

線型函数微分方程式系の

基本行列について

東北大理 加藤 順二

§ 1. 序

ユークリッド空間 R^n 上の線型常微分方程式系

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x$$

の (t_0, x_0) を通る解 $x(t; x_0, t_0)$ は基本行列 $X(t, s)$ を用いて

$$(2) \quad x(t; x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0$$

によって表わされる。この基本行列の意味をいろいろに解釈することができる。まず、定義として、(i) $X(t, s)$ は系 (1) の (n, n) -行列解、すなわち、その各列が (1) の解となっている (n, n) -行列であって条件

$$X(s, s) = E \text{ (単位行列)}$$

を満たしている。また、(ii) (1) の解の全体は n 次元の線型空間をなしているが、 $X(t, s)$ はこの空間の基底を与えており、したがって、逆に、(iii) 与えられた $X(t, s)$ を基本行列とするような方程式系は高々一通りにきまる。さらに、(iv) 固定

された t, s に対して、 $X(t, s)$ は (2) によって定められた $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への 連続な 線型作用素を表わしている。

系 (1) の随伴方程式系は内積のとり方に依存しているが、内積を $(x, y) = {}^T y x$ (左肩の T は転置を表わす) によって与えれば、これはまた (1) の基本行列 $X(t, s)$ に対して ${}^T X(s, t)$ を基本行列とする方程式系であると述べることができる。そして、非同次系

$$\dot{y} = A(t)y + g(t)$$

の (t_0, x_0) を通る解 $y(t; x_0, t_0)$ は

$$(3) \quad y(t; x_0, t_0) = x(t; x_0, t_0) + \int_{t_0}^t X(t, s)g(s)ds$$

によって与えられることも周知の事実である。

性質 (iv) に注目して (1) の零解が安定であることと、有界な定数 $M(s)$ があって、すべての $t \gg s$ に対して

$$\|X(t, s)\| = \sup_{\|x\|=1} \|X(t, s)x\| \leq M(s)$$

が成り立っていることが同値、したがって、(1) の解が同等有界であることが同値となる。さらに、(i) から (1) の解の有界性と同等有界性が同値となり、安定性の理論における次の定理が得られる。

定理 A. (1) の零解が安定であることと (1) の解が有界であることは同値である。

さらに、(1) の解の一意性によって、基本行列が性質

$$(4) \quad X(t, s)X(s, \tau) = X(t, \tau)$$

を持っていることを用いて、

定理B. (1) の零解が一様漸近安定であれば、それは指数的安定である。

を証明することができる。

こゝでは、線型函数微分方程式系に対して、このような性質をもった基本行列、あるいは、線型作用素が存在するかどうか、あるいは、上に述べたいくつかの事実がこの場合にも成り立っているかどうか考えてみたい。

§2. 基本行列。

$h > 0$ を与えられた定数として C によって区間 $[-h, 0]$ から R^n への連続函数の全体を表わし、連続函数 $x(s)$ に対して、 x_t によって $s=t$ における segment、すなわち、

$$x_t(s) = x(t+s) \quad s \in [-h, 0]$$

によって定められた C に属する函数を表わし、 $\dot{x}(t)$ を $s=t$ における右側微係数とする。

線型函数微分方程式系

$$(5) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

を考える。こゝで、 $F(t, \varphi)$ は $[0, \infty) \times C$ において定義され、

(t, φ) に関して連続で φ に関して線型であるとする (このことを $F(t, \varphi) \in L$ で表わす)。たとえば、 $h(t) \geq 0$ を有界な連続

函数、 $A(t)$ 、 $B(t)$ を連続な行列函数としたとき差分微分方程式系

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h(t))$$

はこの系 (5) の特別な場合となっている。

このとき、まず次の基本補題が得られる。

補題 1. $F(t, \varphi) \in \mathcal{L}$ ならば、ある連続函数 $L(t)$ に対して、

$$\|F(t, \varphi)\| \leq L(t) \|\varphi\|_h$$

が $[0, \infty) \times \mathcal{C}$ において成り立っている。ここで、 $\|\varphi\|_h$ は $\mathcal{C}$ における一様 norm、すなわち、

$$\|\varphi\|_h = \sup \{ \|\varphi(s)\|; s \in [-h, 0] \}.$$

この補題によって、(5) の解の存在とその一意性が保証されている。

直ちにわかるように、(5) の解の全体はやはり線型空間をなしている（但し、このとき初期時刻 ^{t_0} は固定されているものとして、 $t \geq t_0$ においてのみ考えている）。これから、このときこの空間の次元は無限次元である。したがって、(ii) のような意味をもった $X(t, s)$ を見出すことはまずあきらめねばならない。 $X(t, s)$ を (5) の (n, n) -行列解で

$$X(s, s) = E, \quad X(s+\eta, s) = 0 \quad (\text{零行列}) \quad \eta \in [-h, 0)$$

