 1964)., 志村正道, 非線型回路理論 (昭晃堂, 東京, 1964),
ボゴリューボフ, ミトロポリスキー (益子訳), 非線型振動論 (共立, 東京, 1956),
等 その他多数
- 2) 林千博等, 電子通信学会, 非線型問題研究会資料, 多数あり, 1950 ~
- 3) 1) 以外にコンパクトな解説書として,
石橋幸男, 非線型回路論 (共立, 東京, 1976) がすぐれている。
- 4) H. E. Stanley, *Introduction to phase transitions and critical phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1971).
- 5) Y. Morimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 1407.
- 6) Y. Morimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 2460.
- 7) S. Sato, M. Sano and Y. Sawada, Phys. Rev. A **28** (1983) 1654.