

# $G$ -CW複体に対する Wall 型障害類

阪大 理 飯塚 邦彦

CW複体に対する finiteness condition は Wall 型の障害類によって与えられる [4]。同様の定理が  $G$  が有限群の場合には  $G$ -CW複体に対しても知られている [1]。

本稿では  $G$  がコンパクト Lie 群の場合に、 $G$ -CW複体に対する finiteness condition 即ち「有限  $G$ -CW複体は  $G$ -dominate された  $G$ -CW複体が有限  $G$ -CW複体の  $G$ -ホモトピー型をもつ必要十分条件」は何かを考察する。

問題はいくつか分解される。軌道型の個数については §1 で扱う。§2 で Hauschild のアイデア (cf. [3]) による  $G$ -空間  $F(Y, X)$  の構成を述べる。  $F(Y, X)$  を用いて胞体の数、次元の有限性の考察は、non-equivariant な場合に帰着させることができる (§3) が、本稿では  $F(Y, X)$  の構成を述べることに重点を置き、§3 の定理の証明は省略する。

各次元の胞体の数が有限な  $G$ -CW複体を有限型であるとい

うが、次の問題は ( $G$  がコンパクト Lie 群のときには) 未解決である; 有限型の  $G$ -CW 複体  $X$  に  $G$ -dominate された  $G$ -CW 複体は有限型の  $G$ -CW 複体の  $G$ -ホモトピー型をもつか?

以下  $G$  はコンパクト Lie 群とする。

### §1 軌道型の個数に対する finiteness condition

軌道型の個数に関して、次の定理が得られた。

定理 1.1  $G$ -CW 複体  $X$  に対して次の (a) と (b) とは同値である:

- (a)  $X$  は有限個の軌道型をもつ  $G$ -CW 複体と  $G$ -ホモトピー同値である。
- (b)  $X$  は有限個の軌道型をもつ  $G$ -CW 複体  $Y$  に  $G$ -dominate される。

証明. (a)  $\Rightarrow$  (b) は明らかである。(b)  $\Rightarrow$  (a) を示そう。仮定により有限個の軌道型を持つ  $G$ -CW 複体  $Y$  と、 $G$ -写像  $r: Y \rightarrow X$  及び  $j: X \rightarrow Y$  が存在して、 $r \circ j \simeq \text{id}_X$  となる。 $Y$  の軌道型の全体を  $\{(H_k)\}_{1 \leq k \leq p}$  とする。ここで  $(H_i) \leq (H_j)$  (i.e.  $H_i$  は  $H_j$  の subconjugate) ならば  $i \geq j$  が成り立つように  $k$  index を決める。また  $X$  の軌道型の

全体を  $\{(H_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  として,

$$\Lambda_i = \left\{ \alpha \in \Lambda \mid \max \{t \mid (H_\alpha) \leq (H_t)\} = i, \right. \\ \left. (H_\alpha) \notin \{(H_k)\}_{1 \leq k \leq p} \right\}$$

ここに  $1 \leq i \leq p$ ,

とおく。定義から明らかに  $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) であり,

$\forall \alpha \in \Lambda - \bigcup_{i=1}^p \Lambda_i$  に対し,  $(H_\alpha) \in \{(H_k)\}_{1 \leq k \leq p}$  が成り立つ。

さて  $\Lambda_m \neq \emptyset$  となる最小  $m \in \mathbb{N}_0$  とする。このとき

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda_{m_0}} GY^{H_\alpha} \subset \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}$$

が成り立つから、 $\Gamma$  の制限

$$r_1 : \left( \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}, \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \right) \longrightarrow \left( \bigcup_{\alpha \in \Lambda_{m_0}} GX^{H_\alpha} \cup \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}, \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \right)$$

は  $G$ -dominating map である。このことから、 $G$ -strong deformation retraction

$$\varphi : \bigcup_{\alpha \in \Lambda_{m_0}} GX^{H_\alpha} \cup \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i}$$

が存在することがわかる (cf. [5, Proposition 1.3.]).  $\gamma \in \phi$  の  $G$ -胞体近似写像として、接着空間  $X'$  を

$$X' = \bigcup_{i=1}^{m_0} GX^{H_i} \cup_\gamma X$$

によって定義する。  $X'$  は  $X$  と  $G$ -ホモトピー同値な  $G$ -CW 複体で、  $X'$  の軌道型は  $\{(H_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda - \Lambda_{m_0}}$  である。