をみたすものとしたとき、Halalay [1] は非同次線型系

$$\dot{y}(t) = F(t, y_t) + g(t)$$

の (t_0, y_0) を通る解 $y(t; y_0, t_0)$ は (5) の (t_0, y_0) を通る解 $x(t; y_0, t_0)$ で表わすと

$$y(t; y_0, t_0) = x(t; y_0, t_0) + \int_{t_0}^t X(t, s) q(s) ds$$

で与えられることを示した。こゝで、 $X(t, s)$ の初期函数は連続ではないが、上の補題によつて、 $F(t, y)$ が y に関して Lipschitz の条件をみたしていることから、 $X(t, s)$ は一意に存在している（例えば、Krasovskii [3] 参照）。この結果を (3) 式と比較して、この $X(t, s)$ が (5) に対して基本行列の役割を果たしているように思われる。よこで、これを (5) の基本行列と呼んでこの性質を、三調べてみよう。

$X_t(s)$ によつて $X(t, s)$ の segment、すなわち、

$$X_t(s)(\theta) = X(t+\theta, s)$$

なる函数を表わし、同様に $x_t(y_0, t_0)$ によつて $x(t; y_0, t_0)$ の segment を表わす。次の補題を証明することが出来る。

補題2。任意な $\varphi \in C$ 、 $t \geq t_0$ 、 $\varepsilon > 0$ に対して、自然数 m 、数の組 θ_i 、 $-h \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m \leq 0$ 、および、ベクトル $c_i \in R^n$ ($i=0, 1, \dots, m$) を適当にえらんで、

$$\|\varphi - \sum_{i=0}^m X_t(t+\theta_i) c_i\|_a < \varepsilon$$

が成り立つようにすることが出来る。さらに、 $L > 0$ に対して

$$\|\varphi(\theta) - \varphi(\theta')\| \leq L|\theta - \theta'|, \quad \theta, \theta' \in [-h, 0]$$

がみたされているとき、

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^m \|C_i\| \leq (2h \cdot \max\{L, M(t)\} + 1) \|q\|.$$

$$\text{すなわち、 } M(t) = \sup \left\{ L(u) \exp \left[\int_s^u L(c) dc \right] ; t \geq u \geq s \geq t-h \right\}.$$

この補題の前半によつて、 $H(t, \varphi) \in \mathcal{L}$ かつ、任意の $t \geq s \geq 0$ 、 $c \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $H(t, X_c(s)c) = 0$ ならば、すべての $\varphi \in \mathcal{C}$ に
 $\varphi \in \mathcal{C}$ に対して $H(t, \varphi) = 0$ となることが示される。したがって、

$$\dot{x}(t) = G(t, x_t), \quad G(t, \varphi) \in \mathcal{L}$$

も (5) と同じ基本行列 $X(t, s)$ を持つていれば、 $[h, \infty) \times \mathcal{C}$ において、 $G(t, \varphi) = F(t, \varphi)$ でなくてはならない。すなわち、この意味で $X(t, s)$ は性質 (iii) を満たしていることがわかる。

さて、 $\eta(t, \theta)$ を $[0, \infty) \times [-h, 0]$ で定義された (n, n) -行列函数で θ に関して一様には連続函数、 θ に関しては有界変動である全変動は t の連続函数を上界にもつて $\eta(t, 0) = 0$ のとき系

$$(b) \quad \dot{x}(t) = \int_{-h}^0 [d_\theta \eta(t, \theta)] x(t+\theta)$$

の随伴方程式系を Halanay [1] は

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-h}^0 \eta(t-\theta, \theta) y(t-\theta) d\theta + y(t) \right] = 0$$

によつて与えた。すなわち、 $\theta < -h$ に対して $\eta(t, \theta) = \eta(t, -h)$ と定めてゐる。一方、Hale [2] は (b) において η が t を含まないときに、次の随伴方程式系を

$$\dot{y}(t) = - \int_{-h}^0 [d^\tau \eta(\theta)] y(t-\theta)$$

で定義した。すなわち、上の $\frac{d}{dt}$ 、 $\dot{y}(t)$ は左側微係数を表わしてゐる。これらは一見異なる随伴方程式系を与えてゐるよう

に思われるが、いずれも、(b) の基本行列を $X(t, s)$ としたときこの随伴方程式系の基本行列は ${}^T X(s, t)$ であることを述べている。したがって、すでに述べたことから、 η が t を含んでいないときはこれらは一致してゐなくてはならない。一般に、 $\eta(s)$ を有界変動で、 $s \geq 0$ において $\eta(s) = 0$ 、 $s \leq -h$ において $\eta(s) = \eta(-h)$ とおいたとき、 $\varphi(s)$ が $(-\infty, a)$ ($a > 0$) で連続で

$$\int_{-\infty}^0 \|\varphi(s)\| ds < \infty$$

をみたすならば、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 [d\eta(s)] \varphi(s) &= \int_{-h}^0 [d\eta(s)] \varphi(s) = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^0 \eta(s) \varphi(s-t) ds \right] \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{-t} \eta(t+s) \varphi(s) ds \right] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^0 \eta(t+s) \varphi(s) ds \right] \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、あらうほく云って、Stieltjes 積分においても微分と積分の順序が交換可能である。

