

一般化されたフィッシャーの情報量と漸近理論

釜江哲良 (大阪市大・理)

§1. フィッシャーの情報量の一般化

X : 距離空間

$C(X)$: X 上の実数値有界連続関数空間

$\mathcal{H}$: 実数空間上の 0 を含む線形空間

$(P_0; \theta \in \mathcal{H})$: X 上の確率ボレル測度族

$P \equiv P_0$

仮定 X 上の全有界な (signed) ボレル測度 Q が存在し

$$w\text{-}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_h - P}{h} = Q$$

(i.e. $\forall \varphi \in C(X)$ に対して $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int \varphi dP_h - \int \varphi dP}{h} = \int \varphi dQ$)
と定める。

$Q = Q^c + Q^s$ 且 $Q^s = Q^{s+} - Q^{s-}$ とする。但し, Q^c は P に因して絶対連続。 Q^s は P と互いに singular。また, Q^{s+} 及び Q^{s-} は互いに singular な非負測度。

$\|Q^{s\pm}\| \equiv Q^{s\pm}(X)$ (符号同順) と書く。 $\varphi \in C(X)$ 且 $\varphi \geq 0$

とすれば φ に対して, $J(\varphi) \equiv \frac{(\int \varphi dQ)^2}{\int \varphi dP}$ と定義する。

但し, $\int \varphi dP = 0$ のとき $J(\varphi) = 0$ とする。以上の非負連続関数の有限系 $\{\varphi_i; i=1, 2, \dots, n\}$ は $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 1$ を満たすとき φ の 有限連続分割 と呼ぶ。

$$I \equiv \sup_{\{\varphi_i\}: \text{有限連続分割}} \sum_i J(\varphi_i)$$

$$I^c \equiv \int \left| \frac{dQ^c}{dP} \right|^2 dP$$

と定義する。

定理 1. (1) $Q^S = 0$ のとき, $I = I^c$

(2) $Q^S \neq 0$ のとき, $I = \infty$

(3) I はフィッシャーの情報量の拡張になっている。

定理 2. (フラー-メルハウの不等式の拡張)

$$\inf \left\{ V_P[\hat{\theta}], \hat{\theta} \in C(*), E_P[\hat{\theta}] = 0, E_Q[\hat{\theta}] = 1 \right\} = \frac{1}{I}$$

但し, V は分散, E は平均を意味する。また, $\frac{1}{\infty} = 0$ と考える。

§2. $Q^S \neq 0$ の場合の考察

$Q^S \neq 0$ のとき, $I = \infty$ となる。このような場合, 情報の量を表わす目安として

$$I^S \equiv \|Q^{S+}\|^2 + \|Q^{S-}\|^2$$

を考えるのが妥当のように思える。実際、

定理 3

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \sum_i J(\varphi_i), \begin{array}{l} \{\varphi_i\} \text{ は有限連続関数で} \\ \int \varphi_i dP > \varepsilon \quad (\forall i) \text{ とする} \end{array} \right\} \cdot \varepsilon = I^S$$

が成立する。