$X'$  はまた  $Y$  に  $G$ -dominate されるから、上と同様の操作をくり返す (高々  $p$  回) ことにより、有限個の軌道型

$\{(H_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda - \bigcup_{i=1}^p \Lambda_m}$  をもち  $X$  と  $G$ -ホモトピー同値な  $G$ -CW

複体を得らる。

(証明終)

### §2. $F(Y, X)$ の構成

$p: EG \rightarrow BG$  を普通主  $G$  束とする。  $G$ -CW複体  $X$  に対し、 $EG \times X$  に  $G$  の対角作用を考え、自由  $G$ -空間を  $EX$  で表わす。

定理 2.1.  $EX$  は  $G$ -CW複体の  $G$ -ホモトピー型をもつ。

定理の証明は  $EX$  が numerable principal  $G$ -space (cf. [2]) であることを用いて、まず  $EX$  が  $G \times G$ -CW複体  $E_0X$  ( $EX$  に弱位相を与えたもの) と  $G$ -ホモトピー同値であることを示し、次に  $E_0X$  の各  $G \times G$ -胞体を  $G$ -CW分割することにより、 $E_0X$  が  $G$ -CW複体の  $G$ -ホモトピー型をもつことをいう。

さて  $(Y, X)$  は  $G$ -CW対で、 $Y-X$  上には自由に  $G$  が作用しているとする。このとき  $G$  空間対  $(EY, EX)$  と  $G$ -ホモトピー同値な相対  $G$ -CW複体  $(F(Y, X), EX)$  で、すべての整数  $k$  ( $k \geq 0$ ) に対して  $Y-X$  に含まれる  $k$  次元  $G$ -胞体と、 $F(Y, X)$  に含まれる  $k$  次元  $G$ -胞体とが一対一に対応するものを構成する。

Step 1 まず  $Y-X$  に含まれる  $G$ -胞体がすべて  $n$  次元であるときを考える。したがって

$$Y = X \cup_{\varphi} (\coprod I^n \times G)$$

(ここに  $\varphi$  は

$$\varphi: \coprod I^n \times G \longrightarrow X$$

なる  $G$ -写像) と表わされる。  $EG$  の一点  $*$  を固定して、

$$\psi: \coprod I^n \times G \longrightarrow EX$$

を

$$\psi(x, g) = (g \cdot *, \varphi(x, g)), \quad (x \in \coprod I^n, g \in G)$$

によって定義する。この  $\psi$  を用いて  $F(Y, X)$  を

$$F(Y, X) = EX \cup_{\psi} (\coprod I^n \times G)$$

と定める。このとき  $(F(Y, X), EX)$  と  $(EY, EX)$  とが  $G$ -ホモトピー同値であることは以下のように証明される。

可換図式

$$\begin{array}{ccc} F(Y, X) & \xrightarrow{i} & EY \\ & \searrow p' \quad \swarrow p & \\ & Y & \end{array}$$

を考える。ここに  $i$  は包含写像 ( $F(Y, X)$  は自然に  $EY$  の  $G$ -不変部分空間とみなせる)、 $p$  は射影、 $p'$  は  $p$  の制限である。

$p \circ \psi = \varphi$  であるから  $p'$  がホモトピー同値写像であることがわかるが、 $EY$  は numerable principal  $G$ -space だから  $i$  は

$G$ -ホモトピー同値写像である。したがって  $\text{id}: EX \longrightarrow EX$  は  $G$ -ホモトピー同値写像  $f: EY \longrightarrow F(Y, X)$  に拡張する ([2; Appendix, Lemma 4.2] を参照)。

Step 2 次に帰納法を用いて一般の場合に  $F(Y, X)$  を構成する。可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} EX & \subset & EY_0 & \subset & EY_1 & \subset & \cdots \subset EY_k \\ \parallel & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_k \\ EX & \subset & F(Y_0, X) & \subset & F(Y_1, X) & \subset & \cdots \subset F(Y_k, X) \end{array}$$