補題 2 の後半を用いて、

$$M^*(t) = \sup \{ M(s); t+h \geq s \geq t \}, \quad B(t) = \exp \left[\int_t^{t+h} L(s) ds \right],$$

$$\Phi(t, s) = \begin{cases} \sup \{ \|X(t, \tau)\|; s+h \geq \tau \geq s \}, & t \geq s+h \\ 1, & s+h > t \geq s \end{cases}$$

とおいたとき、(5) の解 $x(t; y_0, t_0)$ は評価式

$$\|x(t; y_0, t_0)\| \leq (1 + 2h M^*(t_0)) B(t_0) \Phi(t, t_0) \|y_0\|_h$$

をみたしていることが示される。この事実から、 F が t を含んでいないときは、 $X(t, s) = X(t-s, 0)$ 、かつ、 $X(t, 0)$ は有限個の解からなることによつて、(5) に対しては定理 A が正しい。

ことが判かる。しかし、 F が $t \in$ 含む場合は更に關する情報
が得られない限り、この事実から定理Aの正否について判断
することができない。

与る。線型作用素。

(5) の解を (2) 式に対応して

$$x_t(\varphi_0, t_0) = T(t, t_0)\varphi_0$$

と書き表わす。このとき、解の性質から、 $T(t, s)$ は C から C
への線型作用素、さらに、 F が Lipschitz の条件をみたすこと
から、これが連続な作用素であることが示される。明らかに
、これは性質(4)、すなわち、 $t > s > \tau$ において

$$T(t, s)T(s, \tau) = T(t, \tau)$$

が成り立っている。したがって、この事実を用いて定理Bが
この場合にも正しいことが示される。(Halasay)。

次の定理はよく知られている。

Banach-Steinhaus の定理 (Zygmund [4])。 $u_m(\varphi) \in$ Banach
空間 Ω 上の有界な線型作用素として $M_m \in u_m$ の norm とす
る。このとき、 Ω の $\varphi =$ 類の集合 Ω^* に属する各点 φ に対して
 $\sup_m \|u_m(\varphi)\|$ が有界であれば、ある $M > 0$ に対して、 $M \geq M_m$ 、す
なわち、すべての $\varphi \in \Omega$ と自然数 m に対して

$$\|u_m(\varphi)\| \leq M \|\varphi\|$$

が成り立っている。ここで、 $\|\varphi\|$ は Ω における norm。

さて、 t_0 を固定して、 $\{t_m\} \in [t_0, \infty)$ において dense な点列
として、

$$u_m(\varphi) = T(t_m, t_0)\varphi$$

と定義する。 $\Omega = \mathbb{C}$ は Banach 空間である。今、(5) のま
での解が有界であると仮定すれば、すべての $(t_0, \varphi_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{C}$
に対して $\beta = \beta(t_0, \varphi_0) > 0$ が存在して、

$$\|x(t; \varphi_0, t_0)\| \leq \beta \quad (t \geq t_0)$$

が成り立っている。したがって、 $\sup \|u_m(\varphi_0)\|_a \leq \beta$ 。ゆえに
、Banach-Steinhaus の定理によって、ある $M(t_0) > 0$ に対して

$$\|u_m(\varphi)\| \leq M \|\varphi\|_a$$

すなわち、 $\|T(t_m, t_0)\varphi\|_a \leq M \|\varphi\|_a$ がすべての φ と m に対して
成り立っている。さらに、 $x(t; \varphi_0, t_0)$ は t に関して連続
だから、 $T(t, t_0)$ も t に関して連続となり、このことと $\{t_m\}$ が
 $[t_0, \infty)$ において dense であることを用いて、

$$\|T(t, t_0)\varphi\|_a \leq M(t_0) \|\varphi\|_a$$

を得る。このことは (5) の解が同等有界であることを示して
おり、同時に、

$$\|\varphi_0\| < \varepsilon / M(t_0) \text{ ならば、 } \|x(t; \varphi_0, t_0)\| < \varepsilon \quad (t \geq t_0),$$

すなわち、(5) の零解は安定となる。逆に、(5) の零解が安
定ならば、直ちに、(5) の解の同等有界性が得られる。したが
って、定理 A の成り立つことが示される。

参考文献

- [1] A. Halanay, Differential Equations, Academic Press, New York, 1966.
- [2] J. K. Hale, Linear functional-differential equations with constant coefficients, Contr. Diff. Eqs., 2(1964), 291-317.
- [3] N. N. Krasovskiĭ, Some Problems in the Theory of Stability of Motion, Stanford Univ. Press, California, 1963.
- [4] A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, p165.