で、 $f_0, \dots, f_k$  は  $G$ -ホモトピー同値写像であるものができたと仮定する。ただし  $Y_i$  は  $(Y, X)$  の相対  $i$  切片 (i.e.  $Y_i = X \cup Y_i$ ) である。いま

$$F(Y_{k+1}, X) = F(Y_k, X) \cup_{f_k} F(Y_{k+1}, Y_k)$$

において、図式

$$\begin{array}{ccccc} EY_k & \xlongequal{\quad} & EY_k & \subset & F(Y_{k+1}, Y_k) \\ \downarrow f_k & & \parallel & & \parallel \\ F(Y_k, X) & \xleftarrow{f_k} & EY_k & \subset & F(Y_{k+1}, Y_k) \end{array}$$

を考えると、 $f_k$  は  $G$ -ホモトピー同値写像

$$f': F(Y_{k+1}, Y_k) \longrightarrow F(Y_{k+1}, X)$$

に拡張することがわかる。

一方、Step 1 で見たように、 $\text{id}: EY_k \longrightarrow EY_k$  は  $G$ -ホモ

トピー同値写像  $f: EY_{k+1} \longrightarrow F(Y_{k+1}, Y_k)$  に拡張する。

$f_{k+1} = f' \cdot f$  とおくことにより帰納法は完結する。

ここで  $F(Y, X) = \varinjlim_k F(Y_k, X)$  と定義すれば、これが求めるものであることは容易にみられる。

### §3 主定理

$X$  を有限型の  $G$ -CW 複体、 $Y$  を有限  $G$ -CW 複体とし、

$r: Y \longrightarrow X$  を  $G$ -dominating map とする。したがって  $G$ -写像  $j: X \longrightarrow Y$  で  $r \circ j$  が  $\text{id}_X$  と  $G$ -ホモトピックになるものが存在する。

さて  $X$  は  $(H)$  型の  $G$ -胞体をもつとする。  $NH \in H$  の  $G$  における正規化群とし、  $WH$  で商群  $NH/H$  を表わすことにする。

$Y^H$  は  $WH$ -空間である。いま  $X_1^H, X_2^H, \dots, X_i^H \in X^H$  の  $WH$ -連結成分とする ( $Y$  に  $G$ -dominate されることからこれらは有限個である)。  $X^{>H} = \bigcup_{K \neq H} X^K$  ( $K$  は  $G$  の開部分群),  $X_k^{>H} = X_k^H \cap X^{>H}$  ( $1 \leq k \leq i$ ) とおくと、  $(X_k^H, X_k^{>H})$  は  $WH$ -CW 対である。ここで  $X_k^H - X_k^{>H}$  に含まれる  $WH$ -胞体はすべて自由な  $WH$ -作用をもち、これらは同じ次元の  $X$  の  $(H)$  型の  $G$ -胞体と一対一に対応していることに注意しておく。各  $k$  ( $1 \leq k \leq i$ ) に対し、  $j(X_k^H)$  は  $Y^H$  のある  $WH$ -連結成分に含まれる。これを  $Y_k^H$  とする。このとき

$$\Gamma|Y_k^H : (Y_k^H, Y_k^{>H}) \longrightarrow (X_k^H, X_k^{>H})$$

は、WH-dominating map である。

$EX, F(Y, X)$  等の軌道空間を  $BX, B(Y, X)$  等と表わすことにする。このとき次の補題が成り立つ。

**補題 3.1** WH-CW対としての  $(Y_k^H, Y_k^{>H})$  の次元が  $n$  であるならば、 $(BX_k^H, BX_k^{>H})$  は  $n$  次元の有限CW対に dominate される。

**証明** 下の図式からわかるように、相対CW複体  $(B(X_k^H, X_k^{>H}), BX_k^{>H})$  は有限相対CW複体  $(B(Y_k^H, Y_k^{>H}), BY_k^{>H})$  に dominate される。

$$\begin{array}{ccc}
 (EY_k^H, EY_k^{>H}) & \xrightarrow[\text{WH-dominating map}]{\text{id} \times \Gamma|Y_k^{>H}} & (EX_k^H, EX_k^{>H}) \\
 \downarrow \cong_{\text{WH}} & & \downarrow \cong_{\text{WH}} \\
 (F(Y_k^H, Y_k^{>H}), EY_k^{>H}) & \xrightarrow{\text{WH-dominating map}} & (F(X_k^H, X_k^{>H}), EX_k^{>H}) \\
 \downarrow \text{射影} & & \downarrow \text{射影} \\
 (B(Y_k^H, Y_k^{>H}), BY_k^{>H}) & \xrightarrow{\text{dominating map}} & (B(X_k^H, X_k^{>H}), BX_k^{>H})
 \end{array}$$

ところが §2 で述べたことより、 $(B(X_k^H, X_k^{>H}), BX_k^{>H})$  と  $(BX_k^H, BX_k^{>H})$  はホモトピー同値であり、また  $(B(Y_k^H, Y_k^{>H}), BY_k^{>H})$  は  $n$  次元の有限CW対とホモトピー同値であるから補題の主張が成り立つ。 (証明終)

定義 本節の最初の仮定のもとに、 $X$  の  $(H)$  型の Wall 型障害類  $W_{(H)}(X)$  を

$$\begin{aligned} W_{(H)}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} W(BX_k^H, BX_k^{>H}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi_1(BX_k^H)) \end{aligned}$$

と定義する。ここで  $W(BX_k^H, BX_k^{>H})$  は位相空間対  $(BX_k^H, BX_k^{>H})$  に対する Wall 型障害類を表わす。

定理 3.2  $W_{(H)}(X)$  は直和因子の置換を除いて、 $X$  の  $G$ -ホモトピー型のみによって定まる。

定理 3.3  $H$  を  $G$  の閉部分群とし、 $Y$  に含まれる  $(H)$  型の  $G$ -胞体の最高次元を  $n$  とする。このとき次の (i) および (ii) が成り立つ。

(i)  $W_{(H)}(X) = 0$  であるならば、 $X$  は有限型の  $G$ -CW 複体  $Z$  で、次の (a), (b), (c) を満足するものと  $G$ -ホモトピー同値である。

(a)  $Z$  に含まれる  $(H)$  型の  $G$ -胞体の個数は有限。

(b)  $Z$  に含まれる  $(H)$  型の  $G$ -胞体の最高次元は  $\max(3, n)$ 。

(c)  $J$  を  $H$  と共役でない  $G$  の閉部分群とすると、 $X$  に含まれる  $(J)$  型の  $m$  次元  $G$ -胞体の個数と、 $Z$  に含まれる  $(J)$  型の  $m$  次元  $G$ -胞体の個数は任意の  $m$  に対して等しい。

(ii)  $X$  が有限型の  $G$ -CW 複体  $Z'$  で、 $Z'$  に含まれる  $(H)$  型の  $G$ -胞体の個数が有限なものと  $G$ -ホモトピー同値であれば、  
 $W_{(H)}(X) = 0$  である。

定理の(i)は  $W(BX_{\mathbb{R}}^H, BX_{\mathbb{R}}^{>H}) = 0$  より、 $(BX_{\mathbb{R}}^H, BX_{\mathbb{R}}^{>H})$  が次元が  $\max(3, n)$  の有限 CW 対とホモトピー同値になることから証明される。(ii)は仮定より  $W(BX_{\mathbb{R}}^H, BX_{\mathbb{R}}^{>H}) = 0$  となるからである。

最後に、 $G$ -CW 複体の次元の有限性に関しては次の定理が得られる。

定理 3.4  $G$ -CW 複体  $X$  が、有限個の軌道型をもつ  $n$  次元  $G$ -CW 複体と  $G$ -dominate されるならば、 $X$  は次元が  $\max(3, n)$  の  $G$ -CW 複体と  $G$ -ホモトピー同値である。

定理 1.1 より、 $X$  の軌道型も有限個であるとしてよく、その各軌道型  $(H)$  に対し、 $(BX^H, BX^{>H})$  が  $\max(3, n)$  次元の CW 対とホモトピー同値になることから、定理 3.4 が得られる。

## 参考文献

- [1] Baglivo, J. A. : An equivariant Wall obstruction theory, Trans. Amer. Math. Soc., 256 (1979), pp. 305 - 324.
- [2] Boardman, J. M., and R. M. Vogt : Homotopy invariant algebraic structure on topological spaces, Lecture Notes in Math., 347 (1973), Berlin - Heidelberg - New York : Springer.
- [3] Hauschild, H. : Äquivariante Whitehead torsion, Manuscripta Math., 26 (1978), pp. 63 - 82.
- [4] Wall, C. T. C. : Finiteness conditions for CW complexes, Ann. of Math., 81 (1965), pp. 55 - 69.
- [5] Illman, S. : Whitehead torsion and group actions, Ann. Acad. Sci. Fenn., A. I. 588 (1974).